数学名著译丛

组合几何

〔美〕J.帕赫 P.K.阿格瓦尔 著

丁 仁 苏战军
苑立平 徐常青 魏祥林 译



数学名著译丛

拓扑空间论
代数特征值问题
数学概观
常微分方程
数学与猜想
代数几何
数学——它的内容，方法和意义
非线性与泛函分析
几何基础（第二版）
微积分和数学分析引论
代数数理论讲义
非线性及泛函分析 —— 数学分析中的非线性问题讲义
数学的发现 —— 对解题的理解、研究和讲授
博大精深的素数
环与模范畴
代数几何引论
组合几何



定 价：65.00 元

图字：01-2007-1855

内 容 简 介

组合几何是一门古老而又年轻的数学学科，许多组合几何问题因其直观表述而独具魅力．计算机科学的迅猛发展大大促进了组合几何的发展，也为组合几何开拓了广阔的应用前景．本书系统阐述组合几何领域近三十余年来若干最为重要的研究成果与方法，并给出详尽证明．本书涵盖数的几何、填充与覆盖、极图理论、超图理论、有限点集距离分布、几何图论、几何偏差理论等多个分支，每章配有习题与解答提示．

原书作者特地为中文版撰写了反映 1995 年本书英文版出版以来最新研究成果的补充内容，提供了大量最新参考文献．

本书可用作数学与计算机科学有关专业的教材与科研用书，也可供组合几何爱好者赏析阅读，还可供计算几何、计算机图形学、编码理论、机器人技术及计算机辅助设计等应用领域的专业人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

组合几何/(美)J. 帕赫，P. K 阿格瓦尔著；丁仁等译．—北京：科学出版社，2008
(数学名著译丛)
ISBN 978-7-03-021118-7
I.组… II.① 帕… ② 阿… ③ 丁… III.组合几何 IV.O157.3
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 031078 号

责任编辑：陈玉琢 房 阳／责任校对：陈玉凤
责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008 年 6 月第一次印刷 印张：21 1/4
印数：1—3 000 字数：396 000
定价：65.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换(路通))

献给　Paul Erdős, László Fejes Tóth

与 C. Ambrose Rogers

中文版序

近 20 年来, 世人见证了发生在中国的一次 "组合论复兴". 一批批优秀的数学家、计算机科学家相继投身于组合论研究, 兴建研究机构, 召开国际会议, 出版专著, 发表论文, 一派兴旺景象. 所有这些活动, 主要涉及密切相关的两个领域 —— 代数组合论与计数组合论.

今天我们有机会向中国读者呈献一部展示组合论另一侧面 —— 几何学侧面的新书, 不胜欣喜. 这一领域中涌现的许多问题是极值问题, 因而, 很自然地, 解决这类问题常常用到经典分析与极值组合论相结合的方法. 事实证明, 极值图理论与超图理论也许是近代理论计算机科学与算法理论中十分独特的最具应用价值的工具. 本书第二部分提供了相关的基础知识. 四川大学柯召教授是这一领域的先驱者之一.

相传约 3000 年前, 洛河中跃出的一只神龟背上刻着的竟是组合论的第一个研究对象 —— 幻方. 具有象征意义的是, 组合论研究史上第二个研究对象最初或许也是以几何形式出现的, 那就是杨辉三角 (后来由帕斯卡重新发现). 20 世纪末, 组合论已经成为拥有大量有效方法与卓著成果的重要数学学科.

正如本书所述, 这些方法可用以证明甚至欧几里得都会十分欣赏的许多令人兴奋的定理, 有关三角形、正方形、圆与直线及其他几何元素的诸多命题. 相关结果在其他数学分支, 如计算几何、编码理论、计算机图形学与图画法中都有着多种应用.

如本书第一部分若干章节所指出的, 组合几何植根于经典数学, 植根于 Newton, Euler, Gauss, Minkowski, Erdős, Fejes Tóth 及其他数学家的工作. 然而, 组合几何学中尚未解决的难题比比皆是, 解决这些问题需要新思想与新方法. 组合几何学是有志挑战数学难题者一展身手的最佳领域之一. 长期以来, 中国团队在国际数学奥赛中一直雄踞榜首, 我竭诚希望, 本书将为中国无数才华横溢的学生引介一个多姿多彩的研究领域, 希望他们从中发现种种令人兴奋的亟待解决的问题, 学会解决这些问题的基本思想. 我深信, 青年一代在未来十年取得的成就, 会全面改写本书的内容.

诚挚感谢我的朋友、国际知名组合几何学家河北师范大学丁仁教授, 他与他的四位年轻同事学生苏战军、苑立平、徐常青、魏祥林共同完成了本书中文版的翻译工作. 为了反映本书英文版 1995 年出版以来组合几何领域的最新成果, 他们添加了我特地为中文版撰写的补充内容与最新文献. 在翻译过程中他们关注甚至极其

微小的技术性细节, 力求术语译名严谨准确, 为一部上乘之作付出了最大努力.

下面列举的是本书英文版 1995 年出版以来先后问世的 6 部相关的重要专著.

K. Böröczky, Jr., *Finite Packing and Covering*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

P. Brass, W. Moser and J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, New York, 2005.

J. E. Goodman and J. O'Rourke, eds., *Handbook of Discrete and Computational Geometry (2nd ed.), Discrete Mathematics and its Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2004.

P. M. Gruber, *Convex and Discrete Geometry, Grundlehren Math. Wiss.* **336**, Springer, Heidelberg, 2007.

J. Matoušek, *Lectures on Discrete Geometry, Graduate Texts in Mathematics* **212**, Springer, New York, 2002.

J. Pach, ed., *Towards a Theory of Geometric Graphs*, Contemporary Mathematics Series, vol. **342**, American Mathematical Society, Providence, 2004.

J. 帕赫 (János Pach)
2007 年 11 月于纽约

英文版原序

"数学基础危机"、"判定问题" 与 "哥德尔定理" *当然都应归属 20 世纪初期最热门的科学论题. 相关研究促成了种种令人瞩目的新发现. 这些发现渗透到广阔的数学领域, 促进了许多曾被认为 "死亡" 的数学分支的发展. 然而直觉 (初等) 几何却沦为落伍者之一. 总的说来, 这一领域未受到应有重视, 而几何学中一些较为 "抽象" 的领域, 如拓扑学与微分几何, 却十分活跃, 对人类认识物质世界产生了重大影响. 35 年前, 在一次学术会议上迪厄多内 (J. Dieudonné) 慷慨激昂地喊出了 "打倒欧几里得!" "永别了, 三角形!" 的口号, 多数与会者竟持有同感 **.

然而, 随后世人即见证了直觉几何的复苏. 若干不同渠道为直觉几何输入了新鲜血液. László Fejes Tóth 与 C. Ambrose Rogers 的工作为 Newton, Gauss, Minkowski, Hilbert 等人研究的经典问题开创了新的组合论途径, 奠定了填装与覆盖理论的基础. 与此同时, P. Erdős 接连不断提出大量组合几何的新问题, 这些问题欧几里得如若在世也会赞赏不已. 事实表明, 其中许多问题在编码理论、组合优化、计算几何、机器人理论、计算机图形学等领域有着极为重要的应用. 计算机技术的迅猛发展为纯粹数学与应用数学众多领域的研究提供了巨大动力, 组合几何是从中获益最多的领域之一.

组合几何的大多数问题都涉及点、直线、圆、球面的配置问题, 涉及的是欧氏几何中最基本的研究对象. 其中许多问题因其直观表述而具有很强的吸引力, 可以让外行听来也头头是道. 例如, 在一个体积一定的箱子中可以填装多个单位球? 平面上 n 条直线与 n 个点之间的最大关联数是多少? 本书旨在提供一部独立的入门书, 阐述凸体配置 (第一部分) 与点线配置 (第二部分) 的重要结果. 本书论及的课题尽管显得较为初等, 但约一半内容都是近 20 年来的研究成果, 尚未见诸任何教材与专著. 相关论著与综述列举如下:

- *Geometry of Numbers*: J. Cassels (1959); P. Gruber and C. Lekkerkerker (1987); Erdős, P. Gruber, and J. Hammer (1989); M. Deza, V. Grishukhin, and M. Laurent (1993).
- *Theory of Packing and Covering*: C. A. Rogers (1964); L. Fejes Tóth (1964,

* 指 "哥德尔不完备性定理"(Gödel Incompleteness Theorem). —— 译者注

** 20 世纪 20 年代末 30 年代初法国迪厄多内、嘉当 (H. Cartan) 等一批年轻的数学家组成了名为布尔巴基 (Bourbaki) 的团体, 倡导法国数学教学改革, 对 20 世纪数学有深远影响. 学术会议指的是 1959 年 12 月由欧洲经济合作组织 (OEEC) 在法国主办的 Royaumont 研讨会. —— 译者注

1972); G. Fejes Tóth and W. Kuperberg (1992, 1993d).

- *Coding Theory*: I. Csiszár and J. Körner (1981); J. van Lint (1982); J. Conway and N. Sloane (1988).
- *Convexity*: T. Bonnesen and W. Fenchel (1934); L. Danzer, B. Grünbaum, and V. Klee (1963); B. Grünbaum (1967); I. Yaglom and V. Boltyansky (1951); R. Schneider (1993).
- *Combinatorial Geometry*: H. Hadwiger, H. Debrunner, and V. Klee (1964); V. Boltyansky and I. Gohberg (1985); P. Erdős and G. Purdy (1995); W. Moser and J. Pach (1986); V. Klee and S. Wagon (1991).
- *Computational Geometry*: F. Preparata and M. Shamos (1985); H. Edelsbrunner (1987); K. Mehlhorn (1985); K. Mulmuley (1994); J. O'Rourke (1994); M. Sharir and P. Agarwal (1995).
- *Linear Programming*: Chvátal (1983).
- *Convex Optimization*: M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver (1985).

作者曾在纽约大学柯朗研究所开设两门相关课程, 本书是以该课程的讲稿为基础撰写的. 在此谨向听课并参加研讨的学生与同事深表谢忱. 令人欣慰的是, 本书中的部分结果正是听课者在听课阶段及其后做出的研究成果. 在此谨向 Boris Aronov, Vasilis Capoyleas, Mikhael Gorbunov, Bud Mishra, Marco Pellegrini, Richard Pollack, Nagabhushana Prabhu, Micha Sharir, Joel Spencer, Marek Teichmann 与 Chee Yap 致谢.

特别要感谢 Pankaj K. Agarwal, 他笔录了我的讲课内容, 将我的手稿整理为 TEX 文档, 细心审读所有材料并作了修改, 编写了全部参考文献, 为习题提供了诸多解答提示, 绘制了所有附图, 撰写了第 11,13 章的初稿. 没有他的锲而不舍的热心支持, 本书是不可能问世的.

还要感谢 Boris Aronov, Peter Brass, György Csizmadia, Herbert Edelsbrunner, György Elekes, Gábor Fejes Tóth, Zoltán Füredi, János Komlós, Wlodzimierz Kuperberg, David Larman, Endre Makai, Jiři Matoušek, Richard Pollack, Günter Rote, Jason Rush, Micha Sharir, Torsten Thiele, Géza Tóth, György Turán 与 Emo Welzl, 他们认真阅读了本书的初稿, 并提出了宝贵意见, 还将本书初稿作为本科生与研究生教材使用. 本书几经修改才得以定稿, 凡是具有坚实微积分基础, 熟悉组合论、概率论基本概念的大学生都应能读懂本书. 对于希望探索这一引人入胜的研究领域的研究生、专业数学工作者、业余数学爱好者, 本书则是研究课题的来源.

最后我要感谢我的老师与朋友 Paul Erdős, László Fejes Tóth 与 C. Ambrose Rogers, 他们造就了我的数学思维. 本书大部分基本结果或应归属他们, 或直接得益于他们的研究.

1990 年春, 在一次学术报告中, 盖尔范德 *说: “我年岁越大越相信, 绝大多数艰深数学问题的背后都有一个组合论问题.” 本书集中探讨的正是这样一个组合论在其中起着开创性引导作用的迅速发展的领域.

J. 帕赫 (János Pach)
1995 年 7 月于匈牙利布达佩斯

* L. M. Gelfand, 前苏联数学家, 1913 年生于乌克兰, 苏联科学院院士. 由于在泛函分析、群表示论、一次代数学等方面的成就, 1978 年获沃尔夫数学奖. —— 译者注

目　录

第二部分 点与直线的配置

第一部分　凸集的配置

第 1 章　数的几何

数的几何起源于数论，是一门有着百余年历史的数学学科. Minkowski (1896) 富有成效的研究表明，数论中的丢番图逼近及其他数论分支中许多重要结果都可以通过简单的几何论证得到. Minkowski 的一个独具创见的命题 (定理 1.7) 是数的几何理论的起点，它可以视为鸽笼原理在可测集上的一个显而易见的推广. 本章旨在给出这一结论导出的一些直接结果，包括 Fermat 的二平方和定理与四平方和定理的简洁证明.

1.1　格

下面是数的几何中的一个基本概念.

定义 1.1　给定 d 维欧氏空间$\mathbb{R}^d$ 中的 d 个线性无关的向量 (点) $u_1, \cdots, u_d$，这些向量生成的**格** $\mathbf{\Lambda}$ 定义为

$$\mathbf{\Lambda}(u_1, \cdots, u_d) = \{m_1u_1 + \cdots + m_du_d | m_1, \cdots, m_d \in \mathbb{Z}\},$$

其中 $\mathbb{Z}$ 是整数集.

称集 $\{u_1, \cdots, u_d\}$ 为 $\mathbf{\Lambda}$ 的**基**. 由形如 $m_1u_1+\cdots+m_du_d$ (对每个 i, $m_i \in \{0,1\}$) 的 2^d 个顶点导出的平行体 P 称为 $\mathbf{\Lambda}$ 的**基本平行体**或**胞腔**. 显然，

$$\mathrm{Vol}\, P = |\det(u_1, \cdots, u_d)|.$$

当然，同一个格可以有许多不同的生成方式，即 $\mathbf{\Lambda}$ 有许多不同的基. 因而 $\mathbf{\Lambda}$ 有许多不同的基本平行体. 但所有这些基本平行体的体积相等. 事实上，设 P 是 $\mathbf{\Lambda}$ 的一个基本平行体，$B^d(R)$是 $\mathbb{R}^d$中球心在原点半径为 R 的球. 如果 R 很大，那么对某些 $u \in \mathbf{\Lambda} \cap B^d(R)$, P 的形如 $P+u$ 的平移不交叠且 “几乎完全” 覆盖 $B^d(R)$.

定义 1.2　设 $\det \mathbf{\Lambda}$ 为 $\mathbf{\Lambda}$ 的任一基本平行体的体积. 若 $\det \mathbf{\Lambda} = 1$，则称 $\mathbf{\Lambda}$ 为**单位格**.

下面通过若干简单命题说明格、球填装与丢番图逼近之间的密切关系. 为简单起见，考虑 $d=2$，即平面情形.

定理 1.3　设 $\mathbf{\Lambda}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个单位格. 则存在两个格点，它们之间的距离至多为 $\sqrt{2/\sqrt{3}}$.

证明　设 $u, v \in \mathbf{\Lambda}$ 是一对格点, 它们之间的距离 $\delta^\star$ 最小. 不妨设 $u = \mathbf{0}$, 则对每个整数 k, 有 $kv \in \mathbf{\Lambda}$. 根据 $\delta^\star$ 的最小性, 以 kv 为圆心 $\delta^\star$ 为半径的圆盘的并中不可能有其他格点. 若 ℓ 表示经过 $\mathbf{0}$ 和 v 的直线, 则这些圆盘覆盖一个围绕 ℓ 的半宽为 $(\sqrt{3}/2)\delta^\star$ 的带形区域 (图 1.1). 另一方面, 由于 $\mathbf{\Lambda}$ 是单位格, 因此在平行于 ℓ 且到 ℓ 的距离为 $1/\delta^\star$ 的直线 t 上有无穷多个格点, 于是 $(\sqrt{3}/2)\delta^\star \leqslant 1/\delta^\star$, 结论成立. 显然一般情况下常数 $\sqrt{2/\sqrt{3}}$ 不能改进. □

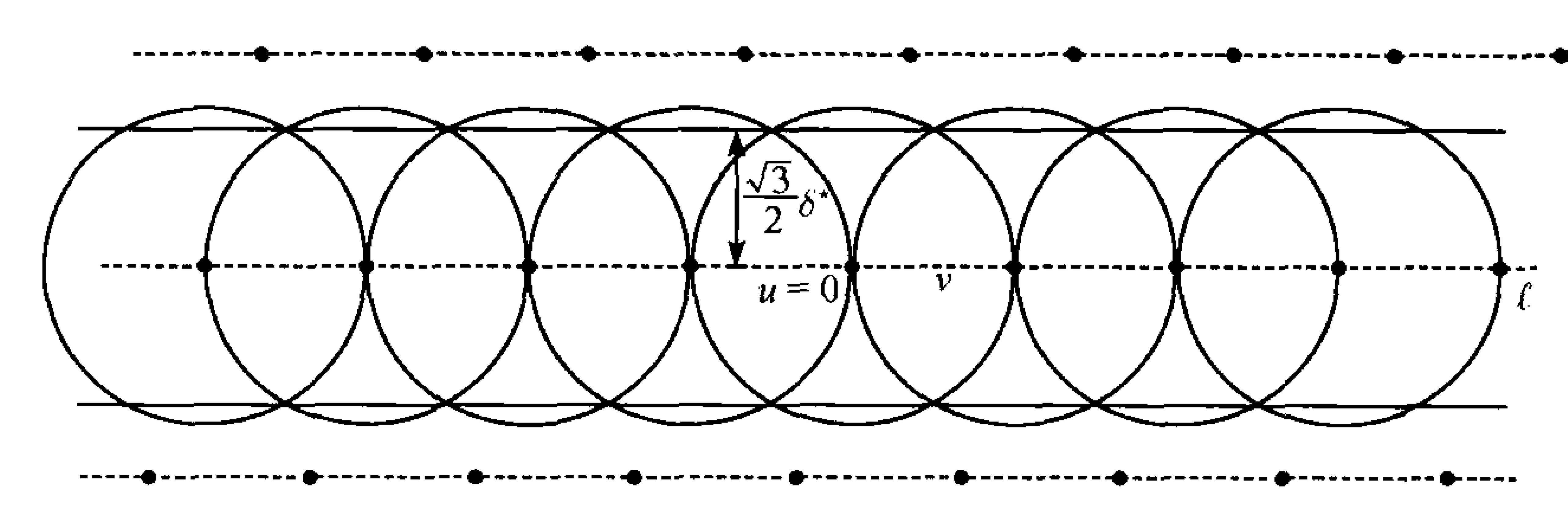


图 1.1　被圆盘覆盖的带形区域

围绕格 $\mathbf{\Lambda}$ 的每个格点画一个半径为 r 的圆盘. 若这些圆盘不交叠, 则称这些圆盘形成**格填装**. 一个格填装的**密度**是 $\pi r^2/\det\mathbf{\Lambda}$, 即平面被圆盘覆盖部分所占的比例.

推论 1.4　*全等圆盘形成的格填装密度至多为 $\pi/\sqrt{12}$, 且此界可达.*

证明　不妨假设 $\mathbf{\Lambda}$ 是单位格. 设 $\delta^\star$ 的含义与定理 1.3 证明中的 $\delta^\star$ 相同, 则对半径为 r 的不交叠的圆盘来说, r 的最大值为 $\delta^\star/2$. 因此, 由定理 1.3 知格填装密度为

$$\frac{(\delta^\star/2)^2\pi}{\det\mathbf{\Lambda}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$ □

推论 1.5　*设 $f(m,n) = am^2 + 2bmn + cn^2$ 是一正定型, $a > 0$, $ac - b^2 = 1$. 则存在两个整数 m' 和 n', 其中至少一个不为 0, 且 $f(m',n') \leqslant 2/\sqrt{3}$.*

证明　易知

$$\mathbf{\Lambda} = \left\{\left(\sqrt{a}m + \frac{b}{\sqrt{a}}n,\ \frac{1}{\sqrt{a}}n\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, m \text{ 与 } n \text{ 均为整数}\right\}$$

是单位格. 因此, 由定理 1.3 知, 存在一个非原点的格点

$$\left(\sqrt{a}m' + \frac{b}{\sqrt{a}}n',\ \frac{1}{\sqrt{a}}n'\right),$$

该格点到原点的距离至多为 $\sqrt{2/\sqrt{3}}$, 即

$$\left(\sqrt{a}m' + \frac{b}{\sqrt{a}}n'\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}}n'\right)^2 = f(m',n') \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}.$$ □

推论 1.6 设 α 是任一无理数, 则存在无穷多个整数对 (m, n), 使得

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{n^2}.$$

证明 给定 $\varepsilon > 0$, 设

$$f(m,n) = \left(\frac{\alpha n - m}{\varepsilon}\right)^2 + (\varepsilon n)^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}m^2 - \frac{2\alpha}{\varepsilon^2}mn + \left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\right)n^2,$$

则 $f(m,n)$ 满足推论 1.5 的条件, 因此可以选取 $m', n' \in \mathbb{Z}$ (整数集), 使得

$$f(m', n') = \left(\frac{\alpha n' - m'}{\varepsilon}\right)^2 + (\varepsilon n')^2 \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

而此时

$$\begin{aligned}\left|\alpha - \frac{m'}{n'}\right| &= \left|\frac{\alpha n' - m'}{\varepsilon}\right| \cdot (\varepsilon n') \cdot \frac{1}{n'^2} \\ &\leqslant \frac{\left(\frac{\alpha n' - m'}{\varepsilon}\right)^2 + (\varepsilon n')^2}{2} \cdot \frac{1}{n'^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{n'^2}.\end{aligned}$$

注意, 如果 ε 充分小, 那么 $n' \neq 0$. 同样地, 选取越来越小的 ε, 可得到无穷多个满足条件的数对 (m, n). □

d 维欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 中内部非空的紧凸集称为**凸体***. 下面是本章开头提到的 Minkowski 的重要结果.

定理 1.7 (Minkowski, 1896) *设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 是关于原点对称的凸体, $\mathbf{\Lambda}$ 是单位格. 如果 $\mathrm{Vol}\, C > 2^d$, 那么 C 至少含一个不同于 $\mathbf{0}$ 的格点.*

证明 考虑凸体 $C/2 + u = \{c/2 + u \mid c \in C\}$, 其中 $u \in \mathbf{\Lambda}$. 如果这些凸体中的两个 (例如, $C/2 + u$ 和 $C/2 + v$) 有公共点 p, 那么 $p - u, p - v \in C/2$. 但此时 $v - p \in C/2$, 从而 $\mathbf{0} \neq v - u = (v - p) + (p - u) \in C/2 + C/2 = C$ 且 $v - u \in \mathbf{\Lambda}$, 即得结论.

若集合 $C/2 + u$ $(u \in \mathbf{\Lambda})$ 是不相交的, 则易知 $\mathrm{Vol}\,(C/2) = (1/2^d)\mathrm{Vol}\, C \leqslant 1$, 矛盾. □

事实上, 同理可证

定理 1.8 (Blichfeldt, 1921; van der Corput, 1936) *设 k 是自然数, $S \subseteq \mathbb{R}^d$ 是满足 $\mathrm{Vol}\, S > k$ 的* ***Jordan可测集****, 且 $\mathbf{\Lambda}$ 是一单位格. 则存在 $s_0, s_1, \cdots, s_k \in S$, 使得对所有 $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, 有 $s_i - s_j \in \mathbf{\Lambda}$.*

* $\mathbb{R}^2$ 即平面中的凸体通常称为凸区域. 为便于讨论, 一概称为凸体. —— 译者注

利用 Minkowski 定理容易确立一个比推论 1.6 (见习题 1.2) 稍弱的命题. 在推论 1.6 中常数的最佳可能值是 $1/\sqrt{5}$ (Hurwitz, 1891).

1.2　二平方和定理与四平方和定理

本节将利用 Minkowski 定理 (定理 1.7) 证明数论中 Fermat 发现的两个经典结果. 第一个结果是, 每个形如 $4m+1$ 的素数可以表示成两个整数的平方和, 它的第一个完整证明是一百多年后 Euler 给出的. Euler 未能证明第二个结果: 每个正整数可表示成四个整数的平方和, 这一结果的证明最终在 1770 年由 Lagrange 给出.

为了证明这些结果, 须作一些准备. 对任一素数 p, 设 $\mathbb{Z}_p=\{0,1,\cdots,p-1\}$, $\mathbb{Z}_p$ 关于模 p 的加法与乘法是域, 从而 $\mathbb{Z}_p^+=\{1,2,\cdots,p-1\}$ 是乘法群. [事实上, 它是循环群, 但不需要如此强的性质. 见习题 1.6 (i).] 称数 a 为 p 的一个**平方剩余**, 若对某 $z\in\mathbb{Z}_p$,

$$a\equiv z^2 \pmod p.$$

定义 1.9　设 p 是素数, 且 $a\in\mathbb{Z}_p^+$. **Legendre 符号** $\left(\dfrac{a}{p}\right)$ 定义为

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}+1, & a \text{ 是 } p \text{ 的一个平方剩余},\\ -1, & \text{其他}.\end{cases}$$

引理 1.10　设 p 是素数, 且 $a\in\mathbb{Z}_p^+$, 则

$$(p-1)!\equiv-\left(\frac{a}{p}\right)a^{(p-1)/2}\pmod p. \tag{1.1}$$

证明　因为对每个 $c\in\mathbb{Z}_p^+=\{1,\cdots,p-1\}$, 方程 $cz\equiv a \pmod p$ 有唯一解, 所以对每个 $i\in\mathbb{Z}_p^+$ 可指派唯一的 $j\in\mathbb{Z}_p^+$, 使得 $i\cdot j\equiv a \pmod p$.

如果 a 不是 p 的平方剩余, 那么 $i\neq j$. 从而恰存在 $(p-1)/2$ 对 $i,j\in\mathbb{Z}_p^+$, 使得 $i\cdot j\equiv a$. 因此, 由 $\left(\dfrac{a}{p}\right)=-1$ 得

$$(p-1)!=\prod_{i\in\mathbb{Z}_p^+}i\equiv-\left(\frac{a}{p}\right)a^{(p-1)/2}\pmod p.$$

另一方面, 如果对某个 $c\in\mathbb{Z}_p$, $a\equiv c^2 \pmod p$, 那么对 $c'\equiv -c$, 有 $cc'\equiv -a \pmod p$, 且 $\mathbb{Z}_p^+-\{c,c'\}$ 的元素可以划分成 $(p-3)/2$ 对 $\{i,j\}$, 使得 $i\cdot j\equiv a$. 因此, 由 $(a/p)=1$ 得

$$(p-1)! = cc' \cdot \prod_{\substack{i \in \mathbb{Z}_p^+ \\ i \neq c, c'}} i \equiv (-a) \cdot a^{(p-3)/2} \pmod p$$
$$= -\left(\frac{a}{p}\right) a^{(p-1)/2}.$$ □

如果在 (1.1) 中令 $a = 1$, 即得 Wilson 定理:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p. \tag{1.2}$$

推论 1.11 *-1 是素数 p 的平方剩余当且仅当 p 的形式为 $4m+1$.*

证明 在 (1.1) 中令 $a = -1$, 得

$$(p-1)! \equiv -\left(\frac{-1}{p}\right)(-1)^{(p-1)/2}.$$

因此, 由 (1.2) 知, -1 是 p 的平方剩余, 当且仅当 $(p-1)/2$ 是偶数时, 即 p 的形式为 $4m+1$. □

现在即可证明二平方和定理.

定理 1.12 (Euler, Fermat) *每个形如 $4m+1$ 的素数 p 可以表示成两个整数的平方和.*

证明 如果 p 是形如 $4m+1$ 的素数, 那么由推论 1.11 知, 存在一个整数 $0 \neq z < p$, 使得 $z^2 \equiv -1 \pmod p$. 易知

$$\mathbf{\Lambda} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y \equiv xz \pmod p\}$$

是平面中的格, 且 $\det \mathbf{\Lambda} = p$ (见习题 1.7 与习题 1.8).

设 C 是以原点为圆心以 $r = \sqrt{3p/2}$ 为半径的圆盘, 则

$$\operatorname{Vol} C = r^2 \pi = \frac{3\pi p}{2} > 4p = 2^2 \det \mathbf{\Lambda}.$$

于是, 由定理 1.7 知, 存在不同于原点的一点 $(x, y) \in \mathbf{\Lambda}$, 有

$$0 \neq x^2 + y^2 \equiv x^2 + x^2 z^2 \equiv 0 \pmod p.$$

因为 $x^2 + y^2$ 是严格在 0 和 $2p$ 之间的 p 的倍数, 所以 $x^2 + y^2$ 必等于 p. □

用同样的思想可得到四平方和定理.

定理 1.13 (Fermat, Lagrange) *每个正整数可表示成四个整数的平方和.*

证明 首先注意到, 只须证明每个素数可表示成四个整数的平方和. 事实上, 如果 $n = n_1 n_2$, 且

$$n_1 = x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + z_1^2, \quad n_2 = x_2^2 + y_2^2 + v_2^2 + z_2^2,$$

那么

$$
\begin{aligned}
n = &(x_1^2 + y_1^2 + v_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + v_2^2 + z_2^2) \\
= &(x_1x_2 - y_1y_2 - v_1v_2 - z_1z_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2 + v_1z_2 - z_1v_2)^2 \\
&+ (x_1v_2 - y_1z_2 + v_1x_2 + z_1y_2)^2 + (x_1z_2 + y_1v_2 - v_1y_2 + z_1x_2)^2 .
\end{aligned}
$$

因为 $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$, 所以仅须证明 p 为奇素数的情形. 注意到当 a (b) 在 $\mathbb{Z}_p$ 内变化时, a^2 $(-b^2 - 1)$ 恰好取到 $(p+1)/2$ 个不同的值. 因此可以选取 $a, b \in \mathbb{Z}$ 使得 $a^2 \equiv -b^2 - 1$, 即

$$a^2 + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod p.$$

现考虑 $\mathbb{R}^4$ 中的格

$$\mathbf{\Lambda} = \{(x, y, v, z) \in \mathbb{Z}^4 \mid v \equiv ax + by, z \equiv bx - ay \pmod p\}.$$

易知 $\det \mathbf{\Lambda} = p^2$. 用 C 表示半径为 $r = \sqrt{1.9p}$ 的 4 维球, 则有

$$\mathrm{Vol}\, C = \frac{r^4\pi^2}{2} = \frac{(1.9)^2\pi^2}{2} p^2 > 2^4 \det \mathbf{\Lambda}.$$

因此, 由定理 1.7 知, 存在一点 $(x, y, v, z) \in \mathbf{\Lambda}$, 满足

$$0 \neq x^2 + y^2 + v^2 + z^2 \leqslant r^2 < 2p .$$

另一方面, 对模 p 有

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + v^2 + z^2 &\equiv x^2 + y^2 + (ax + by)^2 + (bx - ay)^2 \\
&\equiv (x^2 + y^2)(a^2 + b^2 + 1) \equiv 0.
\end{aligned}
$$

因此, $x^2 + y^2 + v^2 + z^2 = p$. □

习　题

1.1　设 P 是 $\mathbb{R}^d$ 中的任一非退化的平行体, 它的所有顶点属于格 $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(u_1, \cdots, u_d)$. 证明如果 P 除其顶点外不含 $\mathbf{\Lambda}$ 的格点, 那么 P 是 $\mathbf{\Lambda}$ 的一个基本平行体. 也就是说, 设 $v_1, \cdots, v_d$ 表示 P 的与其一固定顶点 x 关联且指向外侧的边, 则 $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(v_1, \cdots, v_d)$.

1.2　利用 Minkowski 定理证明, 对任一无理数 α, 存在无穷多个整数对 (m, n), 使得

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

1.3 设 C 是一个单位周长的圆, $\alpha > 0$ 是无理数. 证明长度为 α 的无穷多个连续弧的端点形成 C 的边界上的一个**处处稠密**的子集 (即每个正长度的弧至少包含一个端点).

1.4 用定理 1.8 推导定理 1.7.

1.5 (Minkowski, 1896) 设 $l_i(n_1, n_2, \cdots, n_d) = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} n_j$ 是 d 个变量的实线性形式 $(1 \leqslant i \leqslant d)$, $D = |\det(a_{i,j})| > 0$. 证明对满足 $\prod_{i=1}^{d} b_i \geqslant D$ 的任意正实数 b_i $(1 \leqslant i \leqslant d)$, 可以找到适当的整数 n_i, 使得这些整数不全为零, 且对 $1 \leqslant i \leqslant d$, 有 $|l_i(n_1, n_2, \cdots, n_d)| \leqslant b_i$.

1.6 设 p 是素数.

(i) 证明 $\mathbb{Z}_p^+$ 是一个**乘法循环群** (即对某 $a \in \mathbb{Z}_p^+$, 对模 p 有 $\mathbb{Z}_p^+ = \{a, a^2, \cdots, a^{p-1}\}$);

(ii) 由 (i) 推导, 如果 p 的形式为 $4m+1$, 那么 -1 是 p 的一个平方剩余.

1.7 称集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ 为**离散的**, 如果每个球仅含 X 的有限多个元素. 证明 $\mathbb{R}^d$ 的可加子群是格, 当且仅当它是离散的且含 d 个线性无关的向量.

1.8 设 $\mathbf{\Lambda}$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 的指标为 $k < \infty$ 的可加子群. 证明 $\mathbf{\Lambda}$ 是满足 $\det \mathbf{\Lambda} = k$ 的格 (一个子群 $H \subseteq G$ 的**指标**是指商群 G/H 的元素个数).

1.9 证明并非每个整数都是三个平方数的和.

1.10 证明关于 Legendre 符号的如下乘法规则. 对任一素数 p 和 $a, b \in \mathbb{Z}_p^+$, 有

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right).$$

第 2 章　凸体的多边形逼近

在几何学中 (精确地或近似地) 计算一个区域的面积与周长是最古老且最困难的问题之一. 一种常规的方法是用多边形逼近该区域, 这一方法至少可追溯到阿基米德时代. 本章给出最佳逼近的一些十分有用的正则性性质 (Dowker 定理); 还要说明, 从用内接多边形逼近的角度看, 椭圆是最坏可能的凸区域; 最后, 表述 Elekes 的一个简洁的论证, 解释为什么估计高维凸体的体积十分困难.

2.1　Dowker 定理

设 C是平面上的一个凸体. 对每个 $n \geqslant 3$, 考虑 C 的外切 n 边形的最小可能面积. 下面这个很有用的 Dowker 定理 (Dowker, 1944) 表明, 这些面积值形成一个**凸**序列. 更确切地说, 有

定理 2.1 (Dowker)　给定平面上一个凸体 C, $n \geqslant 3$, 设 P_n 表示 C 的面积最小的外切 n 边形. 设 $A(P_n)$ 表示 P_n 的面积. 则对每个 $n \geqslant 4$, 有

$$A(P_n) \leqslant \frac{A(P_{n-1}) + A(P_{n+1})}{2}.$$

证明　在证明过程中对多边形的边与该边所在直线的记法不加区分. 若 a 与 b 是 P_{n-1} 的按顺时针方向相邻的两条边, 则定义 $cap(a, b)$为由 a, b 和 C 的边界界定的区域 (图 2.1). 由鸽笼原理知, 存在 P_{n-1} 的两条相邻边 a 与 b 及 P_{n+1} 的两条相邻边 s 与 t, 使得 $cap(s, t) \subset cap(a, b)$.

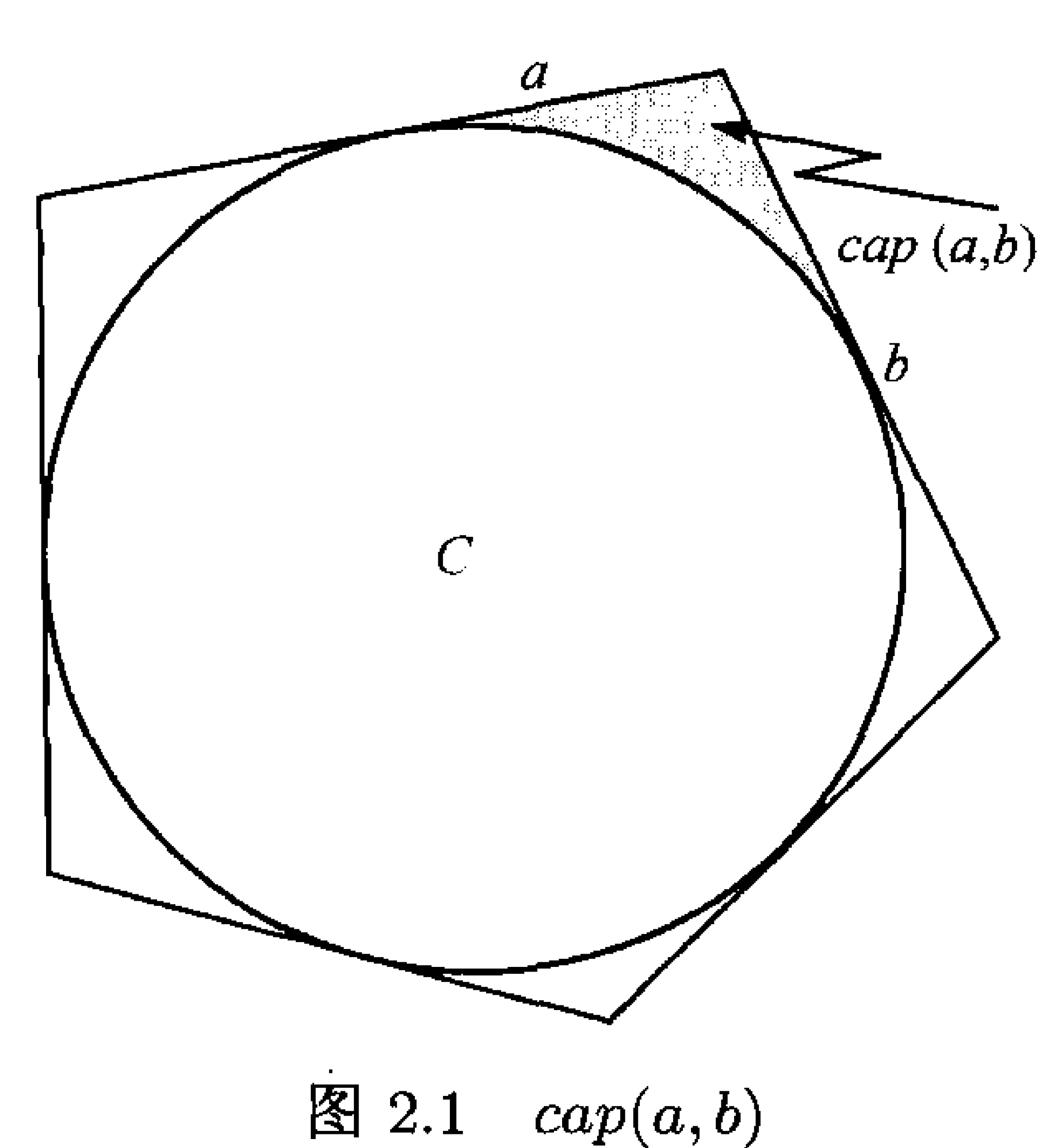


图 2.1　$cap(a, b)$

设 Q 表示一多边形, 其 $2n$ 条边 (按顺时针方向) 是

$$\underbrace{b, \ \cdots, \ a}_{P_{n-1}\text{的边}}, \underbrace{t, \ \cdots, \ s}_{P_{n+1}\text{的边}},$$

即 Q 可以通过从 a 到 t 的"转换"得到, 从而连接 P_{n-1} 与 P_{n+1} 形成一个单一多边形. 显然 Q 是自交的, 但在每一点 Q 的联结数至多为 2 (粗略地说, 这意味 Q 绕 C 跑两次). 称这样的多边形为**双星**. 自然可定义 Q 的多重面积为 $A(Q)$, 即由 Q 围成的联结数是 2 的区域计及两次 (图 2.2). 因此

$$A(Q) = A(P_{n-1}) + A(P_{n+1}) - A(T),$$

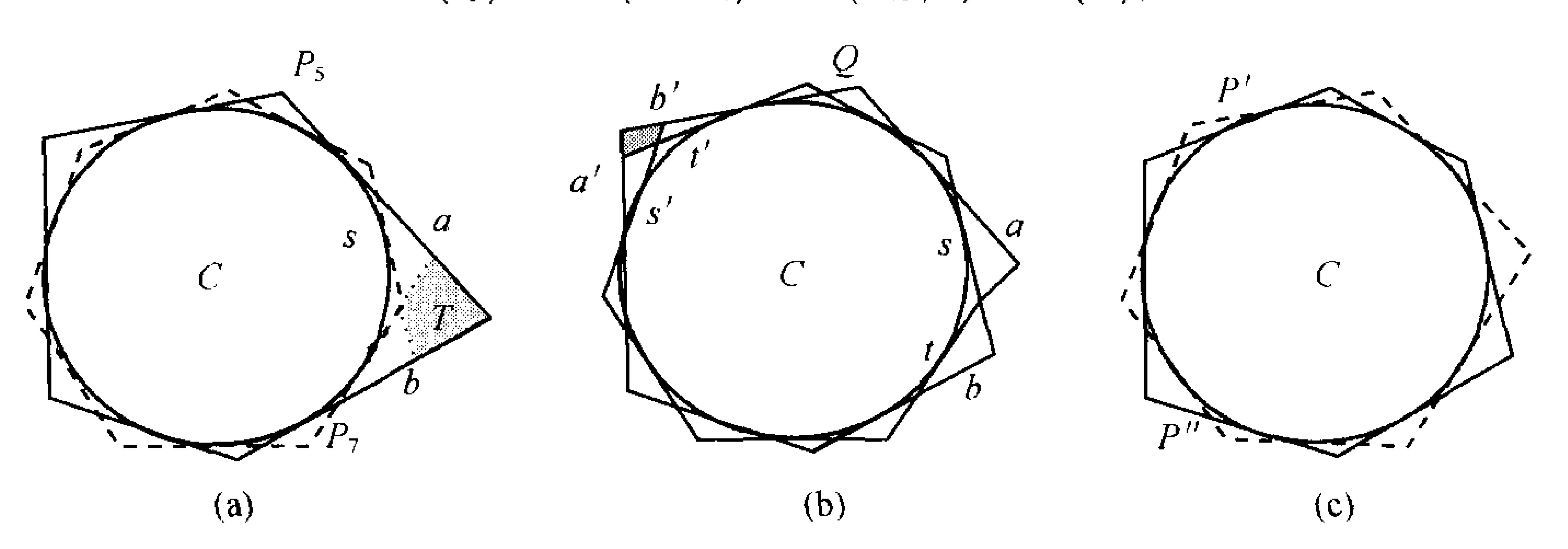


图 2.2 (a) 多边形 P_{n-1}, P_{n+1}, (b) 双星多边形 Q, (c) 多边形 P', P''

其中, T 是图 2.2(a) 中的阴影区域. 从而

$$A(Q) \leqslant A(P_{n-1}) + A(P_{n+1}).$$

易知 Q 仍有两对相邻边使得 $cap(s',t') \subset cap(a',b')$. 仿上作同样的"转换", 得到两个简单多边形 P' 和 P'', 它们总的面积至多为 $A(Q)$. 如果 P' 和 P'' 是 n 边形, 那么得到

$$2A(P_n) \leqslant A(P') + A(P'') \leqslant A(Q) \leqslant A(P_{n-1}) + A(P_{n+1}),$$

从而定理结论成立. 否则, P' 与 P'' 之中一个多边形 (如 P') 有一个冠严格包含于另一个多边形 (P'') 的某个冠之中. 继续上述步骤, 首先得到一个双星 Q', 使得 $A(Q') \leqslant A(P') + A(P'')$, 继而得到两个凸多边形, 其总面积至多为 $A(Q')$. 因为在每一步中一个冠包含于另一个冠的这种冠的对数逐次减少, 所以经过有限步算法终止. 于是得到两个外切 n 边形, 它们的总面积至多为 $A(P_{n-1}) + A(P_{n+1})$. □

评注 2.2 P_{n-1} 和 P_{n+1} 共有 $2n$ 条边. 将这 $2n$ 条边按其接触 C 的边界的环形顺序排成一列 $s_1, s_2, \cdots, s_{2n}$. 上述定理的讨论表明, 由 $s_1, s_3, \cdots, s_{2n-1}$ 和 $s_2, s_4, \cdots, s_{2n}$ 界定的两个 n 边形的面积之和至多为 $A(P_{n-1}) + A(P_{n+1})$. 而且, 算法

总是终止于这两个多边形.

下述“对偶”命题也成立.

定理 2.3 给定平面上一个凸体 $C, n \geqslant 3$, 设 p_n 表示内接于 C 的面积最大的 n 边形, 则对每个 $n \geqslant 4$, 有

$$A(p_n) \geqslant \frac{A(p_{n-1}) + A(p_{n+1})}{2}.$$

用与定理 2.1 中几乎同样的推理可以建立上述定理, 证明留给读者. 对于周长可以证明类似的结果.

定理 2.4 (Molnár, 1955; L. Fejes Tóth, 1959a) 设 C 是平面上一个凸体, $n \geqslant 3$. 设 Q_n (q_n) 表示外切于 (内接于) C 的周长最小 (最大) 的 n 边形. 则对每个 $n \geqslant 4$, 有

$$\mathrm{Per}(Q_n) \leqslant \frac{\mathrm{Per}(Q_{n-1}) + \mathrm{Per}(Q_{n+1})}{2},$$
$$\mathrm{Per}(q_n) \geqslant \frac{\mathrm{Per}(q_{n-1}) + \mathrm{Per}(q_{n+1})}{2}.$$

利用评注 2.2 易知, 仿照定理 2.1 的证明可得

定理 2.5 设 C 是平面上一个中心对称的凸体, $n \geqslant 4$ 是一偶数, 则存在外切于 C 的面积最小的多边形 P_n 和周长最小的多边形 Q_n, 它们都是中心对称的, 且与 C 有相同的中心.

类似地, 存在内接于 C 的面积最大的多边形 p_n 和周长最大的多边形 q_n, 它们都是中心对称的, 且与 C 有相同的中心.

证明 仅就面积最小的外切 n 边形的情形证明 (其他情形可类似处理). 不妨假设 C 的中心是原点, 且 P_n 是外切于 C 的面积最小的 n 边形, 则 $-P_n$ 是具有同样性质的另一个 n 边形. 将 P_n 和 $-P_n$ 的 $2n$ 条边按它们与 C 的边界接触的环形顺序排成一列 $s_1, s_2, \cdots, s_{2n}$, 如前所述, 由 $s_1, s_3, \cdots, s_{2n-1}$ 与 $s_2, s_4, \cdots, s_{2n}$ 所界定的 n 边形面积之和至多为

$$A(P_n) + A(-P_n) = 2A(P_n).$$

然而, 这两个 n 边形都是中心对称的. 因此它们中至少有一个面积至多为 $A(P_n)$. □

这一结果的推广见习题 2.2.

2.2 椭圆的一个极值性质

Sas(1939) 的下述定理推广了 Blaschke (1923) 的一个结果. 粗略地说, 它断定从以面积最大的内接多边形逼近的角度看, 最坏可能的凸体是椭圆.

定理 2.6 (Sas) 给定平面上一个凸体 C, $n \geqslant 3$, 设 p_n 表示一个内接于 C 的面积最大的 n 边形, 则

$$A(p_n) \geqslant A(C)\frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n},$$

等号成立当且仅当 C 是一个椭圆.

证明 不妨假设 C 的直径是 2, 选取一个坐标系 (x, y), 使得点 $(-1, 0)$ 和 $(+1, 0)$ 属于 C. 用如下方式给出 C 的边界的参数方程

$$x(\phi) = \cos\phi, \tag{2.1}$$

$$y(\phi) = g(\phi)\sin\phi, \tag{2.2}$$

其中 $g(\phi) > 0$ 是一个周期为 2π 的连续函数. 令

$$\phi_1 = \phi, \quad \phi_2 = \phi + \frac{2\pi}{n}, \quad \phi_3 = \phi + 2\frac{2\pi}{n}, \quad \cdots, \quad \phi_n = \phi + (n-1)\frac{2\pi}{n},$$

设 $p_n^\star(\phi)$ 表示内接 n 边形, 其顶点集为

$$\{(x(\phi_i), y(\phi_i))|1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

显然,

$$\begin{aligned} A[p_n^\star(\phi)] &= \sum_{i=1}^{n} A\left[\varDelta\Big(0,\, 0\Big)\Big(x(\phi_i),\, y(\phi_i)\Big)\Big(x(\phi_{i+1}),\, y(\phi_{i+1})\Big)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(g(\phi_{i+1})\sin\phi_{i+1}\cos\phi_i - g(\phi_i)\sin\phi_i\cos\phi_{i+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}g(\phi_i)\sin\phi_i(\cos\phi_{i-1} - \cos\phi_{i+1}) \\ &= \sin\frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\phi_i)\sin^2\phi_i \end{aligned}$$

($\phi_{n+1} = \phi_1$, $\triangle abc$ 表示顶点为 a, b, c 的三角形). 因此,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A[p_n^\star(\phi)]\mathrm{d}\phi &= \frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n}\int_0^{2\pi} g(\phi)\sin^2\phi\mathrm{d}\phi \\ &= A(C)\frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n} \quad (\text{见习题 } 2.6). \end{aligned}$$

对于适当选取的 ϕ, $A[p_n^\star(\phi)]$ 不小于它的平均值, 如此即得定理的第一部分. 等号成立情形的讨论留给读者 (见习题 2.7). □

评注 2.7 似乎可想当然地认为, 对于外切多边形 (多胞形) 类似的陈述也正确. 然而, 事实却并非如此. 例如, 简单的计算表明, 一个单位正方形的外切三角形

的最小可能面积严格大于含面积为 1 的圆的三角形的最小面积. 不过, 可以证明一个稍弱一点的结论, 它建立了一个凸体 C 的内接和外切 n 边形最佳逼近之间的联系.

定理 2.8 (Lázár, 1947) 设 C 是平面上一个凸体, $n \geqslant 3$, 则存在 C 的一个外切 n 边形 P_n 和 C 的一个内接 n 边形 p_n, 使得

$$\frac{A(P_n)-A(p_n)}{A(P_n)} \leqslant \sin^2\frac{\pi}{n}.$$

若 C 是椭圆, 则此界是紧的.

Schneider (1967, 1971) 证得, 从最大周长的内接多边形 (最小周长的外切多边形) 逼近的角度看, 最坏可能的凸体是椭圆. 更确切地说, 下述定理成立.

定理 2.9 (Schneider) 设 C 是平面上一个凸体, $n \geqslant 3$. 设 Q_n (q_n) 表示外切 (内接) 于 C 的周长最小 (最大) 的 n 边形, 则

$$\mathrm{Per}\,(Q_n) \leqslant \mathrm{Per}\,(C)\frac{n}{\pi}\tan\frac{\pi}{n},$$
$$\mathrm{Per}\,(q_n) \geqslant \mathrm{Per}\,(C)\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}.$$

若 C 是椭圆, 则两个不等式中的等号成立.

2.3 凸体的多胞形逼近

Macbeath (1951) 将定理 2.6 推广到了高维情形.

定理 2.10 (Macbeath) 设 C 是 $\mathbb{R}^d$ 中一凸体, B^d 表示满足 $\mathrm{Vol}\,(B^d)=\mathrm{Vol}\,(C)$ 的球, 则 C 包含一个顶点数为 n 的凸多胞形, 其体积不小于内接于 B^d 的顶点数为 n 的多胞形的最大体积.

遗憾的是, 因为很难估计内接于 d 维球的 n 个顶点的最大多胞形的体积, 所以此结果没有类似于定理 2.6 中不等式的数量表示. 如果与 d 相比 n 不是太大, 那么下面 Elekes (1986) 的巧妙论证提供了一个非平凡上界.

定理 2.11 (Elekes) 设 p_n^d 表示内接于 d 维球 B^d 具有 n 个顶点的凸多胞形, 则

$$\mathrm{Vol}\,(p_n^d) \leqslant \mathrm{Vol}\,(B^d)\frac{n}{2^d}.$$

证明 设 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是 p_n^d 的顶点, c 是 B^d 的中心. 记直径为 cv_i 的球为 B_i. 显然, 对 $1 \leqslant i \leqslant n$, 有 $\mathrm{Vol}(B_i)=\mathrm{Vol}(B^d)/2^d$. 证明

$$p_n^d \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i,$$

由此即知定理成立.

用反证法. 假设某 $u \in p_n^d$ 不能被任何 (闭) 球 B_i 覆盖. 则对每个 i, 角 $cuv_i < \pi/2$. 这表明每个顶点 v_i 落在过 u 且垂直于 cu 的超平面界定的开半空间内. 因此, u 不可能包含于 p_n^d $(v_1, \cdots, v_n$ 的凸包), 矛盾. □

Elekes 定理有一些有趣的算法结果. 由该定理可直接推知, 在下述计算模型下, 对 d 维凸体 C 的体积精确到一个常数因子的估计, 不存在多项式时间算法.

设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个凸体. 假设算法可使用一个**预示器**. 该预示器能在单位时间内回答一个给定的点 u 是否包含于 C. 由于技术上的原因, 还假设预示器能预先给出两个同心球 B 和 B', 使得 $B \subseteq C \subseteq B'$.

推论 2.12　*设 $0 < \gamma < 1$ 是固定的, $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个凸体. 假设利用上述预示器的一个算法可以确定一个数 V, 使得*

$$\gamma V \leqslant \mathrm{Vol}\,(C) \leqslant V,$$

则此算法的时间复杂度至少为 $\gamma 2^d - d - 1$.

证明　设 $v_1, v_2, \cdots, v_{d+1}$ 是内接于 B' 的一个正则单纯形的顶点, B 是内切于此单纯形的球. 假设对每个 $1 \leqslant i \leqslant d+1$, 有 $v_i \in C$. 进一步假设每当问预示器是否有 $u \in C$ 时, 答案是 "是", 当且仅当 $u \in B'$.

询问预示器 k 次后, 得到的是 C 的至多 $k+d+1$ 个点的集合 S, 且 C 可以和这些点的凸包一样小. 另一方面, 不能排除 $C = B'$ 的可能性. 因此, 如果经过 k 步后能找到一个数 V 满足要求, 那么

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{conv}\, S)}{\mathrm{Vol}\,(B')} \geqslant \gamma.$$

因为由 Elekes 定理, 知

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{conv}\, S)}{\mathrm{Vol}\,(B')} \leqslant \frac{k+d+1}{2^d},$$

从而推得 $k \geqslant \gamma 2^d - d - 1$. □

这方面的进一步结果见 (文献 Bárány, Füredi, 1987; Dyer, Frieze, 1988; Dyer et al., 1991; Lovász, Simonovits, 1990; Khachiyan, 1993; Appelgate, Kannan, 1991).

习　题

2.1　证明定理 2.4.

2.2 (Fejes Tóth et al., 1973a)　设 C 是一个k **重旋转对称**的凸体, 即设 C 围绕 O 旋转角 $2\pi/k$ 后回到它自身. 证明, 对任一可被 k 整除的整数 n, 外切于 (内接

于) C 的面积最小 (最大) 的 n 边形的集合包含一个 k 重旋转对称的元素. 对周长有类似的结论.

2.3　如果将中心对称换成轴对称, 定理 2.5 仍然成立吗?

2.4 (Eggleston, 1957a, 1957b; G. Fejes Tóth, 1972, 1977a)　设 $0 < w < 1$ 是固定的. D 与 C 的 **(加权) 面积离差**定义为

$$\mathrm{dev_A}\,(C, D) \;=\; wA(C-D)+(1-w)A(D-C)\,,$$

其中 $C-D$ 是 C 中不属于 D 的点构成的集合. 设 C 是平面上的严格凸体, 且 Q_n 是与 C 的面积离差最小的凸 n 边形. 证明:

(i) Q_n 的每条长度为 ℓ 的边被 C 的边界划分成三个长度分别为 $\dfrac{w}{2}\ell$, $(1-w)\ell$ 和 $\dfrac{w}{2}\ell$ 的线段;

(ii) 如果 C 是一个圆盘, 那么 Q_n 是一个正 n 边形;

(iii) 如果 C 是一个圆盘, 那么对每个 $n \geqslant 4$,

$$\mathrm{dev_A}\,(C, Q_n) \leqslant \frac{\mathrm{dev_A}\,(C, Q_{n-1})+\mathrm{dev_A}\,(C, Q_{n+1})}{2};$$

(iv)* 上述不等式对任一凸体 C 成立.

2.5 (Eggleston, 1957a, 1957b)　两个凸体 C 和 D 的**周长离差**定义为

$$\mathrm{dev_P}\,(C, D) = \mathrm{Per}\,(C\cup D) - \mathrm{Per}\,(C\cap D).$$

设 q_n 表示一个与 C 的周长离差最小的凸 n 边形. 证明:

(i) q_n 内接于 C;

(ii) 对每个 $n \geqslant 4$, 有

$$\mathrm{dev_P}\,(C, q_n) \leqslant \frac{\mathrm{dev_P}\,(C, q_{n-1})+\mathrm{dev_P}\,(C, q_{n+1})}{2}.$$

2.6　利用定理 2.6 证明中的记法证明:

$$\int_0^{2\pi} g(\phi)\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi = A(C).$$

2.7　证明如果定理 2.6 中的等式成立, 那么 C 是一个椭圆.

2.8　设 C 是平面上的一个凸体, $n \geqslant 3$. 不得使用定理 2.9, 证明存在外切于 C 的 n 边形 Q_n 和内接于 C 的 n 边形 q_n, 使得

$$\frac{\mathrm{Per}\,(Q_n)-\mathrm{Per}\,(q_n)}{\mathrm{Per}\,(Q_n)} \leqslant 2\sin^2\frac{\pi}{2n}.$$

若 C 是一个椭圆, 则上式中的等号成立.

2.9 (Elekes, 1986)　设 $1/2 < \gamma < 1$ 是固定的, $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 是凸体. 假设用到推论 2.12 中的预示器的算法可以确定一个数 W, 使得

$$\gamma W \leqslant \text{width}\,(C) \leqslant W.$$

则该算法的运行时间至少为 $\frac{1}{2}(2\gamma)^d - d - 1$ [C 的**宽度 width(C)**是指支撑 C 的两个平行超平面间的最小距离].

2.10 (Bárány-Füredi, 1987)

(i) 设 S 是内接于单位球 $B^d \subseteq \mathbb{R}^d$ 的单纯形, k 是整数, $0 \leqslant k < d$. 证明对任一点 $x \in S$, 存在一个 k 维面 F_x^k 和一点 $y_x \in F_x^k$, 使得 $x - y_x$ 与 F_x^k 正交, 且 $|x - y_x| \leqslant \sqrt{(d-k)/(dk)}$.

(ii) 设 p_n^d 表示有 $n \leqslant d^\alpha$ 个顶点 (对某固定的 $\alpha > 0$) 的内接于单位球 $B^d \subseteq \mathbb{R}^d$ 的凸多胞形. 证明若 d 充分大, 则

$$\text{Vol}\,(p_n^d) \leqslant \text{Vol}\,(B^d) \left(\frac{10\alpha \ln d}{d}\right)^{d/2}.$$

第 3 章　全等凸体形成的填装与覆盖

正如前面所见到的 (推论 1.4), 容易证明, 全等圆盘形成的任何格填装 $\mathcal{C}$ 的密度 (即平面被 $\mathcal{C}$ 中的元素覆盖的部分所占比例) 至多为 $\pi/\sqrt{12}$. 在 1892 年举行的斯堪的纳维亚自然科学大会上, Thue 在他的报告中将这一结果推广到全等圆盘形成的任何填装上. 换句话说, 他证明了全等圆盘形成的最稠密填装必具有格填装的特征. Thue 定理及其关于覆盖的对偶命题 (1939 年由 Kershner 确立), 直到 20 世纪 50 年代 L. Fejes Tóth 发现了其意义深远的推广之后才得到广泛关注. 他的有重大影响的专著 L. Fejes Tóth(1953) 奠定了一个内容丰富的学科 —— 填装与覆盖理论的基础. 本章的目的是介绍这一理论的基本概念, 并阐述以上结果到任意凸体形成的填装与覆盖上的若干推广.

3.1　凸体形成的填装

下面给出以下 5 章中常用的一些基本定义与记法.

定义 3.1　设 $\mathcal{C}=\{C_1,C_2,\cdots\}$ 是平面上的一个由凸体组成的集族, D 是一区域. 如果 $\bigcup_i C_i \supseteq D$, 则称 $\mathcal{C}$ 为 D 的一个**覆盖**. 反过来, 如果 $\bigcup_i C_i \subseteq D$ 且其中任意两个凸体无公共内点, 则称 $\mathcal{C}$ 为 D 中的一个**填装**.

如果 D 为有界区域, 则定义集族 $\mathcal{C}$ 关于 D 的**密度**为

$$d(\mathcal{C},D)=\frac{\sum\limits_i A(C_i)}{A(D)},$$

其中的和取遍所有使 $C_i\cap D\neq\varnothing$ 的 i. 如果 D 是全平面, 则定义**上、下密度** $\overline{d}$, $\underline{d}$ 如下. 设 $D(r)$ 表示以固定点 O (原点) 为圆心, r 为半径的圆盘, 令

$$\overline{d}(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)=\lim_{r\to\infty}\sup d(\mathcal{C},D(r)),$$
$$\underline{d}(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)=\lim_{r\to\infty}\inf d(\mathcal{C},D(r)).$$

如果这两个数相同, 则称此数为平面上集族 $\mathcal{C}$ 的**密度**, 记为 $d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)$.

注意 $\overline{d}(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)$, $\underline{d}(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)$, 从而 $d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)$ 与原点 O 的选择无关 (见习题 3.1).

19 世纪末, Thue (1892, 1910) 证明了平面中全等圆盘形成的填装 $\mathcal{C}$ 的 (上) 密

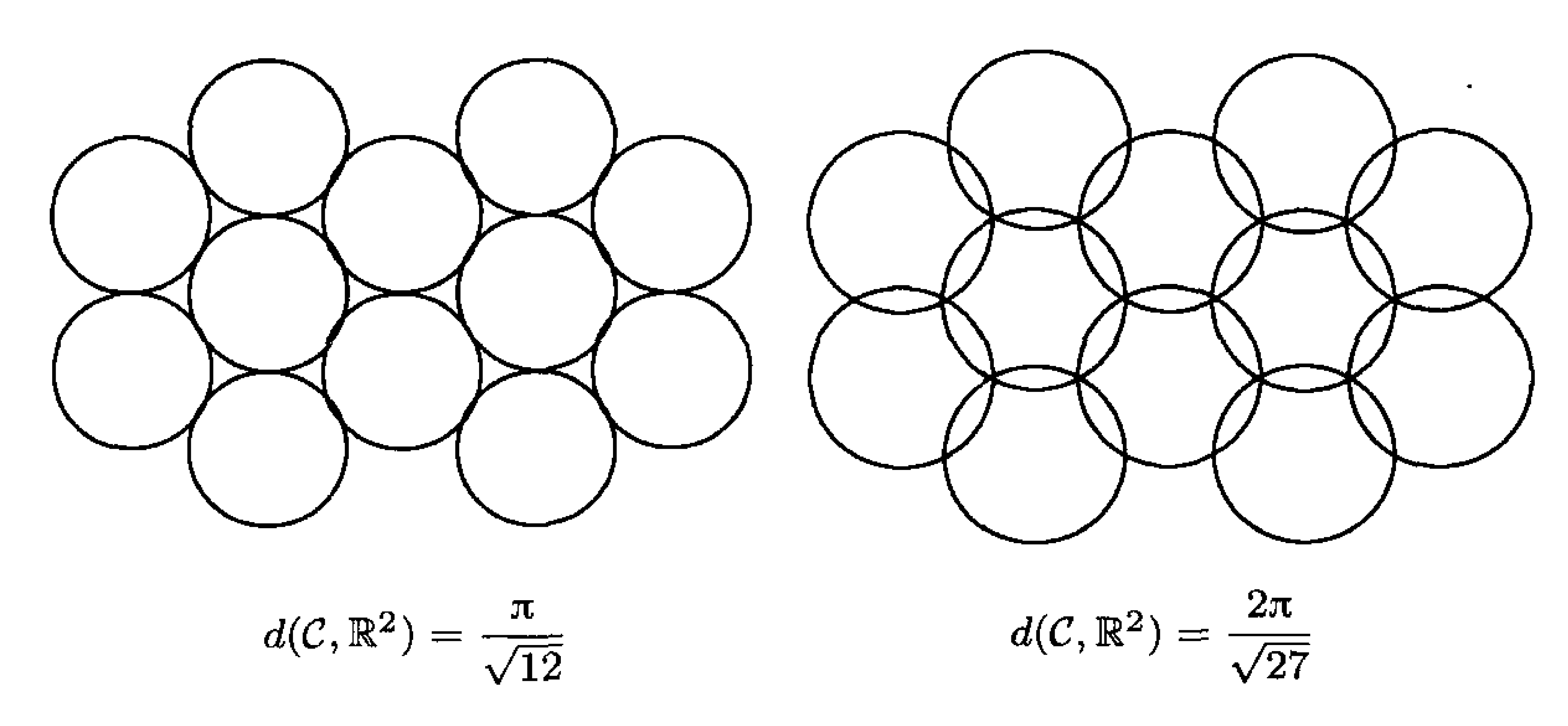
度至多为 $\pi/\sqrt{12}\approx 0.907$. 也就是说,

$$\overline{d}(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

有关此定理的对偶命题是很多年后由 Kershner (1939) 证明的. 他证明了平面的全等圆盘覆盖 $\mathcal{C}$ 的 (下) 密度至少为 $2\pi/\sqrt{27}\approx 1.209$, 即

$$\underline{d}(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)\geqslant\frac{2\pi}{\sqrt{27}}.$$

这两种界均可由适当的格配置达到 (图 3.1).



$d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)=\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ $\qquad$ $d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)=\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$

图 3.1 全等圆盘构成的最稠密的填装和最稀疏的覆盖

由下面的 L. Fejes Tóth (1950) 定理可导出 Thue 的结果的相当深远的推广. 这里给出的证明依据的是第 2 章中讨论到的 Dowker (1944) 定理.

定理 3.2 (L. Fejes Tóth) *设 H 为凸六边形, C 为凸体, P_6 表示外切于 C 的面积最小的六边形. 如果 C 的 n 个(不交叠的)全等拷贝填装 H, 则*

$$n\leqslant\frac{A(H)}{A(P_6)}.$$

我们需要下面的技术性引理, 该引理是**Euler 多面体公式**的简单推论. 更确切地说, 将利用这样一个事实, 即每一个顶点数为 n 的平面图至多有 $3n-6$ 条边.

引理 3.3 *设 $C_1,\cdots,C_n$ 为排列在凸六边形 H 内的 n 个不交叠的凸体, 则存在 n 个不交叠的凸多边形 $R_1,\cdots,R_n\subseteq H$, 使得对每一个 i 有 $R_i\supseteq C_i$, 且*

$$\sum_{i=1}^{n}s_i\leqslant 6n,$$

其中 s_i 表示 R_i 的边数.

证明 首先在 H 中扩张 C_i, 使它们保持凸性且内部不交. 显然, 当其中任何一个都不能再扩张时所有的扩张集 $R_i \supseteq C_i$ 为凸多边形. 注意这些扩张集并不一定填满 H. 为简单起见, 假定任意两个集合 R_i, R_j 不相交或有一条公共边界线段 (一般情况可类似处理). 构造一个顶点数为 $n+1$ 的平面图, $n+1$ 个顶点对应于 $R_1, \cdots, R_n$ 和 $\overline{H}$ (H 的补图), 两个顶点之间有一条边, 当且仅当对应的面相互接触. 如果 e 表示该图的边数, 则

$$3(n+1)-6 \geqslant e \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} s_i + q - 6\right),$$

其中 q 表示 H 的边界上属于至少两个 R_i 的点数. 由此即得引理, 更详细的论证参见文献 (Cassels, 1959; Heppes, 1964; Edelsbrunner et al., 1990). □

定理 3.2 的证明 假设 $C_1, \cdots, C_n$ 为凸体 C 的 n 个全等拷贝, 它们构成 H 的填装, 对 $1 \leqslant i \leqslant n$, 令 $R_i \supseteq C_i$ 为上面构作的多边形. 又设 P_s 表示外切于 C 的面积最小的 s 边形, 则有

$$A(H) \geqslant \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} A(P_{s_i}).$$

另一方面, 由定理 2.1, 存在单调递减的凸函数 $a(x)$, 使得对任意整数 $s \geqslant 3$ 有 $a(s) = A(P_s)$. 因此, 由 Jensen 不等式和引理 3.3, 得

$$\sum_{i=1}^{n} A(P_{s_i}) = \sum_{i=1}^{n} a(s_i) \geqslant n \cdot a\left(\sum_{i=1}^{n} s_i \Big/ n\right) \geqslant n \cdot a(6). \qquad \square$$

换句话说, 定理 3.2 表明, 凸六边形 H 的任何由 C 的全等拷贝构成的填装 $\mathcal{C}$ 的密度

$$d(\mathcal{C}, H) \leqslant \frac{A(C)}{A(P_6)}.$$

由此立即可得平面的填装密度的相同的上界 (见习题 3.3).

推论 3.4 *给定平面的由凸体 C 的全等拷贝构成的填装 $\mathcal{C}$, 则有*

$$\overline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \leqslant \frac{A(C)}{A(P_6)},$$

其中 P_6 表示外切于 C 的面积最小的六边形.

特别地, 如果 C 为圆盘, 则 P_6 为外切于 C 的正六边形. 因此

$$\overline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{12}},$$

此即上面提到的 Thue 定理.

陈述定理 3.2 的另一个重要结果之前, 必须引入一些记法. 如前所述, 对于平面上任何格 $\mathbf{\Lambda}$ 及任何凸体 C, 称 C 的平移集族 $\mathcal{C}=\{C+u \mid u\in\mathbf{\Lambda}\}$ 为**格配置**. 另外, 如果 $\mathcal{C}$ 为填装 (覆盖), 则称之为**格填装** (**格覆盖**).

定义 3.5 给定任一凸体 $C\subseteq\mathbb{R}^2$, 设

$$\delta(C)=\sup_{\mathcal{C}\text{填装}}\overline{d}(\mathcal{C},\mathbb{R}^2),$$

$$\delta_L(C)=\sup_{\substack{\mathcal{C}\text{格}\\ \text{填装}}}\overline{d}(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)=\sup_{\substack{\mathcal{C}\text{格}\\ \text{填装}}}d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2),$$

其中上确界取遍平面上所有由 C 的全等拷贝构成的填装 (格填装). 显然, $\delta_L(C)\leqslant\delta(C)$.

不难证明 (习题 3.2),

$$\delta(C)=\max_{\mathcal{C}\text{填装}}d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2),$$

$$\delta_L(C)=\max_{\substack{\mathcal{C}\text{格}\\ \text{填装}}}d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2),$$

其中最大值取遍所有由 C 的全等拷贝构成的填装 (格填装), 它们的密度均存在.

推论 3.6 设 C 为平面上中心对称的凸体. 则 $\delta(C)=\delta_L(C)$.

证明 由推论 3.4, $\delta(C)\leqslant A(C)/A(P_6)$. 根据定理 2.5, 可选 P_6 为中心对称. 图 3.2 表明, 利用中心对称凸六边形 (P_6) 的平移很容易以类似格的形式铺砌全平面. 如果在此铺砌的每一个胞腔中内接 C 的一个平移, 则可得平面的格填装, 其密度显然为 $A(C)/A(P_6)$. 因此 $\delta_L(C)\geqslant A(C)/A(P_6)\geqslant\delta(C)$. □

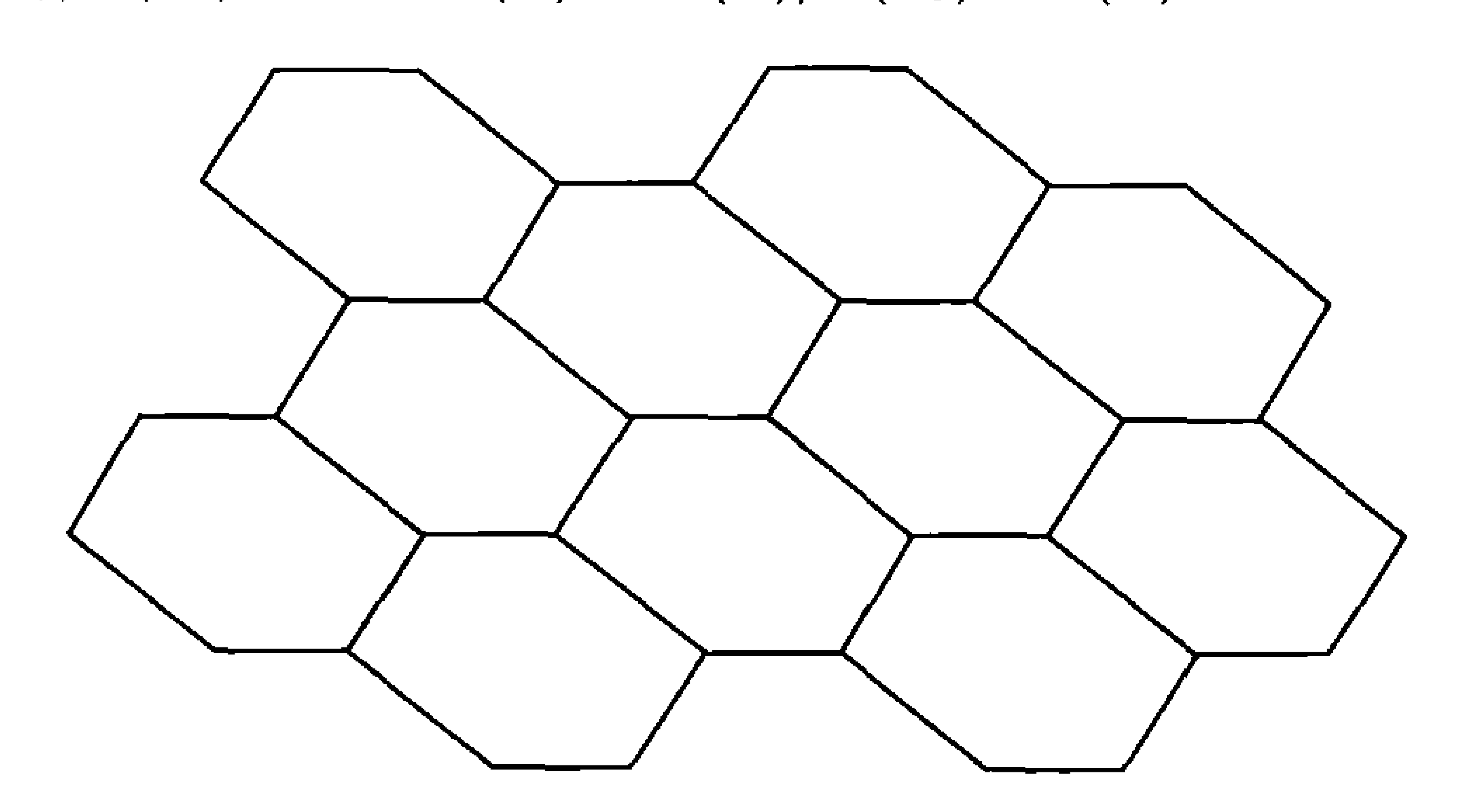


图 3.2 用中心对称的六边形铺砌全平面

对定理 3.2 的证明作较细致的分析即可看出, 定理结论可推广到凸体的**相似拷贝**构成的填装, 只要这些相似拷贝的大小差别不大. 下面的结论属于 Böröczky (见文献 L. Fejes Tóth, 1972, p194; Blind, 1969). 这里给出的简单证明是由 G. Fejes Tóth (1972) 发现的.

定理 3.7　设 H 为凸六边形, C 为凸体, P_s 为外切于 C 的面积最小的凸 s 边形 $(s \geqslant 3)$. 如果 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 是 H 的由 C 的相似拷贝构成的填装, 且对所有的 i, j 有

$$\frac{A(C_i)}{A(C_j)} \leqslant \frac{A(P_5) - A(P_6)}{A(P_6) - A(P_7)},$$

则

$$d(\mathcal{C}, H) \leqslant \frac{A(C)}{A(P_6)}.$$

证明　令 $R_i \supseteq C_i$ 表示定理 3.2 中的 s_i 边形, 则有

$$A(H) \geqslant \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} A(P_{s_i}) \frac{A(C_i)}{A(C)}. \tag{3.1}$$

假设对某个 i 有 $s_i > 6$. 由 $\sum_{i=1}^{n} s_i \leqslant 6n$, 存在 j 使得 $s_j < 6$. 由定理 2.1,

$$\begin{aligned} A(P_{s_j}) - A(P_{s_j+1}) &\geqslant A(P_5) - A(P_6) \\ &\geqslant A(P_6) - A(P_7) \\ &\geqslant A(P_{s_i-1}) - A(P_{s_i}). \end{aligned}$$

于是, 由假设有

$$\frac{A(C_i)}{A(C_j)} \leqslant \frac{A(P_5) - A(P_6)}{A(P_6) - A(P_7)} \leqslant \frac{A(P_{s_j}) - A(P_{s_j+1})}{A(P_{s_i-1}) - A(P_{s_i})},$$

由此可知

$$A(P_{s_i}) \frac{A(C_i)}{A(C)} + A(P_{s_j}) \frac{A(C_j)}{A(C)} \geqslant A(P_{s_i-1}) \frac{A(C_i)}{A(C)} + A(P_{s_j+1}) \frac{A(C_j)}{A(C)}. \tag{3.2}$$

因此, 可以用 (3.2) 的右端去替换 (3.1) 的右端第 i 个和第 j 个值, 从而使 (3.1) 的右边减少. 重复这一步骤, 直到把所有 $s_i > 6$ 的 P_{s_i} 都剔除, 于是得到

$$A(H) \geqslant \sum_{i=1}^{n} A(P_6) \frac{A(C_i)}{A(C)}.$$

等价地, 有

$$d(\mathcal{C}, H) = \frac{\sum_{i=1}^{n} A(C_i)}{A(H)} \leqslant \frac{A(C)}{A(P_6)}. \qquad \square$$

3.2 凸体形成的覆盖

下面将试图导出一些有关覆盖的类似结果.

如果 $C - C'$ 与 $C' - C$ 均不连通, 则称凸体 C 和 C' 相互**交叉**.

定理 3.8 (L. Fejes Tóth) 设 H 为凸六边形, H 被凸体 C 的 n 个全等且互不交叉的拷贝完全覆盖, 则

$$n \geqslant \frac{A(H)}{A(p_6)},$$

其中 p_6 表示内接于 C 的面积最大的六边形.

仿引理 3.3, 现在可以证明

引理 3.9 设 $C_1, \cdots, C_n$ 为覆盖凸六边形 H 的互不交叉的一系列凸体, 则存在不交叠的凸多边形 $R_i \subseteq C_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 它们覆盖 H, 且

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \leqslant 6n,$$

其中 s_i 表示 R_i 的边数.

证明 考虑任意一对凸体 C_i, C_j, 它们内部相交 (但不相互交叉). 设 a 和 b 表示它们的边界交点. 收缩 C_i, C_j, 直到它们共有一条公共的边界线段 ab, 从而使得它们的内部不交. 这样就得到两个新的凸体 C_i' 和 C_j', 使得 $C_i' \cup C_j' = C_i \cup C_j$. 问题在于在新的集系中一些凸体可能相互交叉 (图 3.3). 注意到, 当 C_j' 和 C_k 交叉时, 有 $C_i \cap C_k \subset C_i \cap C_j$, 这种困难是可以避免的. 因此, 如果开始收缩过程时选取一对 (C_i, C_j), 使得 $C_i \cap C_j$ 最小, 那么就不会陷入困境.

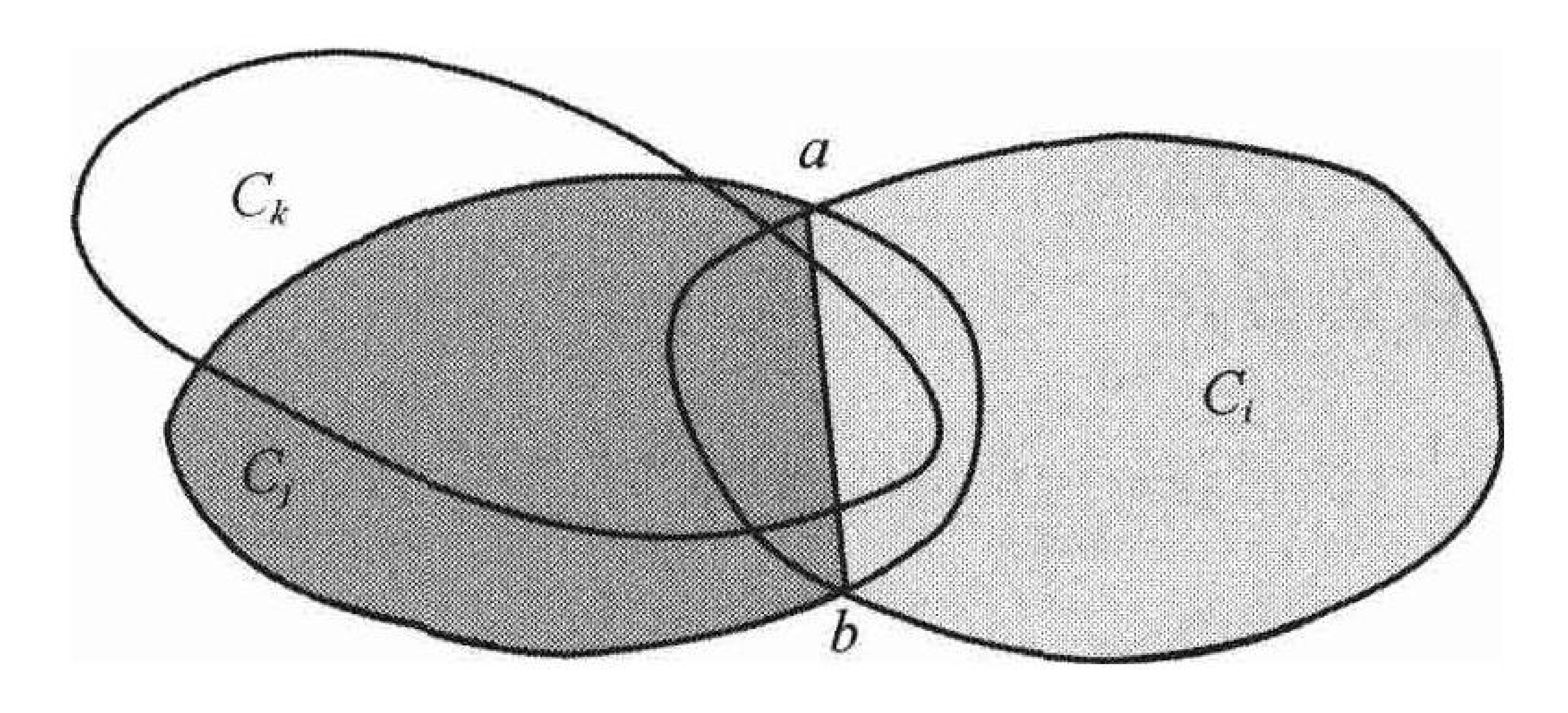


图 3.3 收缩 C_i 与 C_j

于是, 通过至多 $\binom{n}{2}$ 步, 由上述算法即可得到不交叠的凸多边形 $R_1, \cdots, R_n$, 满足 $\bigcup_{i=1}^{n} R_i = H$. 引理的最后一部分可由 Euler 公式导出, 方法与引理 3.3 的证明完全相同 (Bambah, Rogers, 1952). □

定理 3.8 的证明 设 $C_1, \cdots, C_n$ 为 C 的互不交叉的全等拷贝, R_i, s_i 的意义与引理 3.9 中的规定相同. 此外, 令 p_s 表示内接于 C 的面积最大的 s 边形. 这样

就有

$$A(H) = \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} A(p_{s_i}).$$

根据定理 2.3, 存在一单调增函数 $a(x)$, 使得对任意整数 $s \geqslant 3$ 有 $a(s) = A(p_s)$. 因此, 由 Jensen 不等式和引理 3.9,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} A(p_{s_i}) = \sum_{i=1}^{n} a(s_i) &\leqslant n \cdot a\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} s_i}{n}\right)\\ &\leqslant n \cdot a(6) = n \cdot A(p_6).\end{aligned}$$

□

换句话说, 定理 3.8 表明, 由凸体 C 的不交叉全等拷贝构成的凸六边形 H 的任何覆盖 $\mathcal{C}$ 的密度

$$d(\mathcal{C}, H) \geqslant \frac{A(C)}{A(p_6)}.$$

正如填装一样, 上面这个界对由 C 的不交叉的 **相似** 拷贝形成的覆盖也成立, 其中相似拷贝的大小差别不大 (见习题 3.5).

推论 3.10　*给定全平面的一个由凸体 C 的互不交叉的全等拷贝 (如平移) 形成的覆盖 $\mathcal{C}$, 则有*

$$\underline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \geqslant \frac{A(C)}{A(p_6)},$$

其中 p_6 表示内接于 C 的面积最大的六边形.

特别地, 如果 C 是圆盘 (椭圆盘), 则

$$\underline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \geqslant \frac{2\pi/6}{\sin(2\pi/6)} = \frac{2\pi}{\sqrt{27}},$$

此即前面提到的 Kershner 的结果.

定义 3.11　*给定任意凸体 $C \subseteq \mathbb{R}^2$, 设*

$$\vartheta(C) = \inf_{\mathcal{C}\text{覆盖}} \underline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2),$$

$$\vartheta_L(C) = \inf_{\substack{\mathcal{C}\text{格}\\ \text{覆盖}}} \underline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) = \inf_{\substack{\mathcal{C}\text{格}\\ \text{覆盖}}} d(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2),$$

其中, 下确界取遍平面的所有由 C 的全等拷贝构成的覆盖 (格覆盖). 类似地, 令

$$\vartheta^\star(C) = \inf_{\substack{\mathcal{C}\text{不交叉}\\ \text{覆盖}}} \underline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2).$$

显然,

$$\vartheta(C) \leqslant \vartheta^\star(C) \leqslant \vartheta_L(C).$$

同填装密度的情形一样, 不难证明

$$\vartheta(C)=\min_{\mathcal{C}\text{覆盖}} d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2),$$

$$\vartheta_L(C)=\min_{\substack{\mathcal{C}\text{格}\\\text{覆盖}}} d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2),$$

$$\vartheta^\star(C)=\min_{\substack{\mathcal{C}\text{不交叉}\\\text{覆盖}}} d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2),$$

其中最小值只是对那些密度存在的覆盖取的.

下面的事实可由推论 3.10 和定理 2.5 推得.

推论 3.12 设 C 为平面上中心对称的凸体. 则 $\vartheta^\star(C)=\vartheta_L(C)$.

在本领域一个重要的未解决的问题是, 是否对任何中心对称的凸体 C 均有 $\vartheta(C)=\vartheta_L(C)$. G. Fejes Tóth (2005) 证明了此结果在 C 充分 "胖" 时成立, 确切地说, 这里的"胖"是指 C 的最大内切圆半径与 C 的最小外接圆半径之间的比值至少为 0.933. (有人觉得定理 3.8 中要求凸体 C 的拷贝**不相互交叉**只是一种证明技巧上的需要.)

上述结论的另一个有趣结果是, 任何中心对称的凸体可以形成一个格覆盖, 这种格覆盖的密度不超过密度最小的圆盘覆盖的密度. 更确切地说, 有

推论 3.13 对任何中心对称的凸体 C, 有 $\vartheta_L(C)\leqslant 2\pi/\sqrt{27}$, 等号成立当且仅当 C 是一椭圆盘.

证明 由推论 3.10 和推论 3.12, 得

$$\vartheta_L(C)=\frac{A(C)}{A(p_6)}.$$

根据定理 2.6, 有

$$\vartheta_L(C)\leqslant\frac{2\pi/6}{\sin 2\pi/6}=\frac{2\pi}{\sqrt{27}}.$$ □

有人猜想, 对任何凸体 C 均有 $\vartheta(C)\leqslant 2\pi/\sqrt{27}\approx 1.2092$. 这方面的最佳结果是 W. Kuperberg (1989) 提出的, 他证明了

$$\vartheta(C)\leqslant\frac{8(2\sqrt{3}-3)}{3}<1.238.$$

Ismailescu (1998) 将 Kuperberg 给定的界改进为 $1.2281772\cdots$.

注意, 推论 3.13 的对偶命题并不成立. 不难找到这样的中心对称的凸体, 它不能形成密度 $\geqslant\pi/\sqrt{12}\approx 0.9069$ 的格填装 ($\pi/\sqrt{12}$ 是由相等圆盘构成的最经济的填装的密度). 这个事实与评注 2.7 完全吻合, 也就是说, 与定理 2.6 类似的陈述对外切 n 边形不成立 (见习题 3.6).

Reinhardt (1934) 提出的一个著名的猜想是：对任何中心对称的凸体 C 均存在一格填装, 其密度

$$\delta_L(C) = \delta(C) \geqslant \frac{8 - 4\sqrt{2} - \ln 2}{2\sqrt{2} - 1} = 0.9024\cdots,$$

等号仅对所谓的 "光滑八边形" 成立 (图 3.4). Mahler (1946a) 和 L. Fejes Tóth 证明了一个较弱结果, 即 $\delta_L(C) \geqslant \sqrt{3}/2 = 0.8660\cdots$, 这个结果后来被 Ennola (1961) 和 Tammela (1970) 改进为大约 0.8925. 值得一提的是, 事实上并不知道是否存在任何凸体 C (不必对称), 其填装密度 $\delta(C) < 0.9024$[可能具有此种填装密度的凸体参见文献 (Blind, 1983)].

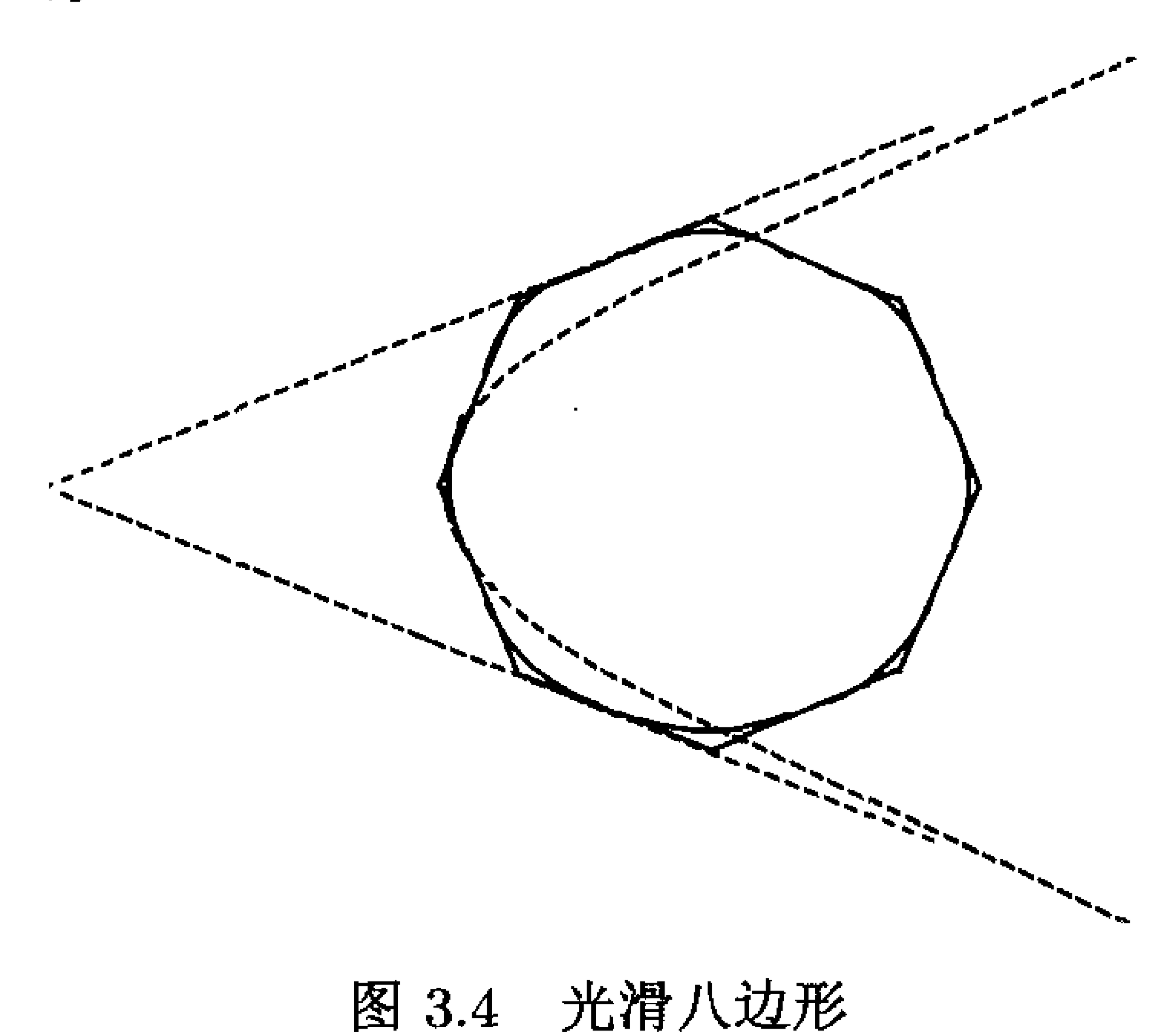


图 3.4 光滑八边形

3.3 填装和覆盖的关系

下面确立填装和覆盖问题之间的一种关系, 并以此结束本章. 假设有一个很大的正六边形 H, 以及总面积为 $\rho A(H)$ 的单位圆盘集族, 其中 $\pi/\sqrt{12} < \rho < 2\pi/\sqrt{27}$. 由前两节的结果可知, 这些圆盘不形成 H 的填装或覆盖. 问题是, 能被这些圆盘覆盖的 H 的最大面积是多少?

下面的 L. Fejes Tóth (1972, p80) 定理回答了这个问题, 提供了一个渐近紧的上界. 下面的证明由 G. Fejes Tóth (1972) 给出, 这一证明可推广到任何凸体 C 的不交叉的全等拷贝的情形.

定理 3.14 (L. Fejes Tóth) *设 H 为正六边形, $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 是全等圆盘集族. 此外, 设 D 表示面积为 $\sum_{i=1}^{n} A(C_i)$ 且与 H 同心的圆盘, 则*

$$A\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \cap H\right) \leqslant A(D \cap H).$$

给定两个凸集 $C, D \subseteq \mathbb{R}^2$ 与一常数 $0 < w < 1$, D 与 C 之间的**加权面积离差**定义为

$$\mathrm{dev_A}\,(C, D) = wA(C - D) + (1 - w)A(D - C),$$

其中 $C-D$ 表示 C 中不属于 D 的点构成的集合. [注意到, 对于 $w \neq 1/2$, $\mathrm{dev_A}\,(C, D)$ 关于 C 和 D 不一定对称!]

如果 C 为严格凸体, 而且 Q_n 是一个与 C 的离差最小的 n 边形, 则 Q_n 的任何长为 ℓ 的边均被 C 的边界分成三段, 长分别为 $(w/2)\ell, (1 - w)\ell$ 和 $(w/2)\ell$. 特别地, 如果 C 为圆盘, 则 Q_n 为与 C 同心的正 n 边形.

此外, 如果 $a(n) = \mathrm{dev_A}\,(C, Q_n)$ 表示 n 边形与 C 的最小离差, 则下面的 Dowker 型结果成立: 对所有的 $n \geqslant 4$, 有

$$a(n) \leqslant \frac{a(n-1) + a(n+1)}{2}$$

(见习题 2.4).

我们还需要引理 3.3 和引理 3.9 的如下常见的推广.

引理 3.15 *设 $C_1, \cdots, C_n$ 为一族不交叉的凸体, H 是一固定的六边形. 假定每一个 C_i 有一内点属于 H, 但不属于任何其他 C_j $(j \neq i)$. 则可以找到不交叠的凸多边形 $R_i \subseteq H$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 使得*

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i \cap H = \bigcup_{i=1}^{n} (C_i \cap R_i),$$

而且 $\sum_{i=1}^{n} s_i \leqslant 6n$, 其中 s_i 表示 R_i 的边数.

定理 3.14 的证明 设 D_1 和 D_2 分别表示 H 的内切圆盘和外接圆盘. 显然, 可以假设

$$A(D_1) < A(D) = \sum_{i=1}^{n} A(C_i) < A(D_2), \tag{3.3}$$

否则无须证明. 不失一般性, 还可假设任一 C_i 与 H 有一公共内点, 此内点不属于任何其他的 C_j $(j \neq i)$. 这样就可以利用引理 3.15 找到满足条件的多边形 R_i. 由定义, 可得

$$\begin{aligned} A\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \cap H\right) &= A\left(\bigcup_{i=1}^{n} (C_i \cap R_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(A(C_i) - A(C_i - R_i)\Big). \end{aligned}$$

类似地,

$$A\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \cap H\right) = \sum_{i=1}^{n}(A(R_i) - A(R_i - C_i)).$$

因此,

$$\begin{aligned}A\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \cap H\right) &= wA\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \cap H\right) + (1-w)A\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \cap H\right) \\ &= w\sum_{i=1}^{n} A(C_i) + (1-w)\sum_{i=1}^{n} A(R_i) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{dev_A}\,(C_i, R_i) \\ &\leqslant wA(D) + (1-w)A(H) - \sum_{i=1}^{n} a(s_i),\end{aligned}$$

其中 $a(s_i)$ 表示 s_i 边形与 C_i 的最小面积离差. 再由 Jensen 不等式, 得到

$$A\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \cap H\right) \leqslant wA(D) + (1-w)A(H) - na(6).$$

设 Q_6 表示与 $C_1 = C$ 具有最小面积离差的正六边形. 注意当 w 在 $(0,1)$ 中变动时, Q_6 可取到在 C 的内接六边形与外切六边形之间的所有可能位置. 根据 (3.3), 对于 w 的某些取值, 有

$$\begin{aligned}a(6) = \mathrm{dev_A}\,(C, Q_6) &= \mathrm{dev_A}\,(D, H)\frac{A(C)}{A(D)} \\ &= \frac{1}{n}\mathrm{dev_A}\,(D, H).\end{aligned}$$

然而, 在这种情形下得到

$$\begin{aligned}A\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \cap H\right) &\leqslant wA(D) + (1-w)A(H) - \mathrm{dev_A}\,(D, H) \\ &= A(D \cap H).\end{aligned}$$

对 $n = 1$, 这个不等式显然是紧的. 对于较大的值 n, 它也是渐近紧的. 为确认这一点, 按比例缩小 D 和 H, 得到圆盘 D' 和六边形 H', 满足 $A(D') = A(D)/n = A(C_i)$ 和 $A(H') = A(H)/n$. 以类格形式排列 H' 的 n 个拷贝, 使其形成 H 的近似铺砌. 在 H' 的每一个拷贝处放置 D' 的一个同心拷贝, 于是得到圆盘族 $\{C_1, \cdots, C_n\}$, 使得定理中的界是几乎紧的. □

在第 5 章会看到, 对于圆盘配置, 用一种很简单的构造法即可找到满足引理 3.15 所给条件的多边形 R_i. 定理 3.14 到任意凸体的推广留给读者 (见习题 3.9).

本章所讨论的大多数结果表明, 在相当一般的情形下, 由一个凸体的全等拷贝形成的最经济的填装和覆盖 "自动地" 具有类**格形式**. 这就说明了为什么格、数的几何、正则与对称构形在这个领域起着特殊的作用. 有关最近的研究见文献 (G. Fejes Tóth, 1983; L. Fejes Tóth, 1984a; G. Fejes Tóth, W. Kuperberg, 1993a, 1993b; Moser, Pach, 1986).

习 题

3.1 证明如果 $\mathcal{C}$ 是平面上凸体的任一配置, 则 $\overline{d}(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)$ 和 $\underline{d}(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)$ 与原点的选择无关 (见定义 3.1).

3.2 证明总能找到由凸体 C 的全等拷贝形成的平面的填装 $\mathcal{C}$, 其密度 $d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)$ 存在且等于 $\delta(C)$. 类似地, 证明存在格填装 $\mathcal{C}$ 满足 $d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)=\delta_L(C)$.

3.3 给定一内部包含原点的多边形凸体 P, 设 $P(r)=rP=\{rp \mid p\in P\}$. 对于一给定凸体 C 的全等拷贝形成的任何填装 $\mathcal{C}$, 令

$$\bar{d}_P(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)=\lim_{r\to\infty}\sup d(\mathcal{C},P(r)),$$

证明:

$$\sup_{\mathcal{C}}\bar{d}_P(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)=\sup_{\mathcal{C}} d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)\ (=\delta(C)),$$

并利用这个事实由定理 3.2 推导推论 3.4 (见定义 3.1, 定义 3.5).

3.4 试构造单位圆盘形成的一个填装 $\mathcal{C}$ 以及两个凸体 P,P', 使得

$$\lim_{r\to\infty} d(\mathcal{C},P(r))\neq\lim_{r\to\infty} d(\mathcal{C},P'(r)).$$

3.5 (Böröczky) 设 H 为凸六边形, C 为凸体, p_s 表示内接于 C 的面积最大的凸 s 边形 $(s\geqslant 3)$. 证明如果 $\mathcal{C}=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 是由 C 的相似拷贝形成的 H 的不交叉覆盖, 且对所有的 i 和 j 有

$$\frac{A(C_i)}{A(C_j)}\leqslant\frac{A(p_6)-A(p_5)}{A(p_7)-A(p_6)},$$

则

$$d(\mathcal{C},H)\geqslant\frac{A(C)}{A(P_6)}.$$

3.6 (Mahler, 1946a) 试求中心对称的凸体 C, 使其满足 $\delta_L(C)<\pi/\sqrt{12}$.

3.7 如果凸体 C 的不交叠的全等拷贝能无间隙地填满整个平面, 则称 C 为**铺砌元**. 证明下列三个条件是等价的:

(i) C 是铺砌元;

(ii) $\delta(C) = 1$;

(iii) $\vartheta(C) = 1$.

3.8 (G. Fejes Tóth, L. Fejes Tóth, 1973b)

(i) 设 Q 为凸四边形, 有限条直线将其划分成若干凸的区域 (胞腔). 对任一族这种胞腔 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$, 试将 Q 划分成不交叠的凸多边形 $R_1, R_2, \cdots, R_n$, 使得对每一个 i 有 $Q_i \subseteq R_i$, 且 $\sum_{i=1}^{n} s_i \leqslant 4n$, 其中 s_i 表示 R_i 的边数;

(ii) 如果凸体形成的填装 $\mathcal{C}$ 的任何两个元素均可被某一避开其他所有元素的直线分离, 则称 $\mathcal{C}$ 为**完全可分离的**. 证明如果 $\mathcal{C}$ 是某凸四边形 Q 的由凸体 C 的 n 个全等拷贝形成的完全可分离的填装, 则

$$n \leqslant \frac{A(Q)}{A(P_4)},$$

其中 P_4 是外切于 C 的面积最大的凸四边形;

(iii) 证明对于任何中心对称的凸体 C, 平面的由 C 的全等拷贝形成的完全可分离填装的最大密度是 $A(C)/A(P_4)$.

3.9 (G. Fejes Tóth, 1972) 给定凸体 $C \subseteq \mathbb{R}^2$, $A(C) = 1$. 设 $f(x)$ 表示 C 的能被面积为 x 的六边形所覆盖的部分的最大面积. 又, 设 F 为最小的凹函数, 对任意 $x \geqslant 0$ 有 $F(x) \geqslant f(x)$. 证明: 对任何由 C 的不交叉的全等拷贝构成的集族 $\{C_1, \cdots, C_n\}$ 以及任意凸六边形 H, 有

$$A\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \cap H\right) \leqslant nF\left(\frac{A(H)}{n}\right).$$

第 4 章　格填装与格覆盖

给定凸体 C 与格 $\mathbf{\Lambda}$, C 沿 $\mathbf{\Lambda}$ 中向量的所有平移的集合 $\mathcal{C}=\{C+\lambda|\lambda\in\mathbf{\Lambda}\}$ 称为**格配置**. 特别地, 当 $\mathcal{C}$ 中的元无公共内点 ($\mathcal{C}$ 中的元覆盖全平面) 时, 称 $\mathcal{C}$ 为**格填装** (**格覆盖**). 第 3 章的主要结论是, 在相当一般的条件下, 平面中 C 的全等拷贝构成的填装的密度不超过 C 所形成的最稠密格填装的密度. 类似地, 任何由 C 的 (不交叉) 拷贝构成的覆盖的密度均不小于最稀疏的格覆盖的密度 (见推论 3.6 与推论 3.12). 本章讨论最佳格填装与最佳格覆盖到底能经济到何种程度.

4.1 Fáry 定理

下面的著名结果是由 Fáry (1950) 证明的 [该定理第一部分一个简洁的不同证明见文献 (Courant, 1965)].

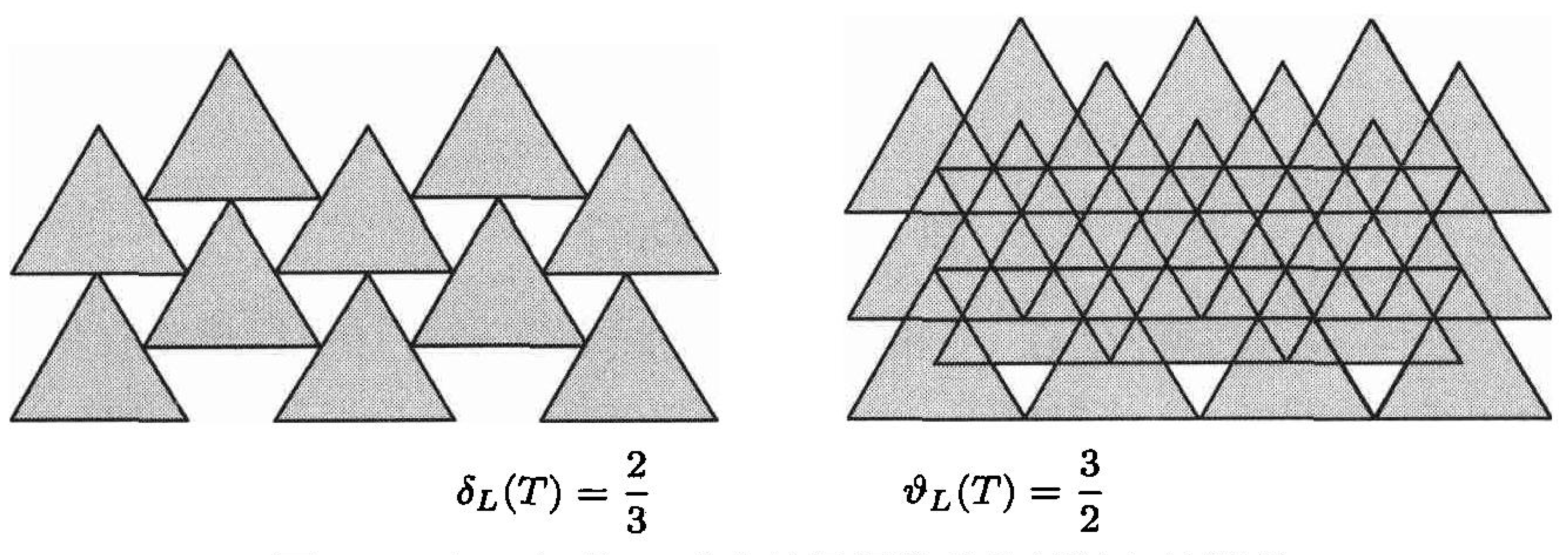
定理 4.1 (Fáry)　*给定凸体 C, 令 $\delta_L(C)$ 与 $\vartheta_L(C)$ 分别表示平面中 C 形成的最稠密格填装与最稀疏格覆盖的密度, 则*

(i) $\delta_L(C)\geqslant\dfrac{2}{3}$;

(ii) $\vartheta_L(C)\leqslant\dfrac{3}{2}$,

等号成立当且仅当 C 为三角形.

图 4.1 所示为定理 4.1 中等号成立的格配置. 注意图 4.1 给出的是正三角形 T 的格配置, 这并非一个实质性的限制, 因为平面的适当的仿射变换可将 T 变成任意其他三角形 T', 且不违背格结构, 也不改变密度 (一个非奇异的线性映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 称为 **仿射变换**, 如果它保持三角形的定向).



$\delta_L(T)=\dfrac{2}{3}$　　　　$\vartheta_L(T)=\dfrac{3}{2}$

图 4.1　由三角形 T 形成的最经济的格填装与格覆盖

在证明定理 4.1 之前, 必须引入一个新概念, 它在下面证明中起着关键作用.

定义 4.2 给定平面中的凸体 C, 定义 C 的差区域为

$$D(C)=C+(-C)=\{c-c'|c,c'\in C\}.$$

显然, $D(C)$ 是凸的, 且关于原点 O 中心对称 (见习题 4.2).

如果一个凸六边形是正六边形在仿射变换下的象, 则称之为**仿射正六边形**. 显然, 顶点为 $p_1,\cdots,p_6$ 的凸六边形是仿射正六边形当且仅当: (a) 它是中心对称的; (b) $\overrightarrow{p_2p_1}+\overrightarrow{p_2p_3}=\overrightarrow{p_3p_4}$ (这里 $\overrightarrow{p_ip_j}=p_j-p_i$ 表示从 p_i 到 p_j 的向量).

引理 4.3 任意中心对称的凸体 D 包含一个与其同心的内接仿射正六边形 H. 而且, H 的一条边的方向可自由选取.

证明 对任意 $p\in \mathrm{Bd}\,D$, 令 $p'\in \mathrm{Bd}\,D$ 表示 p 的对径点. 任意固定一点 $p_1\in \mathrm{Bd}\,D$. 很容易找到 D 的一条弦 p_2p_3 平行于 p_1p_1', 且 $\overrightarrow{p_2p_3}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{p_1p_1'}$. 点 p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3' 显然生成一个内接于 D 的仿射正六边形. □

定理 4.1 的证明 首先证明 (i). 为简便起见, 假设 C 的边界光滑. 令 $p_1,\cdots,p_6$ 为内接于差区域 $D(C)$ 的仿射正六边形的顶点 (图 4.2). 由 $D(C)$ 的定义立即可知, 可以找到 C 的边界点 $q_1,\cdots,q_6$, 使得

$$\overrightarrow{q_1q_4}=\overrightarrow{Op_1}=p_1,$$
$$\overrightarrow{q_2q_5}=\overrightarrow{Op_2}=p_2,$$
$$\overrightarrow{q_3q_6}=\overrightarrow{Op_3}=p_3,$$

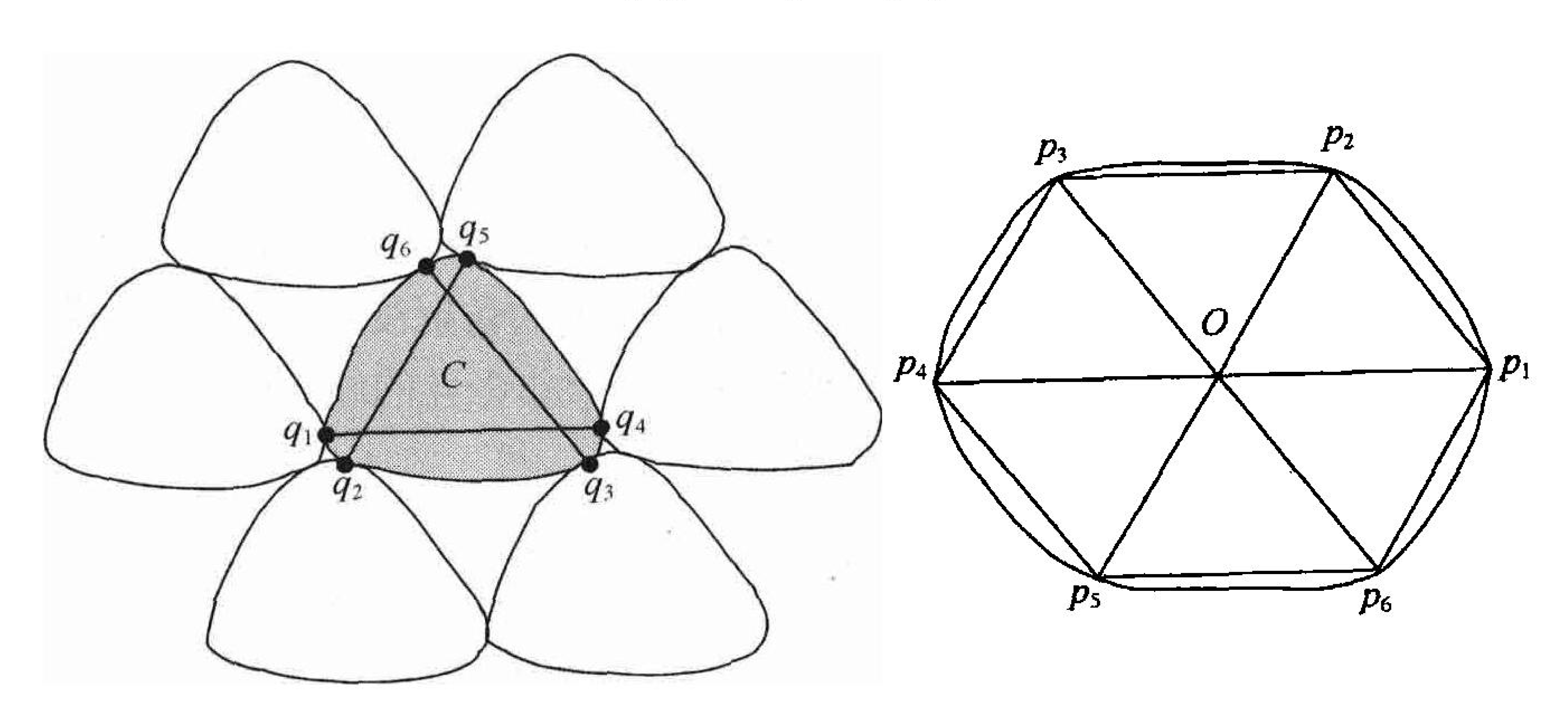


图 4.2 C 与 $D(C)$

这里 $p_2=p_1+p_3$. [注意, C 在 q_1 和 q_4 处的切线相互平行且平行于 $D(C)$ 在 p_1 和 p_4 处的切线. 特别地, 这就表明 q_1q_4 是 C 中平行于 $\overrightarrow{Op_1}=p_1$ 的最长弦. 这也表明 $q_1,\cdots,q_6$ 以图 4.2 中所示顺序依次出现.] 显然

$$\mathcal{C}=\{C+mp_1+np_2|m,n\in\mathbb{Z}\}$$

为一格填装.

由引理 4.3 的第二部分, 可以任意选取 p_1 的方向. 于是我们断言, 适当选取 p_1 可使直线 q_2q_6 与 q_3q_5 平行. 假定最初它们不平行, 例如, 它们在 $\overrightarrow{q_1q_4}$ 的左侧相交. 如果令 p_1 (从而 $\overrightarrow{q_1q_4}$) 旋转 π, 则 q_i 和 $q_{i+3}(i=1,2,3)$ 将对换位置, 从而 q_2q_6 和 q_3q_5 将在 $\overrightarrow{q_1q_4}$ 的右侧相交. 由连续性可知, 断言是正确的. 此外, 利用仿射变换 (如果必要的话), 不妨假设 q_1q_4 垂直于 q_2q_6 (q_3q_5). 设 $q_i' = q_i + \overrightarrow{q_1q_4}$, $1 \leqslant i \leqslant 6$ (图 4.3), $d(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2)$ 表示 $\mathcal{C}$ 的密度, 则

$$\begin{aligned} d(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) &= \frac{A(C)}{A(q_2q_2'q_5'q_5)} \\ &= \frac{A(C)}{A(q_1q_2q_3q_2'q_4q_6'q_5q_6)} \\ &\geqslant \frac{A(C)}{A(C)+A(q_3q_2'q_4)+A(q_4q_6'q_5)} \end{aligned}$$

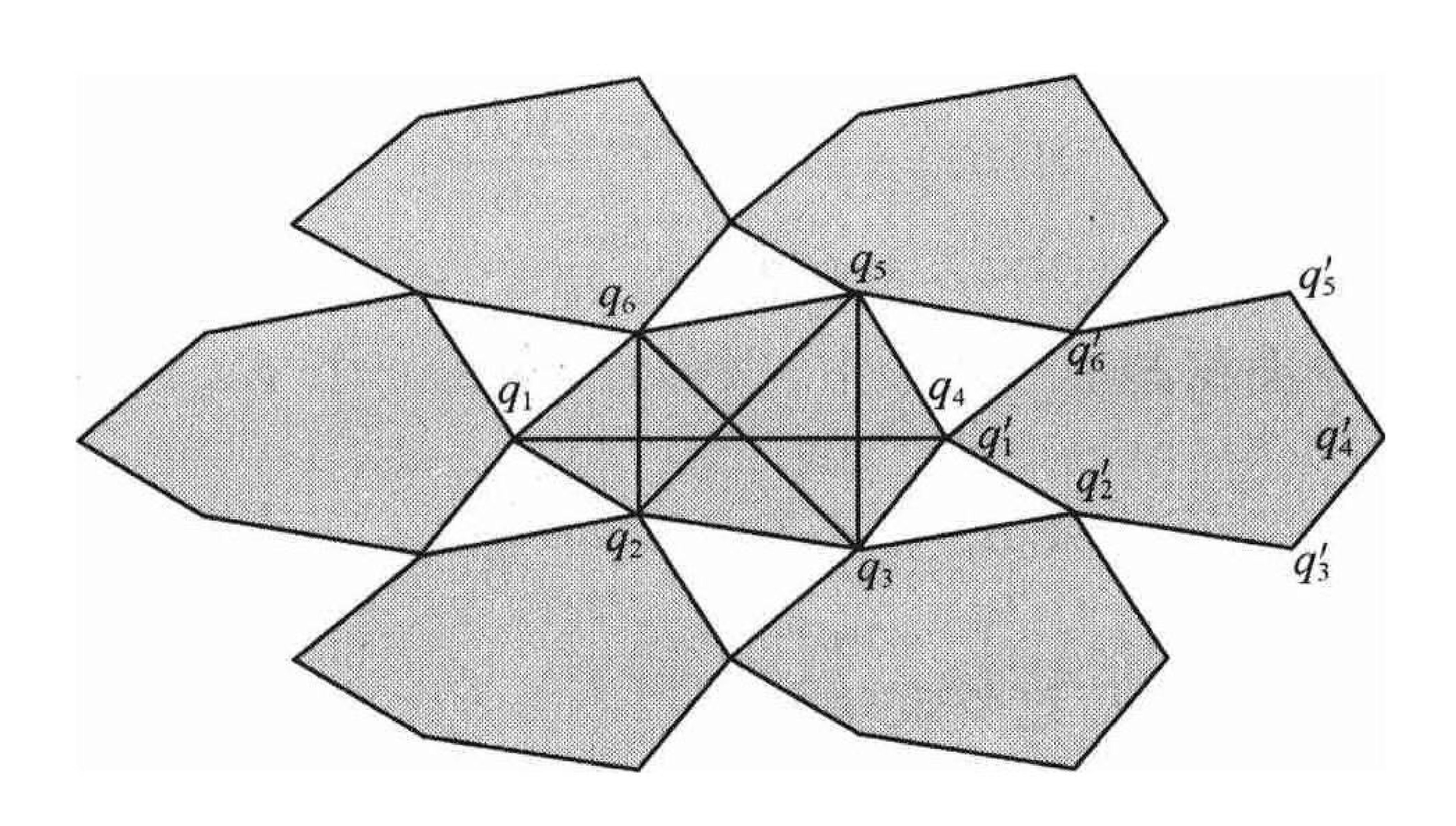


图 4.3 C 的六个平移

(见习题 4.1). 另一方面,

$$A(q_3q_2'q_4) \leqslant \frac{1}{2}A(q_1q_2q_3q_4),$$

$$A(q_4q_6'q_5) \leqslant \frac{1}{2}A(q_1q_4q_5q_6),$$

因此 $A(q_3q_2'q_4) + A(q_4q_6'q_5) \leqslant \dfrac{1}{2}A(C)$, 且 $d(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \geqslant \dfrac{2}{3}$.

为了证明 (ii), 需要引理 4.3 的如下变形, 其证明留作习题 (见习题 4.3): 任何凸体 C 包含一个顶点记为 $p_1, \cdots, p_6$ 的内接仿射正六边形 H.

考虑由 H 的平移形成的平面铺砌 (图 4.4), 且在 H 的每一个拷贝处外接 C 的一个平移. 记此格覆盖为 $\mathcal{C}$, 设 $R_1, \cdots, R_6$ 为 C-H 的 (阴影) 分支.

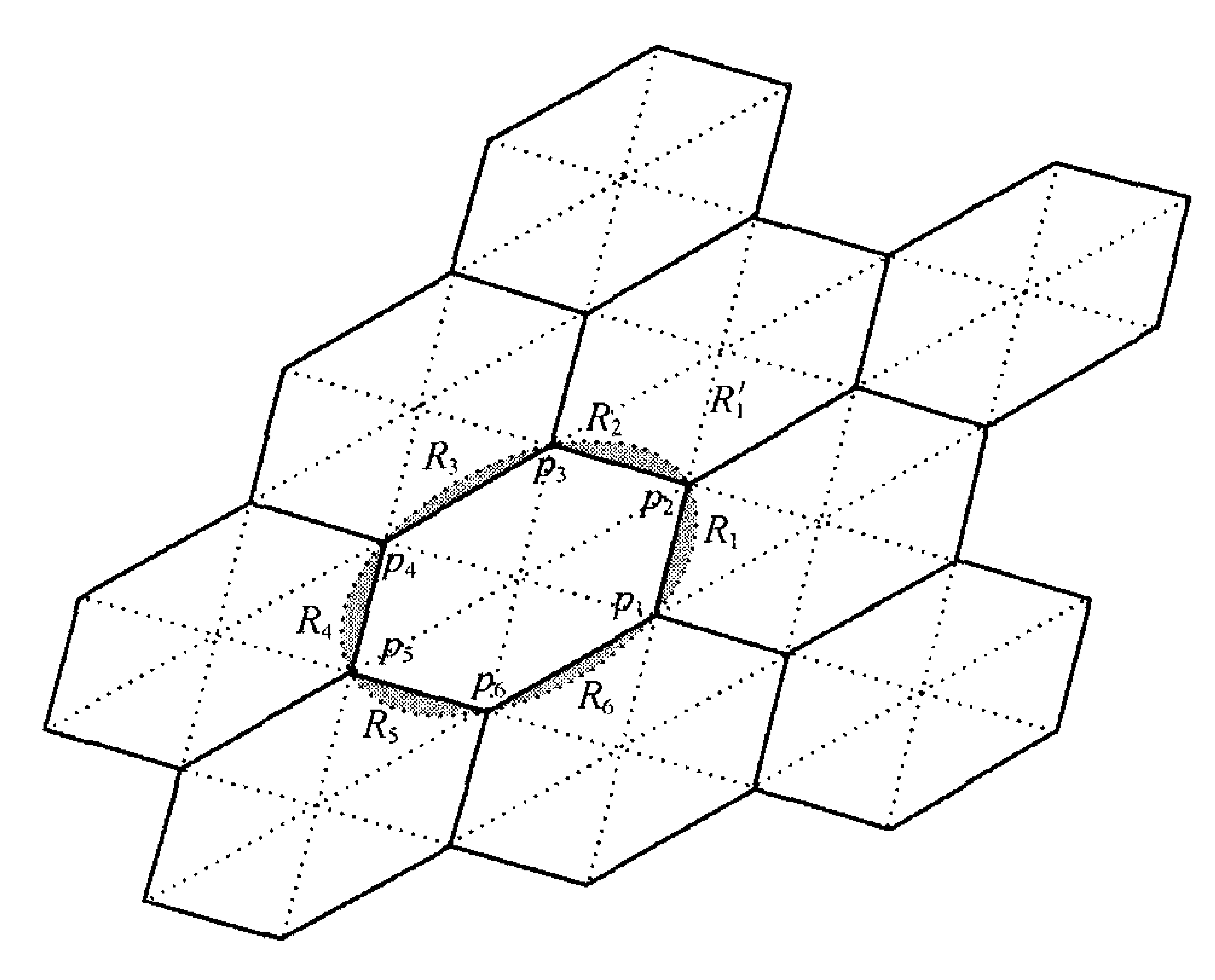


图 4.4　用 H 铺砌平面

易知

$$A(R_1)+A(R_2)\leqslant\frac{A(H)}{6}.$$

事实上, 如果 R_1' 表示 R_1 关于 p_2 的反射, 则 $R_1'\cap R_2=\varnothing$, 且两个区域均被包含在占 H 的六分之一面积的小三角形中. 类似地, 对每一个 $1\leqslant i\leqslant 6$, 均有

$$A(R_i)+A(R_{i+1})\leqslant\frac{A(H)}{6},$$

因此 $\sum_{i=1}^{6}A(R_i)\leqslant A(H)/2$. 这就表明

$$d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)=\frac{A(C)}{A(H)}=\frac{A(H)+\sum\limits_{i=1}^{6}A(R_i)}{A(H)}\leqslant\frac{3}{2}.$$

显然, 只有当 C 为三角形时 (i) 和 (ii) 中等号成立. □

4.2　双格填装

在第 3 章的第 2 节曾指出, 确定什么样的凸体 C 有最小可能的填装密度 $\delta(C)$ 仍是一个未解决的难题. 这个问题的答案显然不是三角形 T, 因为 [尽管 $\delta_L(T)=2/3=\min_C\delta_L(C)$] T 的全等拷贝能覆盖全平面, 也就是说 $\delta(T)=1$ (图 4.5).

一般说来, 解决上述问题的主要障碍在于很难构造不具有格结构的稠密填装.

平面的三角形铺砌可能会为我们提供一条解决问题的线索, 因为它本身就具有

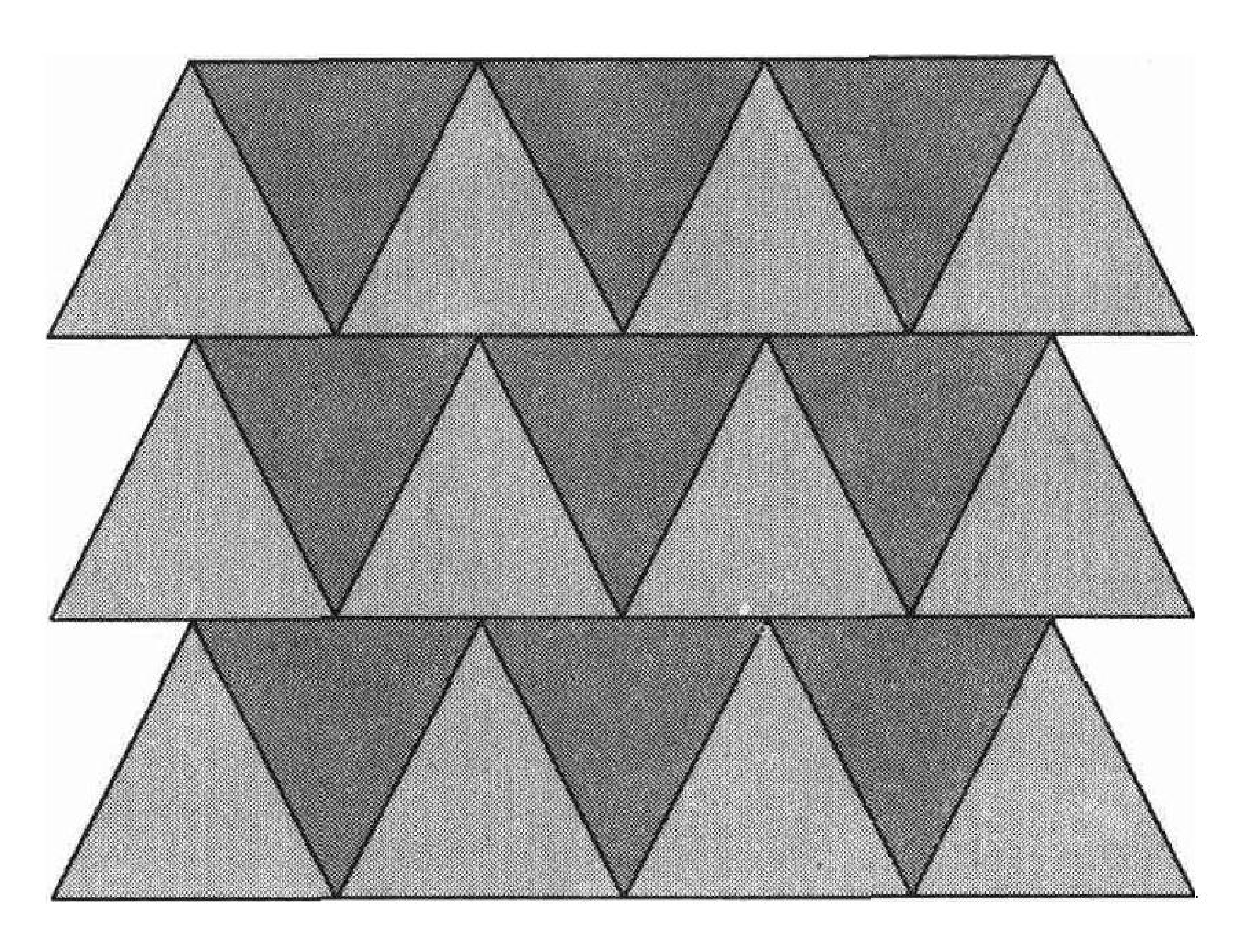


图 4.5 用三角形铺砌平面

一种**双格**结构.

定义 4.4 称由 C 的全等拷贝构成的填装 $\mathcal{C}$ 为**双格填装**, 如果 $\mathcal{C}$ 是两个格填装 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 的并, 且 $\mathcal{C}_2$ 可由 $\mathcal{C}_1$ 关于平面上某一点旋转 π 得到.

作为 $\mathcal{C}_1$ 与 $\mathcal{C}_2$ 的基础的格 $\mathbf{\Lambda}_1$ 和 $\mathbf{\Lambda}_2$ 显然是相同的. 如果 P 表示 $\mathbf{\Lambda}_1$ 的基本平行四边形, 则

$$d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)=d(\mathcal{C}_1,\mathbb{R}^2)+d(\mathcal{C}_2,\mathbb{R}^2)=2\frac{A(C)}{A(P)}.$$

下面的结果是由 G. Kuperberg, W. Kuperberg (1990) 得到的. 这个结果推广了 Mahler (1946a) 定理, Mahler 就中心对称凸体给出了相同结果.

定理 4.5 (G. Kuperberg-W. Kuperberg) 对平面中任意凸体 C, 存在一个由 C 的全等拷贝构成的双格填装 $\mathcal{C}$ 满足 $d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)\geqslant\sqrt{3}/2$. 因此, $\delta(C)\geqslant\sqrt{3}/2$.

为了证明, 需要一些预备知识.

定义 4.6 给定凸体 C, 称一内接于 C 的平行四边形 Q 为**广延平行四边形**, 如果它的每一条边的长至少是 C 中与其平行的最长弦的一半.

显然, 每一个内接于 C 的广延平行四边形 $Q=q_1q_2q_3q_4$ 可按如下方法生成一个由 C 的全等拷贝导出的双格填装.

不妨假设 $q_1{=}O$, 另设

$$\mathbf{\Lambda}=\{2m\,\overrightarrow{q_1q_2}+2n\,\overrightarrow{q_1q_4}\,|m,n\in\mathbb{Z}\}=\{2mq_2+2nq_4|m,n\in\mathbb{Z}\},$$

则 $\mathcal{C}{=}\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2$, 其中

$$\mathcal{C}_1=\{C+\lambda|\lambda\in\mathbf{\Lambda}\},\quad \mathcal{C}_2=\{-C+\lambda|\lambda\in\mathbf{\Lambda}\},$$

显然形成一个双格填装 (图 4.6).

下面仅关注由广延平行四边形导出的双格填装.

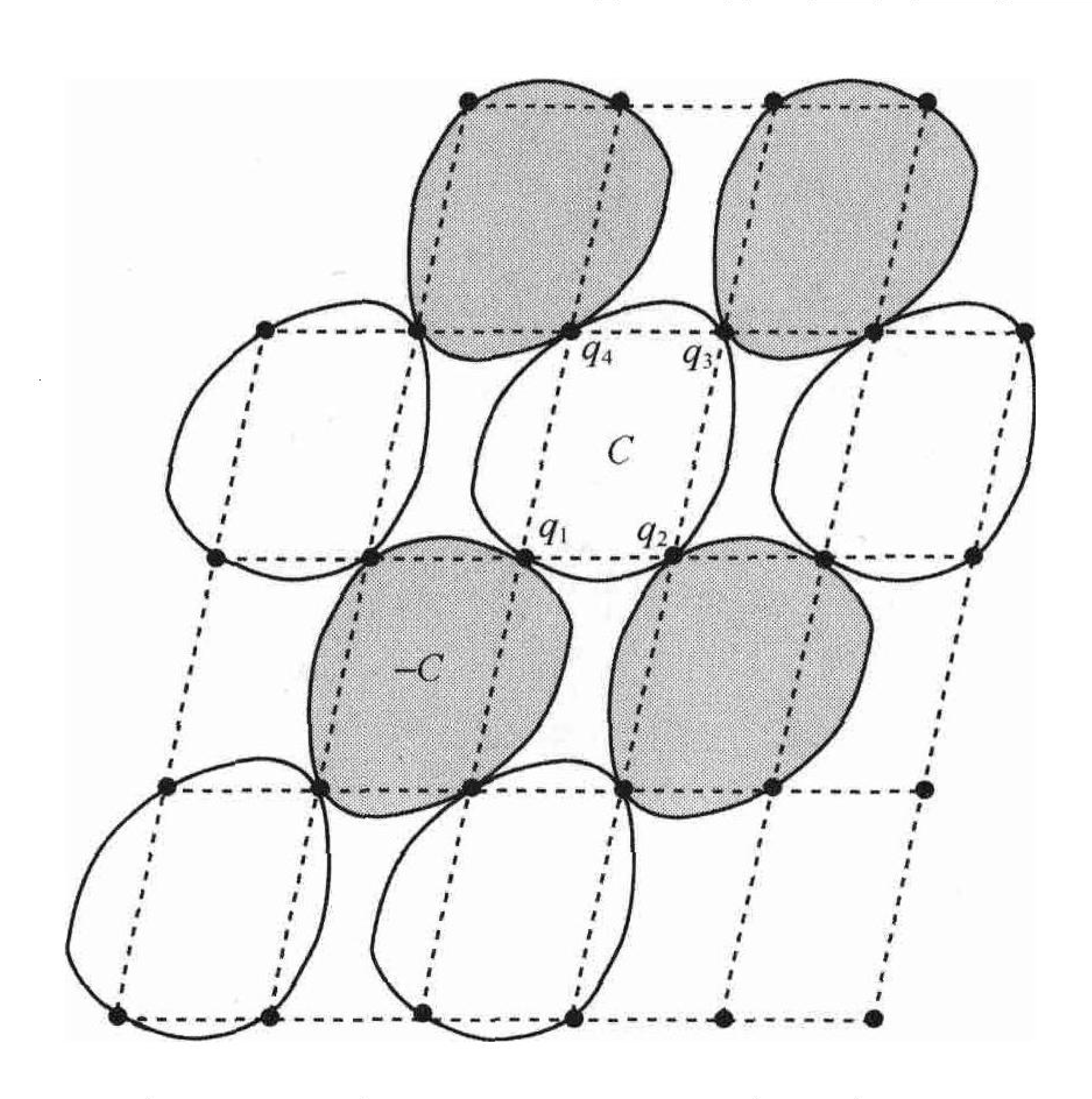


图 4.6　由广延平行四边形生成的双格填装

定义 4.7　设 C 为凸体, v 是一固定方向. C 在方向 v 的长 (宽) 是指平行于 v 的最长弦的长 (平行于 v 的两条支撑线之间的距离), 记为 $\ell_v(C)$ ($w_v(C)$).

设 c_1 与 c_2 为平行于 v, 且长为 $\ell_v(C)/2$ 的两条相等的弦. 称这样的两条弦所确定的平行四边形为沿方向 v 的**半长平行四边形**.

设 c_1' 和 c_2' 为平行于 v 的两条相等的弦, 其所在直线间的距离为 $w_v(C)/2$. 这样的两条弦所确定的平行四边形称为沿方向 v 的**半宽平行四边形**.

很容易看出, 半长平行四边形和半宽平行四边形总是广延的 (见习题 4.4).

引理 4.8　给定任意凸体 C 和方向 v, 沿方向 v 的半长或半宽平行四边形的面积至多为 $A(C)/\sqrt{3}$.

证明　设 p_1 和 p_2 表示平行于方向 v 的一条 (最长) 弦的两个端点, 弦长为 $\ell_v(C)$, s_1 和 s_2 分别为在 p_1 和 p_2 处支撑 C 的两条平行线. 设 t_1 和 t_2 分别表示在某两点 r_1 与 r_2 处支撑 C 且平行于 v 的两条直线. 此外, 设 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 与 w_1, w_2, w_3, w_4 分别表示沿方向 v 的半长平行四边形与半宽平行四边形的顶点. 不失一般性 (可能用到仿射变换与按比例放缩), 假设 s_1, s_2, t_1, t_2 围成一单位正方形 (图 4.7).

设线段 w_1w_2 的长为 y, 半长平行四边形的高为 x (对应的边长为 1/2), 这样

$$A(\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4) = \frac{x}{2}, \quad A(w_1w_2w_3w_4) = \frac{y}{2}.$$

另一方面,

$$
\begin{aligned}
A(C) \geqslant & [A(\ell_1\ell_2r_1) + A(\ell_3\ell_4r_2)] + [A(w_1w_2\ell_2\ell_1) + A(w_3w_4\ell_4\ell_3)] \\
& + A(p_1w_1w_2p_2w_3w_4) \\
& = \frac{1-x}{4} + \frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{y+1}{4} \\
& = \frac{3}{8} + \frac{xy}{2} = \left(\frac{3}{8\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{xy}}{2}\right) \cdot \sqrt{xy} \\
& \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{xy} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2}}.
\end{aligned}
$$

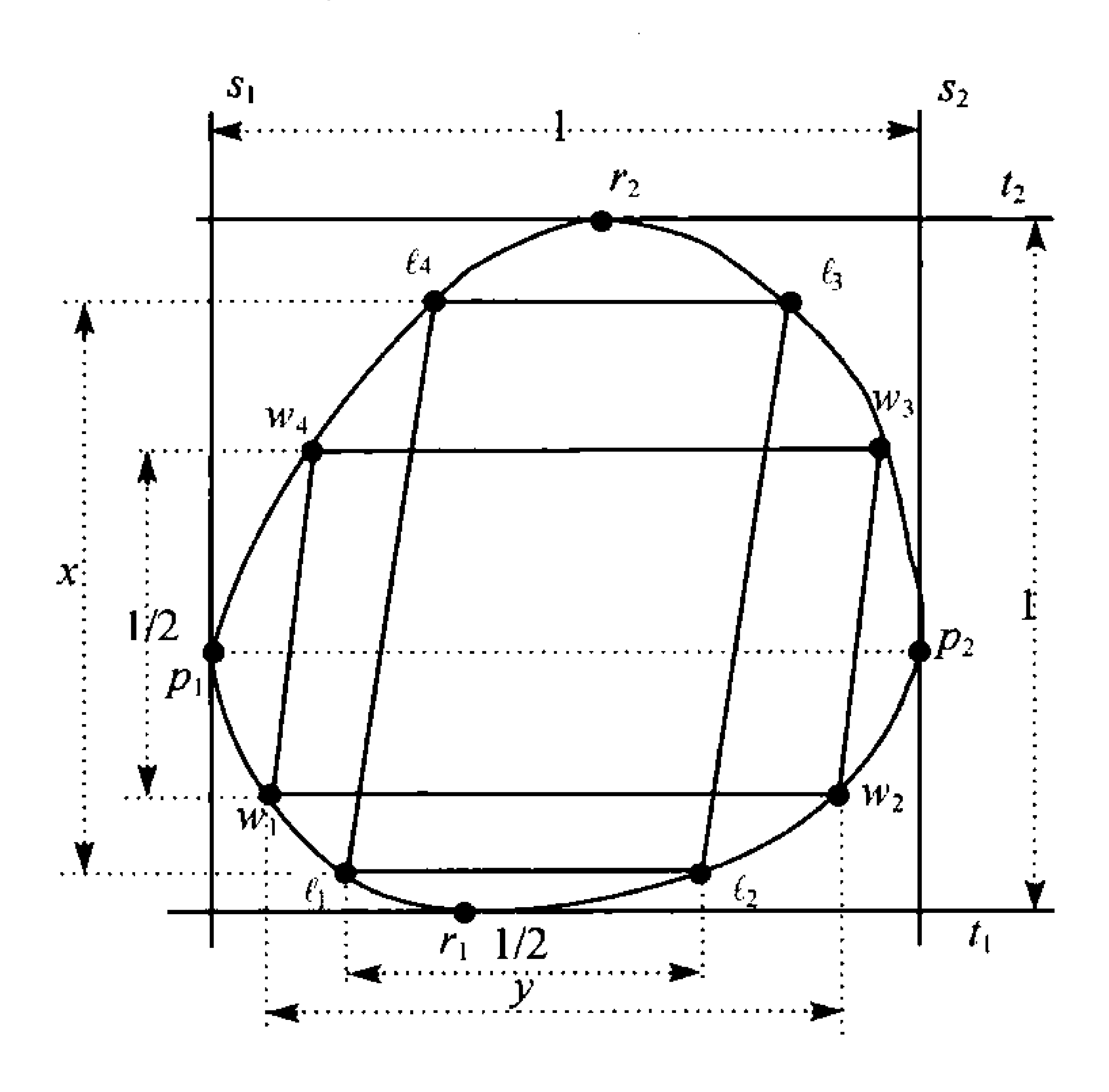


图 4.7 半长平行四边形与半宽平行四边形

因此, $x/2$ 或 $y/2$ 至多为 $A(C)/\sqrt{3}$, 如此即得结论. □

定理 4.5 的证明 根据引理 4.8, 存在内接于 C 的广延平行四边形 Q (沿任何方向), $A(Q){\leqslant}A(C)/\sqrt{3}$. 由 Q 生成的双格填装的密度显然为 $A(C)/2A(Q) \geqslant \sqrt{3}/2$. □

任何凸体 C 均可借助广延平行四边形形成 (见习题 4.6) 一个最大密度的双格填装. 另一方面, 正十二边形 D 不含有任何面积小于 $A(D)/\sqrt{3}$ 且有一边平行于 D 的主对角线的广延平行四边形. 因此, 引理 4.8 不能再改进, 而且定理 4.5 在下述意义下是最佳可能的: 不存在 D 的双格填装, 其密度大于 $\sqrt{3}/2$, 且其基础格的一基向量平行于 D 的一主对角线 (图 4.8). 另外, Doheny (1995) 利用紧性论证了定理 4.5 中给出的界并非最佳可能.

很容易将以上论证转换成线性时间算法, 用于有关 n 边形凸体 C 的最稠密双格填装的计算 [参见文献 (Mount, 1991) 和习题 4.6].

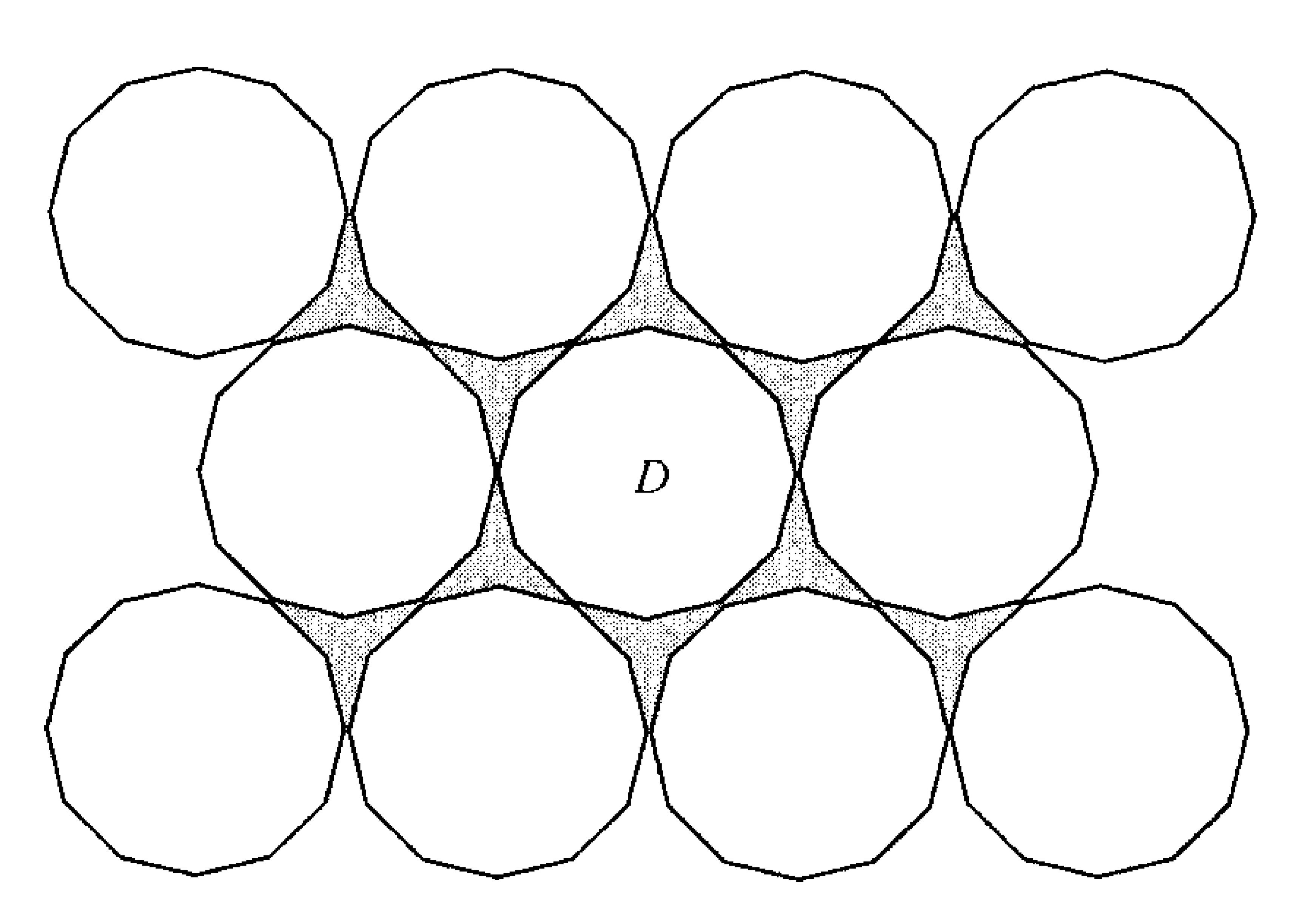


图 4.8 在一基向量平行于对角线的约束条件下正十二边形形成的最大密度双格填装

习 题

4.1 设 $\mathcal{C} = \{C + \lambda \mid \lambda \in \mathbf{\Lambda}\}$ 是 C 形成的一个格填装, P 为 $\mathbf{\Lambda}$ 的基本平行四边形. 证明

$$d(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) = A(C)/A(P)\,.$$

4.2 证明对于任何凸体 C, 差区域 $D(C) = C + (-C)$ 为凸集且关于原点中心对称. 此外, 如果 p 是 $D(C)$ 的边界点, 则存在 $q, q' \in \mathrm{Bd}\, C$, 使得 $p = q - q'$.

4.3 证明任给一凸体, 必可构作其内接仿射正六边形.

4.4 证明半长平行四边形与半宽平行四边形均是广延平行四边形.

4.5 (Rogers, 1951) 证明平面的由凸体 C 的平移形成的填装的 (上) 密度至多为 $\delta_L(C)$, 即 C 的最稠密格填装的密度.

4.6 (G. Kuperberg, W. Kuperberg, 1990) 证明对于任何凸体 C, 存在由广延平行四边形生成的 C 所形成的最稠密双格填装 (见定义 4.6).

第 5 章　胞腔分解方法

第 3 章中讨论的 Thue 定理断言, 平面中全等圆盘填装的 (上) 密度不超过 $\pi/\sqrt{12}$, 即最稠密的格填装的密度. 利用相关证明可将这一结论推广到任意凸体全等拷贝形成的填装 (定理 3.2). 不过, 对于填装的所有元均为全等圆盘这一特殊情形, 证明可以大为简化. 这种简化得益于一个经事实证明在本领域其他问题研究中极为有用的概念.

5.1　Dirichlet–Voronoi 胞腔

定义 5.1　*在凸多边形区域 D 的内部给定 n 个点 $O_1, O_2, \cdots, O_n$, 令 D_i 表示 D 中距离 O_i 最近的点的全体, 即*

$$D_i = \{\, x \in D \mid \min_{1 \leqslant j \leqslant n} |x - O_j| = |x - O_i| \}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

*称 D_i 为 O_i 的***Dirichlet 胞腔***或***Voronoi 区域** (图 5.1).

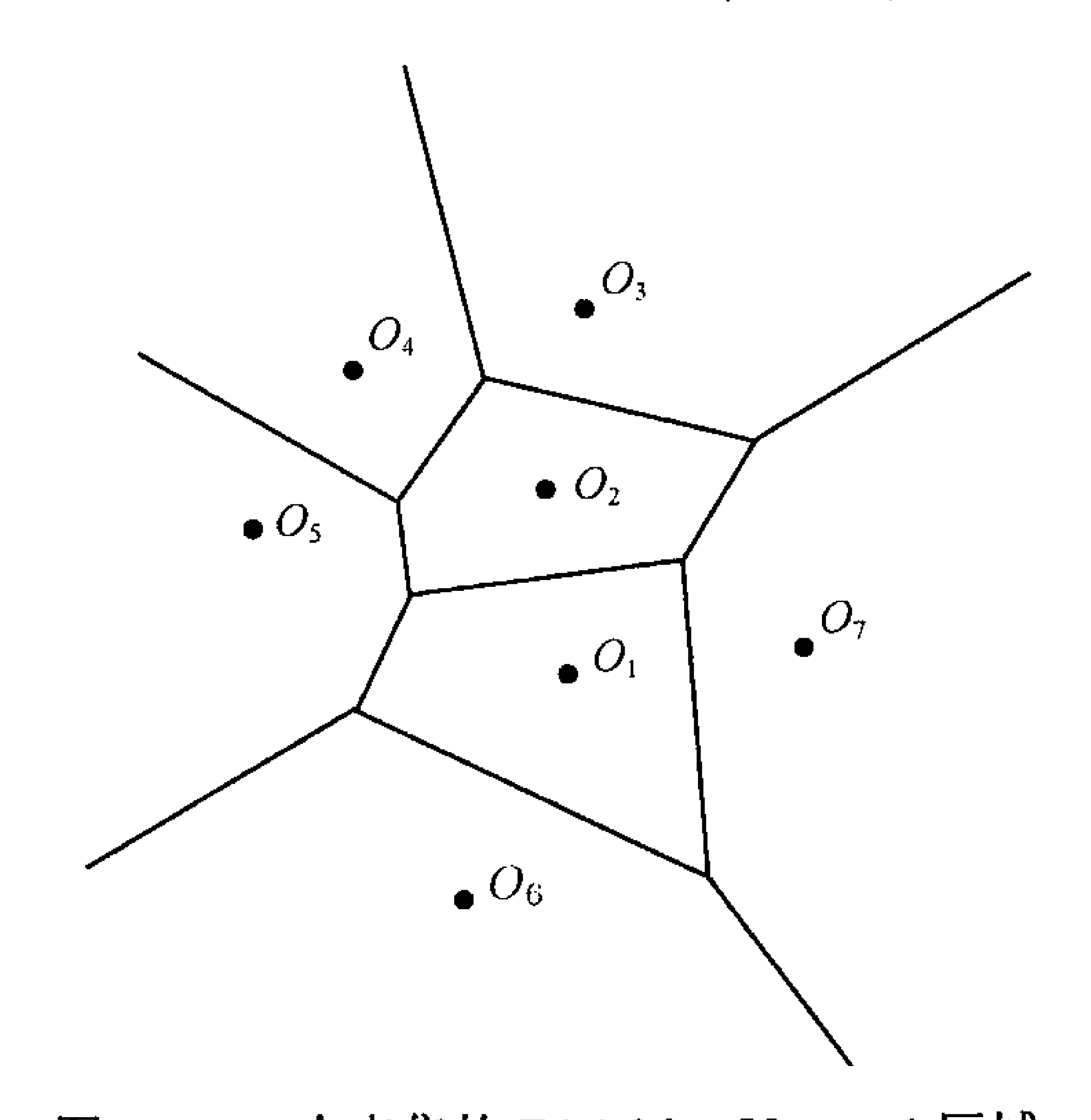


图 5.1　一个点集的 Dirichlet-Voronoi 区域

易知 $O_i \in D_i$, 且每一 D_i 均为凸多边形 (见习题 5.2). 显然, 任意两个不同的 D_i 无公共内点, 而所有的 D_i 覆盖了区域 D. 特别地, 如果 $D = H$ 为凸六边形, $\mathcal{C} = \{C_1, \cdots, C_n\}$ 为 D 中的单位圆盘填装, 记 C_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的中心为 O_i, 则易见每

个 Dirichlet 胞腔 D_i 均包含 C_i.

现记 D_i 的边数为 s_i, 由引理 3.3 证明中的分析可得

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \leqslant 6n.$$

注意到, 任意包含单位圆的 s 边形的面积至少为 $s\tan\pi/s$ (单位圆外切正 s 边形的面积), 故有

$$\begin{aligned} A(H) &= \sum_{i=1}^{n} A(D_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} s_i \tan\frac{\pi}{s_i} \\ &\geqslant n \cdot 6\tan\frac{\pi}{6}, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式由函数 $s\tan\pi/s$ 在 $s>0$ 时的凸性可得 (用简单的微分法即可验证). 因此 H 中填装 $\mathcal{C}$ 的密度满足

$$d(\mathcal{C}, H) = \frac{\sum_{i=1}^{n} A(C_i)}{A(H)} \leqslant \frac{n\pi}{n \cdot 6\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

Dirichlet-Voronoi 胞腔分解有一个值得注意的性质, 即下面这个结论是正确的. 利用这一性质可以给出 Thue 定理的一种全新证明.

引理 5.2　利用前述记法, 对所有的 $1 \leqslant i \leqslant n$, 均有

$$\frac{A(C_i)}{A(D_i)} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

由此立即可得

$$d(\mathcal{C}, H) = \frac{\sum_{i=1}^{n} A(C_i)}{\sum_{i=1}^{n} A(D_i)} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{12}}$$

(参见习题 5.1).

证明(梗概)　记 C_i 的外切正六边形为 H_i, H_i 的外接圆为 C_i'. 设 Dirichlet 胞腔 D_i 有 s_i 条边, 包含这些边的直线为 $\ell_1, \cdots, \ell_{s_i}$, O_i 到 $\ell_1, \cdots, \ell_{s_i}$ 的正交投影分别为 $x_1, \cdots, x_{s_i}$. 由于 O_i 关于 x_j 的对称点必为 $\mathcal{C}$ 中其他某个圆的圆心, 故两个这种圆心间的距离至少为 2. 因此对于所有的 $1 \leqslant j \neq k \leqslant s_i$, 均有

$$|x_j - x_k| \geqslant 1.$$

又因为 C_i' 的内接正七边形的边长约为 1.002, 不难看出 C_i' 至多包含 7 个不同的 x_j.

如果 C_i' 恰好包含 7 个不同的 x_j, 则由类似讨论可知所有这样的点必须 "非常接近" C_i' 的边界, 使得其对应的直线 ℓ_j 从 C_i' 中截去一个 "非常小的冠形区域" (面积至多为 0.1). 确切地说, 即

$$\begin{aligned}A(D_i) &\geqslant A(D_i \cap C_i') \geqslant A(C_i') - 7 \cdot \frac{1}{10}\\ &= \frac{4}{3}\pi - \frac{7}{10} > \sqrt{12} \qquad (\text{见习题 } 5.3).\end{aligned}$$

如果 C_i' 含有至多 6 个不同的 x_j 点, 则每个点所对应的直线 ℓ_j 从 C_i' 中截掉的冠形区域的面积至多为 $(A(C_i') - A(H_i))/6$, 从而

$$\begin{aligned}A(D_i) &\geqslant A(D_i \cap C_i') \geqslant A(C_i') - 6 \cdot \frac{A(C_i') - A(H_i)}{6}\\ &= A(H_i) = \sqrt{12}.\end{aligned}$$

□

注意到, 定理 3.14 的证明是建立在一个重要结论 (见引理 3.15) 的基础上的, 利用该引理可对凸体族中每个凸体 C_i 指派一个适当的多边形 R_i. 只有 C_i 是中心在 $O_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的全等圆盘这一特殊情形用到这一引理. 然而, 在此情形下可以选取 O_i 的 Dirichlet 胞腔与六边形 H 的交 $D_i \cap H$ 作为 R_i.

应用定理 3.14 可以解决下述关于 Dirichlet 胞腔分解的极值问题.

定理 5.3 (L. Fejes Tóth) *设 $O_1, \cdots, O_n$ 为平面上的 n 个点, H 为正六边形, f 为单调递增函数, 则*

$$\int_H f\Big(\min_{1\leqslant i\leqslant n} |x - O_i|\Big)\mathrm{d}x \geqslant n\int_{H'} f(|x|)\mathrm{d}x,$$

其中 H' 是以 $\mathbf{0}$ 为中心且满足 $A(H') = A(H)/n$ 的正六边形.

证明 只须对某 $r > 0$ 证明结论对如下形式的阶梯函数成立即可:

$$f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t \leqslant r,\\ 0, & t > r.\end{cases}$$

然而, 在此情形下欲证结论可化为定理 3.14 中不等式两边乘以 -1 的情形. 事实上, 令 C_i, C 分别表示以 O_i, O 为中心以 r 为半径的圆, 则有

$$\int_H f(\min_{1\leqslant i\leqslant n} |x - O_i|)\mathrm{d}x = -A\Big(\bigcup_{i=1}^n C_i \cap H\Big),$$

$$n\int_{H'} f(|x|)\mathrm{d}x = -nA(C \cap H') = -A(D \cap H),$$

由定理 3.14 即得结论. □

下面给出这个定理的一个很有趣的解释. 设想要在一个人口均匀分布的地区布设一定数目的商家, 让每一个商家仅为距其最近的居民供货. 换句话说, 就是让每一个商家为居住在其 Dirichlet 胞腔内的居民供货. 假设运输费用是距离的递增函数, 则定理 5.3 表明, 当这些商家的位置大体形成等边三角形格时平均运费最低.

5.2 阴影胞腔

下面介绍一种具有类似应用但却完全不同的胞腔分解 (L. Fejes Tóth, 1983).

定义 5.4 设凸体 $C_1, C_2, \cdots$ 形成平面中的填装, v 为一非零向量. 对于任意的 i, 定义 S_i 为满足下述条件的点 $x \in \mathbb{R}^2$ 的集合: 或 $x \in C_i$, 或以 x 为始点平行于 v 的射线与 $C_1 \cup C_2 \cup \cdots$ 的第一个交点属于 C_i, 此时称 S_i 为 C_i 的**阴影胞腔**.

现给出下述 Rogers (1951) 定理 (另见习题 4.5) 的另外一种简洁证明, 以此说明阴影胞腔分解的作用.

定理 5.5 (Rogers) 凸体 C 的平移形成的填装的 (上) 密度不超过 C 形成的最稠密格填装密度 $\delta_L(C)$.

注意到下述简单事实, 仅须对中心对称的凸体证明定理成立 (见习题 4.5 的解答).

引理 5.6 给定凸体 C, 令

$$C^\star = \frac{1}{2}[C + (-C)] = \left\{ \frac{c - c'}{2} \mid c, c' \in C \right\}$$

(见定义 4.2). 设 $\mathcal{L}$ 为平面上的向量集, 则

$$\mathcal{L} + C = \{\lambda + C | \lambda \in \mathcal{L}\}$$

为 (C 的平移形成的) 填装当且仅当 $\mathcal{L} + C^\star = \{\lambda + C^\star | \lambda \in \mathcal{L}\}$ 为 ($C^\star$ 平移形成的) 填装.

因此, $\mathcal{L} + C$ 为 (C 的平移形成的) 最大密度填装当且仅当 $\mathcal{L} + C^\star$ 为 ($C^\star$ 的平移形成的) 最大密度填装. 由此可知, 定理 5.5 对 C 成立, 当且仅当其对 $C^\star$ 成立.

同理, 显然仅须对如下的凸体 C 的集族证明定理 5.5 成立: $C^\star$ 可以穷尽所有中心对称凸体. 下面给出这样的一个集族.

定义 5.7 设 $p_1q_1p_2q_2p_3q_3$ 为对边平行的凸六边形, 且凸体 C 含于其内. 如果 p_1, p_2, p_3 位于 C 的边界上, 则称 C 为**三角的**. 此时 p_1, p_2, p_3 称为 C 的顶点 (图 5.2).

引理 5.8 对于任意中心对称的凸体 D, 存在三角凸体 C, 使得 $C^\star = D$, 其中 $C^\star = 1/2[C + (-C)]$.

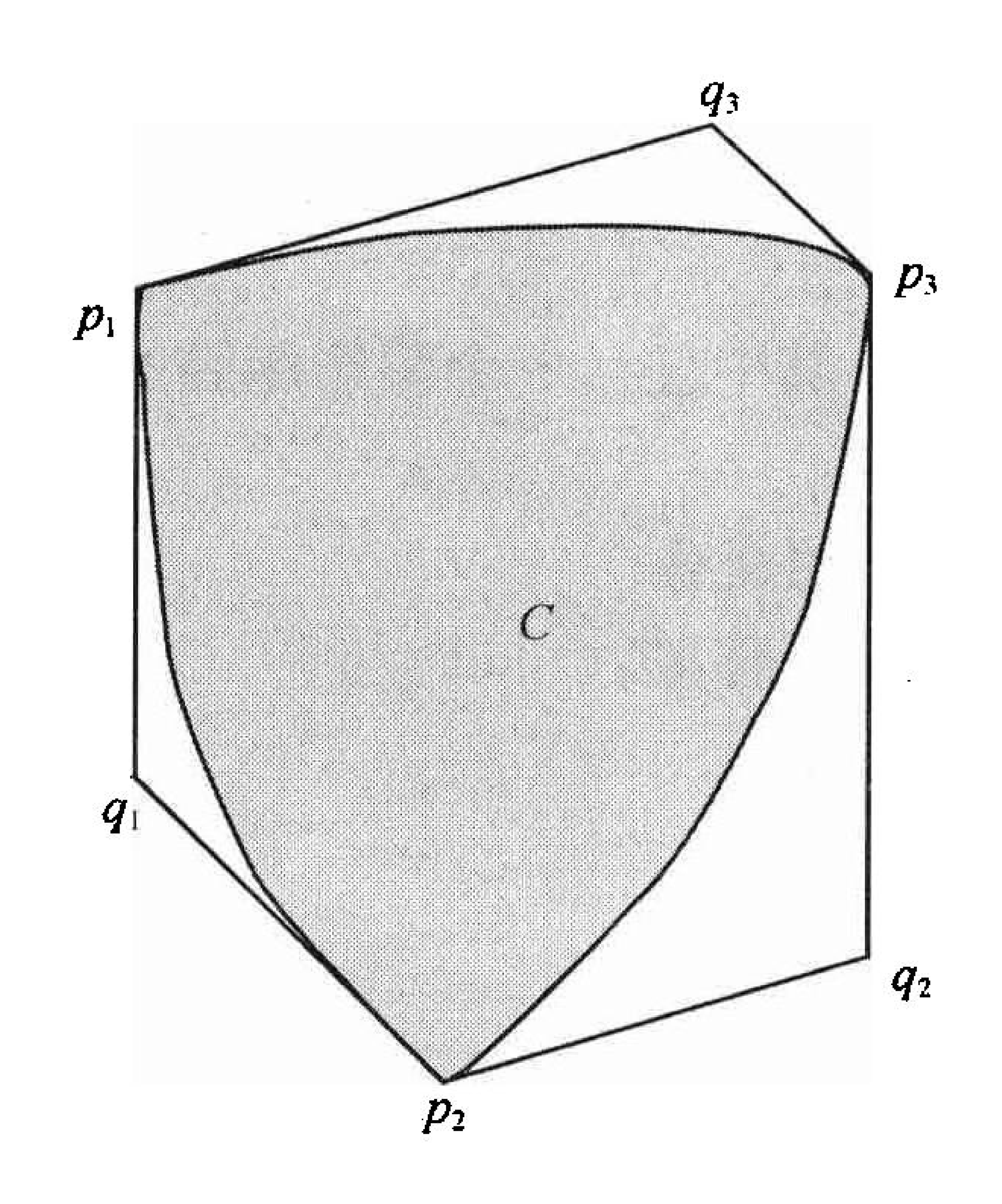


图 5.2 顶点为 p_1, p_2, p_3 的三角凸体

证明 设 D 的中心为 O, $r_1, \cdots, r_6$ 为内接于 D 且关于 O 中心对称的仿射正六边形的顶点 (见引理 4.3). 记 D 沿 $\overrightarrow{r_1r_2}$, $\overrightarrow{r_4r_3}$ 平移后所得凸体分别为 D', D'' (图 5.3). 注意到图中的阴影区域 $C_0 = D \cap D' \cap D''$ 为满足 $C_0 + (-C_0) = D$ 的三角凸体, 因此 $C = 2C_0$ 即为所求. □

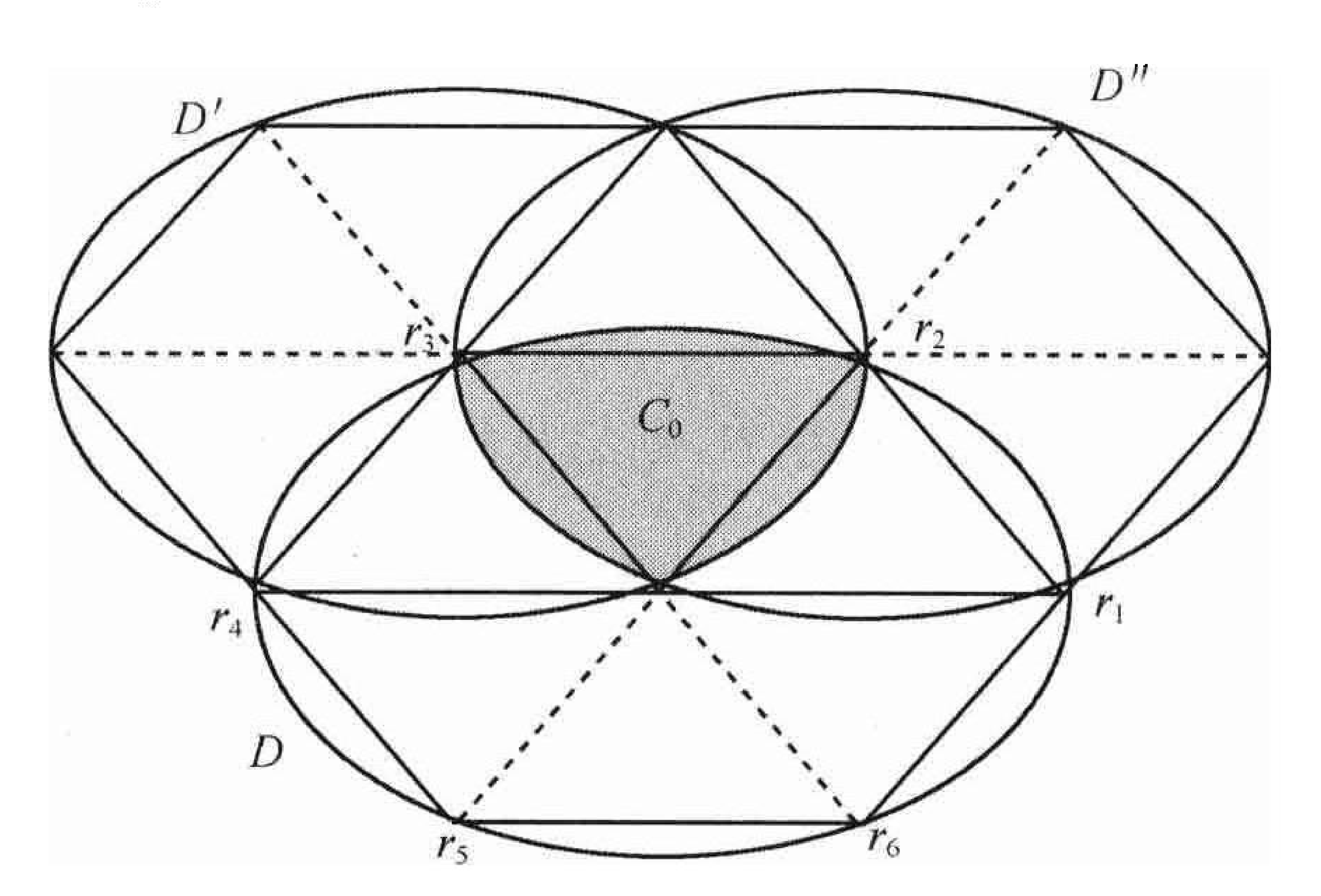


图 5.3 满足 $C_0 + (-C_0) = D$ 的三角凸体 C_0

定理 5.5 的证明 (L. Fejes Tóth) 仅须对顶点为 p_1, p_2, p_3 的三角凸体 C 证明定理. 现分别记 C 沿 $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ 的平移为 C', C'', 记由 C, C' 和 C'' 所围成的区域为 T (图 5.4). 不妨假设包含 C 的六边形中分别与 p_2, p_3 关联的对边是竖直的.

设 $C_1(=C), C_2, C_3, \cdots$ 形成一填装, 现考虑两种情形.

情形A: 任何 C_i 均不含 T 的内点.

设 v 为一竖直向下的向量, 则填装中与 $C = C_1$ 相对应的阴影胞腔 S_1 包含

$T \cup C_1$. 因此,

$$A(S_1) \geqslant A(T) + A(C),$$

且 C, C', C'' 生成一格填装, 其中任何一个阴影胞腔的面积 (从而基本平行四边形的面积) 等于 $A(T) + A(C)$.

情形 B: 存在 C_i 与 T 相交叠.

此时存在 C 的两个不交平移 $\hat{C}, \hat{\hat{C}}$ 同时与 C, C_i 相接触, 并且当 C 平移至 $\hat{C}$ 时, $\hat{\hat{C}}$ 将会随之平移至 C_i(图 5.5).

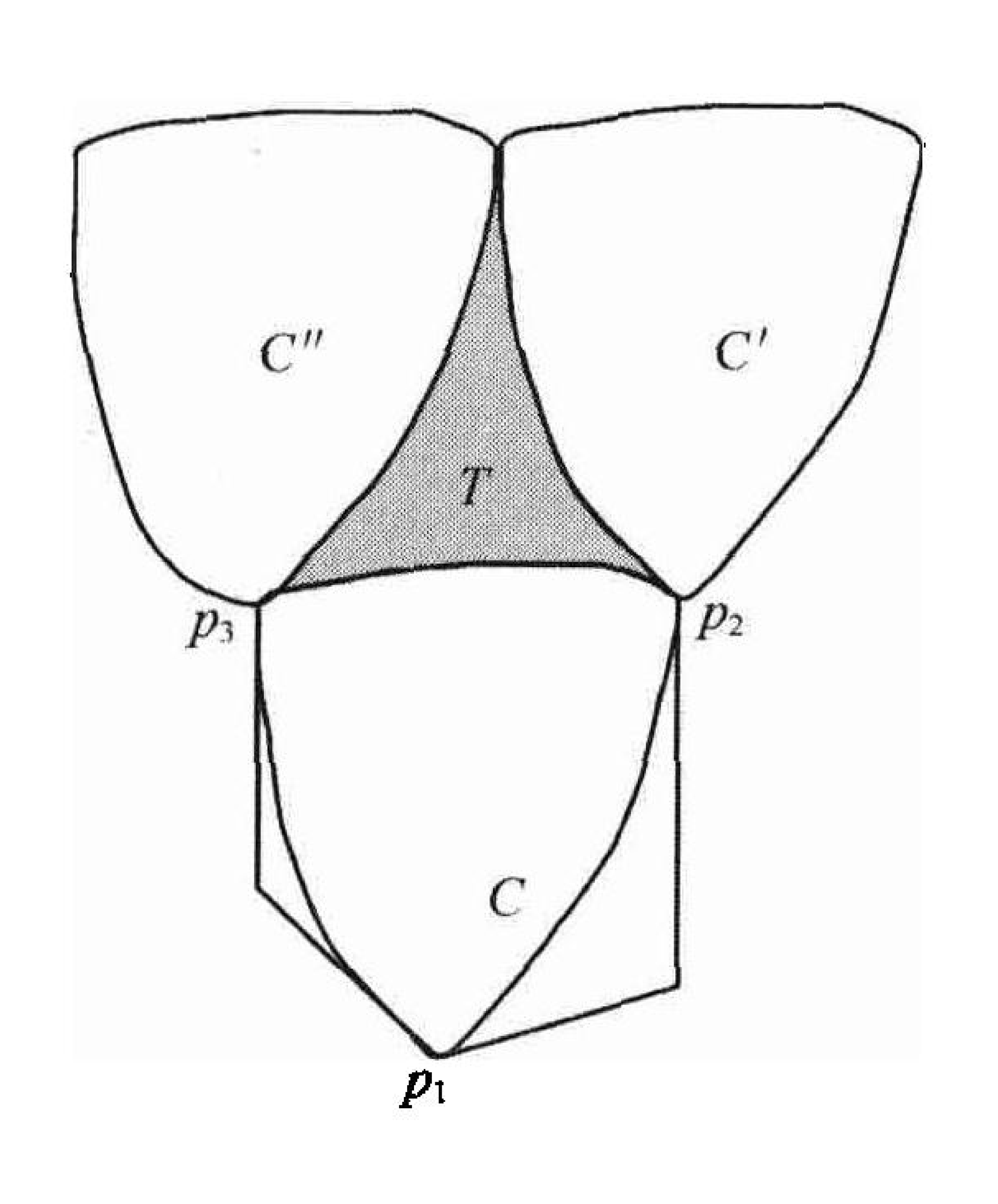


图 5.4 三角凸体 C 及其平移

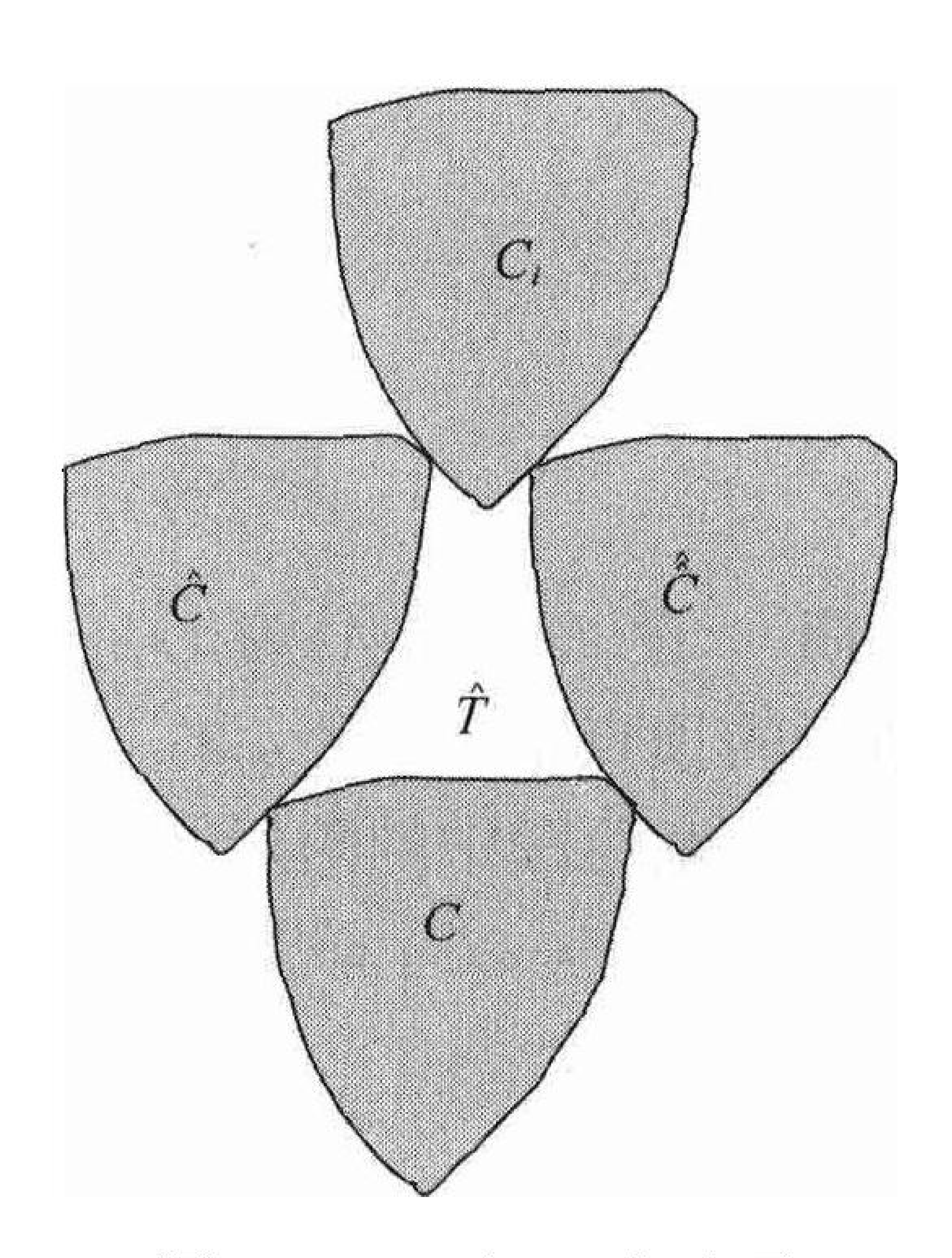


图 5.5 C_i 与 T 相交叠

现记 C, $\hat{C}$, C_i, $\hat{\hat{C}}$ 围成的区域为 $\hat{T}$, 则易见填装中任意元与 $\hat{T}$ 均不交叠, 从而

$$A(S_1) \geqslant A(\hat{T}) + A(C),$$

且这四个凸体又生成一格填装, 其中任一阴影胞腔的面积 (从而基本平行四边形的面积) 为 $A(\hat{T}) + A(C)$.

由此定理立即得证 (见习题 5.1). □

将定理 5.5 推广至非凸区域会是一个很有意义的问题. 对于体 C, 若 C 的任意平移形成的填装的上密度至多为最稠密的格填装密度, 则称 C 为**Rogers 区域**. Bezdek, Kertész (1987) [另参见文献 (Heppes, 1990; Schmitt, 1991)] 构造出一个非 Rogers 区域的连通体 C. 另外, Kertész (1987) 证明了一个凸体的两个相交平移的并总是 Rogers 区域, 关于这个问题, 除以上结果外, 几乎未见任何其他结果 (另见习题 5.4).

习　题

5.1　设 $\mathcal{C}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的凸体填装, 假设整个平面被剖分为 Jordan 可测集 (胞腔) $S_1, S_2, \cdots$, 其中每个 S_i 的内部至多含有一个 $C_i \in \mathcal{C}$, $A(C_i)/A(S_i) \leqslant \delta$, 且 S_i 的直径至多为 Δ (其中 Δ 和 δ 为不依赖于 i 的常数). 证明 $\mathcal{C}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的上密度至多为 δ.

5.2　证明平面上有限点集的 Dirichlet-Voronoi 胞腔为凸多边形 (其中某些为无界的).

5.3　详细证明引理 5.2.

5.4 (L. Fejes Tóth, 1985, 1986)　设 S_1, S_2 分别为在 p_1, p_2 点处支撑凸体 D 的两条竖直线, p_3 为 D 的边界上由 p_1, p_2 所确定的下半弧上的任意一点.

设 D', D'' 分别为 D 沿 $\overrightarrow{p_3p_1}$, $\overrightarrow{p_3p_2}$ 的平移. 记由 D', D'' 与 D 的下半弧 (由 p_1 和 p_2 确定) 所围成的区域为 R. 由 D 的下半弧与 R 内任一连接 p_1, p_2 的简单 Jordan 弧围成的体 C 称为**半凸的** (图 5.6).

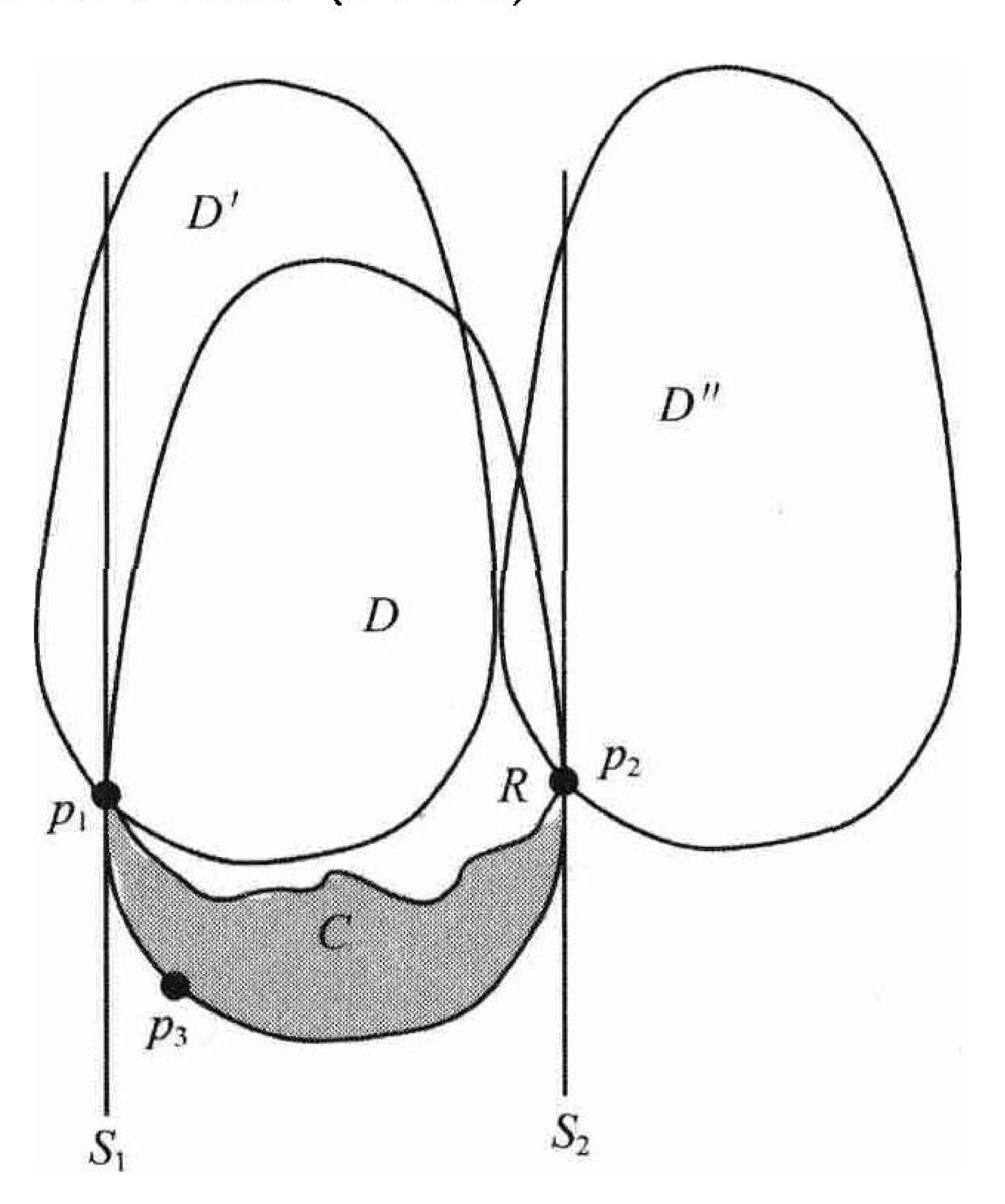


图 5.6　半凸体 C

证明每个半凸体 C 均为 Rogers 区域.

第 6 章　Blichfeldt 方法与 Rogers 方法

虽然所有关于填装和覆盖密度的概念和问题都很容易推广到高维空间 (见定义 3.1, 定义 3.5 与定义 3.11), 但对于凸体 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 的全等拷贝形成的最稠密的填装, 确定其密度 $\delta(C)$ 的一合理上界却极为困难, 即便对于 C 为单位球 B^d 这一特殊情形也不例外.

在 1831 年撰写的一则评论中, Gauss 证明了对于 $\mathbb{R}^3$ 中由单位球形成的最稠密的**格填装**, 其密度 $\delta_L(B^3) = \pi/\sqrt{18} \approx 0.7404$ (Gauss, 1836). 但迄今为止仍无法证明 $\delta(B^3) = \delta_L(B^3)$ 是否成立 (尽管毫无疑问是正确的). [最近欲确立此等式的两次不同尝试可参见文献 (Hsiang, 2001; Hales, 2005). 见图 6.1.]

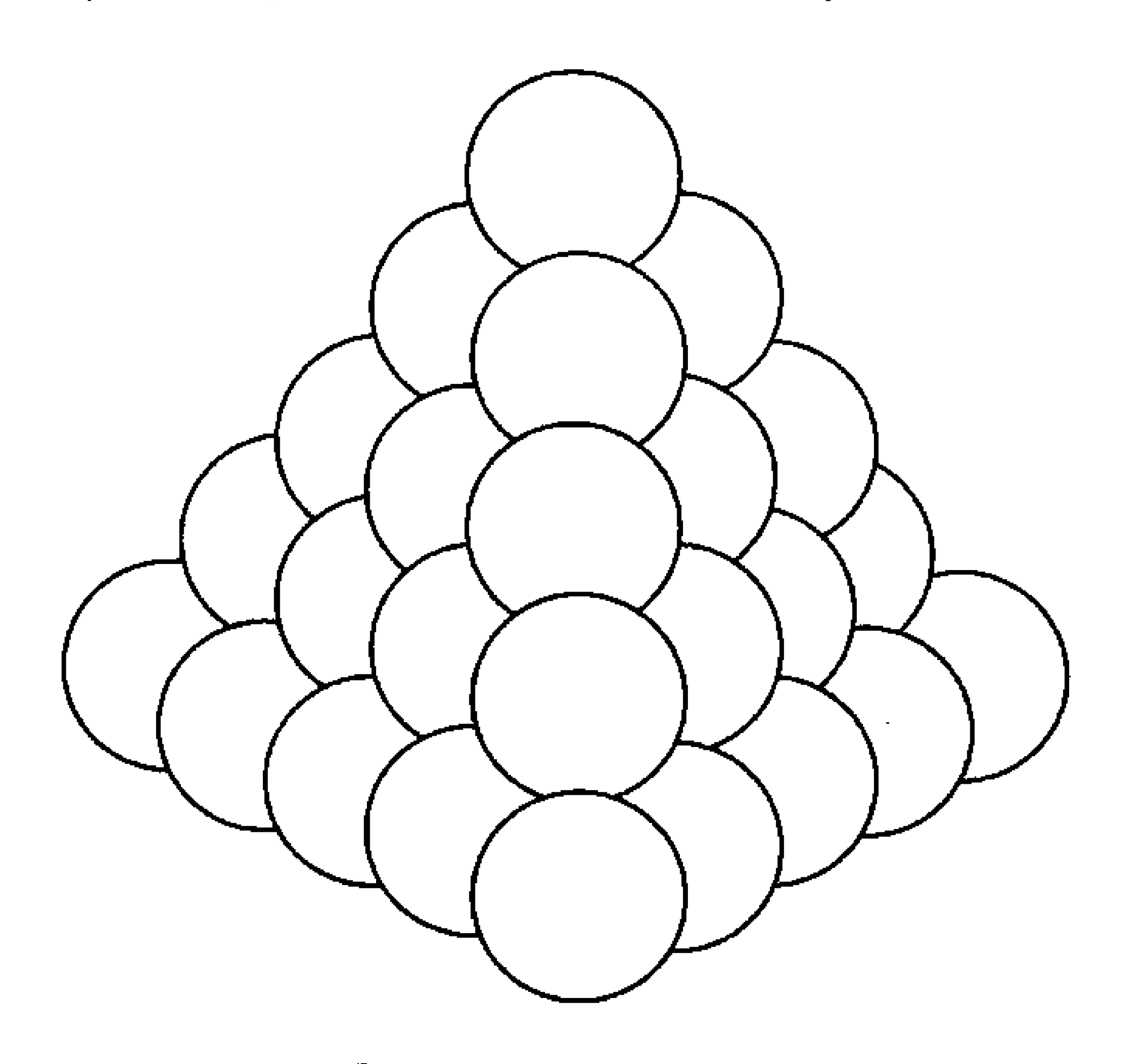


图 6.1　$\mathbb{R}^3$ 中球形成的最稠密格填装

在高维空间中, 情况变得更加复杂. 由若干 "试验" 看来, $\delta(B^d) = \delta_L(B^d)$ 对所有的 d 成立几乎是不可能的, 这一事实即说明了高维空间中情况的复杂性. 事实上, 根本没有理由相信总存在一个球填装既具有最大密度又是**周期性的** (即在适当的平移下保持不变). 本章旨在给出 $\delta(B^d)$ 的一些上界.

6.1　Blichfeldt 放大法

Blichfeldt (1929) 首次给出 $\delta(B^d)$ 的一个非平凡上界, 其主要思想是把填装中每一个球用一个同心但质量分布不均匀的更大的球替换, 使得空间中每一点处的总质量密度至多为 1. 从而有下述定理.

定理 6.1 (Blichfeldt) 设 $D(r) \geqslant 0$ 为在区间 $[0, r_0]$ 上连续的密度函数, 当 $r > r_0$ 时, $D(r) = 0$. 假设对于任意单位球填装 $\{B^d + c_i \mid i = 1, 2, \cdots\}$ 与任意的 $x \in \mathbb{R}^d$, 均有

$$\sum_{i=1}^{\infty} D(|x - c_i|) \leqslant 1,$$

则最稠密的单位球填装的密度满足

$$\delta(B^d) \leqslant \frac{1}{d\displaystyle\int_0^{r_0} r^{d-1} D(r) \mathrm{d}r}.$$

证明 设 $B^d(R) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leqslant R\}$ 为球心在原点半径为 R 的球 [即 $B^d(R) = RB^d(1) = RB^d$]. 设 $\{B^d + c_i \mid i \in I\}$ 为 $B^d(R)$ 中的单位球填装 (注意, I 必须为一有限集), 则每一个放大了的球 $B^d(r_0) + c_i$ 均含于球 $B^d(R + r_0 - 1)$. 由定理的条件, 可知

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(B^d(R + r_0 - 1)) &= \int_{B^d(R+r_0-1)} 1 \mathrm{d}x \\
&\geqslant \sum_{i \in I} \int_{B^d(R+r_0-1)} D(|x - c_i|) \mathrm{d}x \\
&= |I| \int_{\mathbb{R}^d} D(|x|) \mathrm{d}x \\
&= |I| \int_0^{r_0} r^{d-1} s_{d-1} D(r) \mathrm{d}r,
\end{aligned}$$

其中, s_{d-1} 表示单位球 B^d 的表面积 (图 6.2). 显然, $\mathrm{Vol}\,B^d = s_{d-1}/d$, 因此 $B^d(R)$ 中的填装 $\{B^d + c_i \mid i \in I\}$ 的密度至多为

$$\begin{aligned}
\frac{|I| \mathrm{Vol}\,B^d}{\mathrm{Vol}\,(B^d(R))} &= \frac{\mathrm{Vol}\,(B^d(R + r_0 - 1))}{\mathrm{Vol}\,(B^d(R))} \cdot \frac{|I|\,\mathrm{Vol}\,(B^d)}{\mathrm{Vol}\,(B^d(R + r_0 - 1))} \\
&\leqslant \left(1 + \frac{r_0 - 1}{R}\right)^d \frac{|I| s_{d-1}/d}{|I| \displaystyle\int_0^{r_0} r^{d-1} s_{d-1} D(r) \mathrm{d}r} \\
&= \left(1 + \frac{r_0 - 1}{R}\right)^d \frac{1}{d \displaystyle\int_0^{r_0} r^{d-1} D(r) \mathrm{d}r}.
\end{aligned}$$

当 $R \to \infty$ 时取极限, 即得欲求的 $\delta(B^d)$ 的上界. □

引理 6.2 (Blichfeldt 不等式) 对任意的点 $x, c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}^d$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |c_i - c_j|^2 \leqslant 2n \sum_{i=1}^{n} |x - c_i|^2.$$

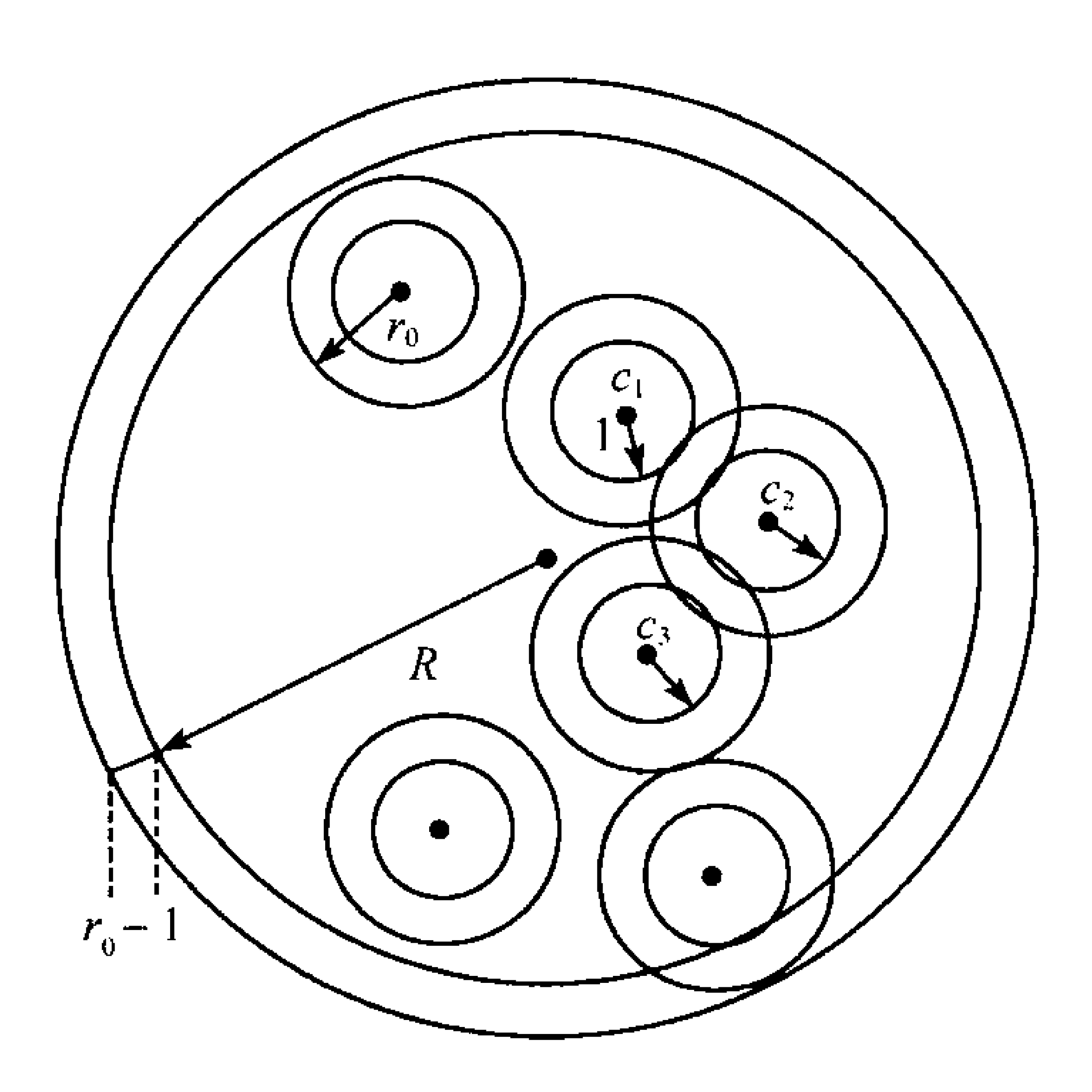


图 6.2　定理 6.1 证明图示

证明　不妨假设 $x=0$, 否则可将每个点平移 $-x$.

对于 $d=1$, 因为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_i-c_j|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_i^2+c_j^2-2c_ic_j)\\ &= 2n\sum_{i=1}^{n}c_i^2-2\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}c_j\right)\\ &= 2n\sum_{i=1}^{n}c_i^2-2\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)^2\\ &\leqslant 2n\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2,\end{aligned}$$

故结论显然成立.

对任意的 d, 令 $c_i=(c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{id})$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_i-c_j|^2 &= \sum_{k=1}^{d}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ik}-c_{jk})^2\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{d}2n\sum_{i=1}^{n}c_{ik}^2\\ &= 2n\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2.\end{aligned}$$

从而结论也成立.　□

推论 6.3 设 $\mathbb{R}^d$ 中最稠密的单位球填装的密度为 $\delta(B^d)$, 则

$$\delta(B^d) \leqslant \frac{d+2}{2} 2^{-d/2}.$$

证明 令

$$D(r) = \begin{cases} 1 - \dfrac{r^2}{2}, & r \leqslant \sqrt{2}, \\ 0, & r > \sqrt{2}. \end{cases}$$

易验证此密度函数满足定理 6.1 的条件. 事实上, 设 $\{B^d + c_i \mid i = 1, 2, \cdots\}$ 为任意单位球填装, $x \in \mathbb{R}^d$. 不妨假设已将 c_i 按其与 x 的距离的递增顺序标号, 即 $|x - c_i| \leqslant \sqrt{2}$ 当且仅当 $i \leqslant n$(对某个整数 n). 根据引理 6.2 可知

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} D(|x - c_i|) &= \sum_{i=1}^{n} D(|x - c_i|) \\ &= n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |x - c_i|^2 \\ &\leqslant n - \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |c_i - c_j|^2 \\ &\leqslant n - \frac{1}{4n} n(n-1)4 = 1. \end{aligned}$$

另外,

$$d \int_0^{\sqrt{2}} r^{d-1} D(r) \mathrm{d}r = \left[r^d - \frac{d}{2(d+2)} r^{d+2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2}{d+2} 2^{d/2},$$

由定理 6.1 即证得结论. □

下面给出 G. Fejes Tóth, W. Kuperberg (1993b) 对定理 6.1 的推广, 这一推广使得我们可以利用 Blichfeldt 放大法, 确定一大类凸体 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 的全等拷贝所成填装的密度的非平凡上界.

定义 6.4 给定凸体 $C \subseteq \mathbb{R}^d$, 设 $r(C)$ 为含于 C 的最大球的半径. 对于任意的 $\rho \leqslant r(C)$, 令 $C_{-\rho}$ 表示 C 的半径为 ρ 的**内部平行体**, 即所有满足以下条件的点 $c \in C$ 的集合: 以 c 为球心以 ρ 为半径的球完全含于 C.

$$C_{-\rho} = \{c \in C \mid c + \rho B^d \subseteq C\}.$$

另外, 对于任意一点 $x \in \mathbb{R}^d$, 令 $\eta(C, x)$ 表示 C 中距离 x 最近的 (唯一) 点 (见习题 6.2).

定理 6.5 (G. Fejes Tóth-W. Kuperberg) 设 $D(r) \geqslant 0$ 为在区间 $[0, r_0]$ 上连续的密度函数, 当 $r > r_0$ 时 $D(r) = 0$. 假设对于任意单位球填装 $\{B^d + c_i \mid i = 1, 2, \cdots\}$

及任意的 $x \in \mathbb{R}^d$, 均有

$$\sum_{i=1}^{\infty} D(|x - c_i|) \leqslant 1.$$

此外, 设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 为凸体, $\delta(C)$ 为 C 的全等拷贝在 $\mathbb{R}^d$ 中所成的最稠密填装的密度, 定义函数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = D\left(\left|\frac{x - \eta(C_{-\rho}, x)}{\rho}\right|\right),$$

其中 $\rho \leqslant r(C)$ 为固定的数, 则

$$\delta(C) \leqslant \frac{\operatorname{Vol} C}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}x}.$$

本定理的证明易由定理 6.1 的证明推广而得, 作为习题留给读者 (见习题 6.3).

6.2 Rogers 单纯形界

下面介绍 Rogers (1958, 1964) 对 Blichfeldt 的 $\mathbb{R}^d$ 中球填装密度上界所作的一个精妙改进. Rogers 的方法依据的是 Blichfeldt 不等式 (见引理 6.2) 以及对第 3 章所讨论的 Dirichlet-Voronoi 胞腔分解方法的严密分析. 有趣的是, 这种方法不仅可以再次推得平面上的 Thue 定理 (见推论 3.4, 当 C 为圆盘时), 而且还可提供 $\mathbb{R}^3$ 中一个非常好的上界.

设 $\{c_1, c_2, \cdots\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的无限点集, 单位球集 $\{B^d + c_i \mid i = 1, 2, \cdots\}$ 形成一填装. 因证明技巧的需要, 本章始终假设这一填装是适度稠密的, 即任一以 R 为半径的球至少含有一个 c_i, 其中 $R > 0$ 为一常数. 在这些条件下易知, **Dirichlet 胞腔**

$$D(c_i) = \{\, x \in \mathbb{R}^d \mid \min_j |x - c_j| = |x - c_i| \}$$

是直径至多为 $2R$ 的 (有界) 凸多胞形, 它们填满整个空间, 既无空隙, 也无 (满维) 交叠.

定理 6.6 设 $\{B^d + c_i \mid i = 1, 2, \cdots\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球填装, $D(c_i)$ 为 c_i 的 Dirichlet胞腔, 则 c_i 与 $D(c_i)$ 的一个 $(d-k)$ 维面所导出的平坦集(flat) 之间的距离至少为

$$\sqrt{2k/(k+1)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant d.$$

证明 令 x 为 $D(c_i)$ 的一个 $(d-k)$ 维面所导出的平坦集上的一点, 则 x 与包括 c_i 在内的至少 $k+1$ 个球心 c_j 等距离, 不妨假设这些球心分别为 $c_1, c_2, \cdots, c_{k+1}$,

其中 $c_i = c_1$. 根据 Blichfeldt 不等式 (见引理 6.2) 可知

$$\begin{aligned}2(k+1)^2|x-c_1|^2 &= 2(k+1)\sum_{j=1}^{k+1}|x-c_j|^2\\ &\geqslant \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{h=1}^{k+1}|c_j-c_h|^2\\ &\geqslant 4k(k+1).\end{aligned}$$

从而

$$|x-c_i| = |x-c_1| \geqslant \sqrt{\frac{2k}{k+1}},$$

结论得证. □

下面讨论单个的 Dirichlet 胞腔, 不妨记其为 $D(c_1)$. 对于 $\mathbb{R}^d$ 中任意给定的集合 (或点) $A, B, C, \cdots$, 设 $\mathrm{conv}\{A, B, C, \cdots\}$ [$=\mathrm{conv}(A\cup B\cup C\cup\cdots)$]表示 $A\cup B\cup C\cup\cdots$ 的凸包. 现将 $D(c_1)$ 按下述方法剖分为有限个单纯形:

令 $v_0 = c_1$, 将 $D(c_1)$ 剖分为棱锥 $\mathrm{conv}\{v_0, F_{d-1}\}$, 其中 F_{d-1} 为 $D(c_1)$ 的 $(d-1)$ 维面 (刻面).

现利用关于 k 的归纳法逐次进行剖分. 假设对于某个 $1 \leqslant k < d$, $D(c_1)$ 已经剖分为形如

$$\mathrm{conv}\{v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}, F_{d-k}\}$$

的多胞形, 其中 F_{d-k} 为 $D(c_1)$ 的 $(d-k)$ 维面, 每一点 $v_j (1 \leqslant j \leqslant k-1)$ 位于 $D(c_1)$ 的包含

$$\mathrm{conv}\{v_j, v_{j+1}, \cdots, v_{k-1}, F_{d-k}\}$$

的 $(d-j)$ 维面内, 且 v_j 为此面中距离 c_1 最近的点.

取 F_{d-k} 中距离 c_1 最近的点为 v_k, v_k 未必是 $D(c_1)$ 的顶点. 如果 $k < d$, 则将 $\mathrm{conv}\ \{v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}, F_{d-k}\}$ 剖分为较小的部分 $\mathrm{conv}\{v_0, v_1, \cdots, v_k, F_{d-k-1}\}$, 其中 F_{d-k-1} 取遍 F_{d-k} 中不含 v_k 的所有 $(d-k-1)$ 维面.

最后, 对于 $k = d$, 可将 $D(c_1)$ 剖分为具有下面引理所述性质的单纯形

$$\mathrm{conv}\{v_0, v_1, \cdots, v_{d-1}, F_0\} = \mathrm{conv}\{v_0, v_1, \cdots, v_d\}.$$

引理 6.7 Dirichlet *胞腔* $D(c_1)$ *可以剖分为形如*

$$\mathrm{conv}\{v_0, v_1, \cdots, v_d\}$$

的单纯形, 其中 $v_0 = c_1$, *且*

(i) v_k 位于 $D(c_1)$ 的含有 $v_k, v_{k+1}, \cdots, v_d$ 的 $(d-k)$ 维面内, 且为此面中距离 c_1 最近的点 $(1 \leqslant k \leqslant d)$;

(ii) 对于任意的 $1 \leqslant k \leqslant j \leqslant d$, 内积

$$\langle v_k - v_0, v_j - v_0 \rangle \geqslant \frac{2k}{k+1}.$$

证明　由构造立即可得 (i). 根据定理 6.6, 当 $k=j$ 时, (ii) 成立.

现假设 $k<j$, 则由 (i) 可知 v_k 为 $D(c_1)$ 的含有 v_j 的某个面中距离 $c_1=v_0$ 最近的唯一的点. 因此, 对于所有的 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 有

$$|v_k + \lambda(v_j - v_k) - v_0|^2 \geqslant |v_k - v_0|^2.$$

从而可知对于任意小正数 λ,

$$\langle v_k - v_0, v_j - v_k \rangle \geqslant -\frac{\lambda}{2}|v_j - v_k|^2.$$

所以可以断言

$$\langle v_k - v_0, v_j - v_k \rangle \geqslant 0,$$

从而

$$\begin{aligned}\langle v_k - v_0, v_j - v_0 \rangle &= \langle v_k - v_0, v_k - v_0 \rangle + \langle v_k - v_0, v_j - v_k \rangle \\ &\geqslant \frac{2k}{k+1}.\end{aligned}$$

□

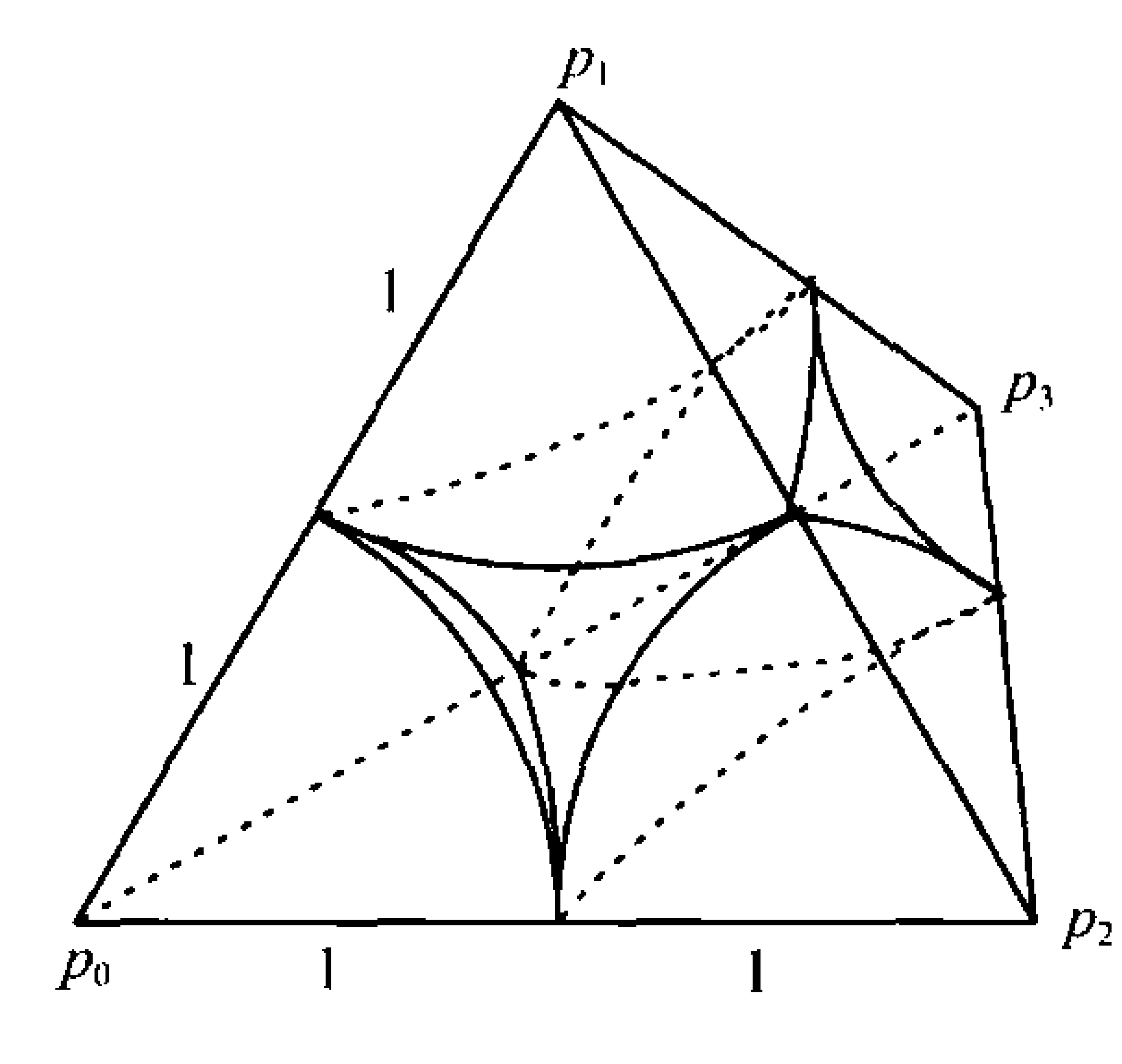


图 6.3　σ_d 为单纯形中被球覆盖部分所占的比例

现在即可证明 Rogers 得到的 $\delta(B^d)$ 的上界, 这里 $\delta(B^d)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中最稠密的单位球填装的密度.

定理 6.8 (Rogers)　设 $S^d = \text{conv}\{p_0, p_1, \cdots, p_d\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中边长为 2 的正则单纯形. 以 S^d 的每一个顶点为球心作单位球, 令 σ_d 表示 S^d 被这些球覆盖部分的体积与 S^d 体积的比率 (图 6.3). 若 $\delta(B^d)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中最稠密的单位球填装的密度, 则有

$$\delta(B^d) \leqslant \sigma_d.$$

证明　设 $\{B^d + c_i \mid i = 1, 2, \cdots\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中密度为 $\delta(B^d)$ 的单位球填装, 且假设此填装是**极大的**, 即不能再添加与所有球均不交的单位球. 此时 Dirichlet 胞腔 $D(c_i)$ 构成整个空间的一个剖分, 且每个胞腔 $D(c_i)$ 的直径至多为 4.

另外, 将每个胞腔 $D(c_i)$ 剖分为如引理 6.7 中所述的单纯形, 则只须证明每个单纯形中填装的密度至多为 σ_d (平面的情形见习题 5.1).

现选定这样的一个单纯形, 如 $T = \operatorname{conv}\{v_0, v_1, \cdots, v_d\} \subseteq D(c_1)$. 欲证

$$\frac{\operatorname{Vol}((B^d + c_1) \cap T)}{\operatorname{Vol} T} \leqslant \sigma_d$$

(注意到若 $i \neq 1$, 则 $\operatorname{Vol}((B^d + c_i) \cap T) = 0$).

设 $S = S^d$ 是嵌入 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中边长为 2, 顶点为 $(\sqrt{2}, 0, 0, \cdots, 0)$, $(0, \sqrt{2}, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $(0, 0, 0, \cdots, \sqrt{2})$ 的 d 维单纯形. 按下述方式将 S 剖分为 $(d+1)!$ 个全等的 d 维单纯形 (图 6.4): 任选 S 的一个顶点作为 u_0. 如果已对某 $k \leqslant d$ 选取了 $u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}$, 则选取 S 的包含点 $u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}$ 的 $d-k+1$ 个 k 维面中某个面的形心为 u_k. 特别地, 其中一个单纯形 S' 的顶点为

$$\begin{aligned}
u_0 &= (\sqrt{2}, 0, \cdots, 0), \\
u_1 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \cdots, 0\right), \\
u_2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \cdots, 0\right), \\
&\vdots \\
u_d &= \left(\frac{\sqrt{2}}{d+1}, \frac{\sqrt{2}}{d+1}, \frac{\sqrt{2}}{d+1}, \cdots, \frac{\sqrt{2}}{d+1}\right).
\end{aligned}$$

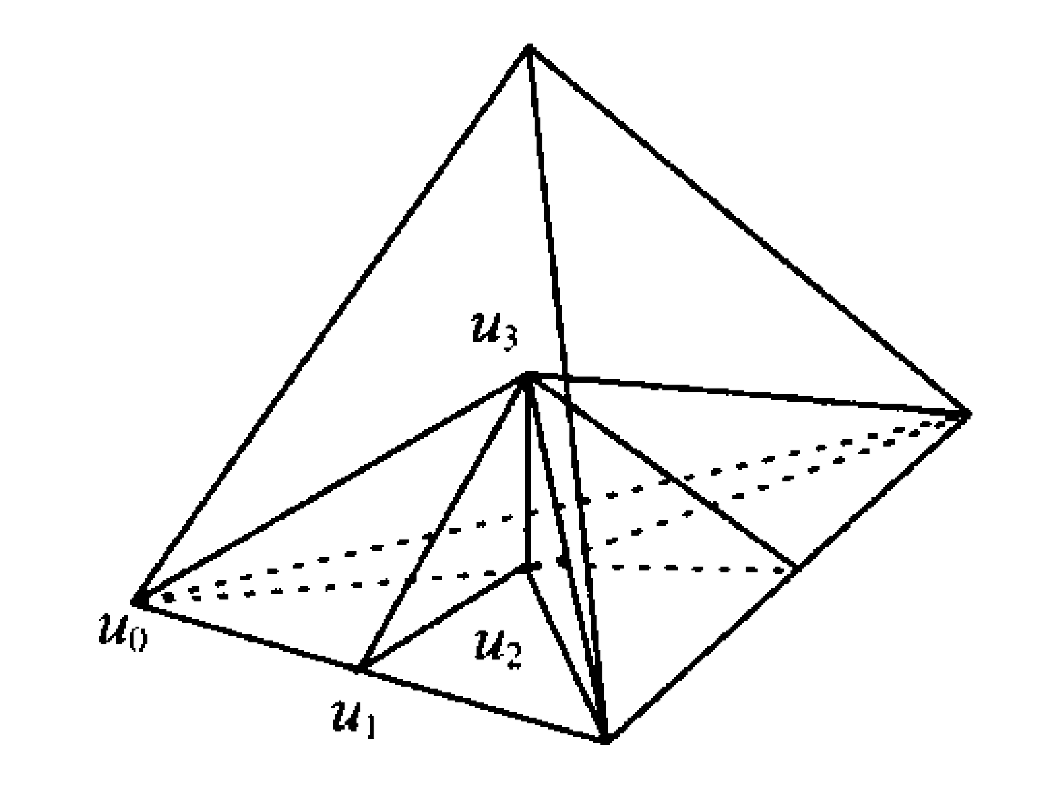


图 6.4 S 剖分为 $(d+1)!$ 个较小的单纯形

现易验证

$$\langle u_k - u_0, u_j - u_0 \rangle = \frac{2k}{k+1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant j \leqslant d,$$

因此由引理 6.7(ii) 可知, 对于所有的 $1 \leqslant k \leqslant j \leqslant d$, 有

$$\langle v_k - v_0, v_j - v_0 \rangle \geqslant \langle u_k - u_0, u_j - u_0 \rangle.$$

现考虑将 T 映射到 S', 且使得 $L(v_k) = u_k$ $(0 \leqslant k \leqslant d)$ 的仿射变换 $L: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d+1}$. 即

$$L: v_0 + \sum_{k=1}^{d} \lambda_k (v_k - v_0) \to u_0 + \sum_{k=1}^{d} \lambda_k (u_k - u_0).$$

任意给定 T 与单位球 $B^d + c_1 = B^d + v_0$ 交中的点 $v = v_0 + \sum_{k=1}^{d} \lambda_k (v_k - v_0)$, 有 $\lambda_k \geqslant 0$, $|v - v_0|^2 \leqslant 1$. 现令 $u = L(v)$, 则有

$$\begin{aligned}|u-u_0|^2 &= \sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\lambda_k\lambda_j\langle u_k-u_0, u_j-u_0\rangle \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\lambda_k\lambda_j\langle v_k-v_0, v_j-v_0\rangle \\ &= |v-v_0|^2 \leqslant 1.\end{aligned}$$

注意到 L 保持两个体积比率不变的事实, 可以断言

$$\frac{\operatorname{Vol}((B^d+c_1)\cap T)}{\operatorname{Vol} T} \leqslant \frac{\operatorname{Vol}((B^{d+1}+u_0)\cap S')}{\operatorname{Vol} S'}.$$

然而, 由于 S 被剖分为 $(d+1)!$ 个全等的单纯形 S', 故

$$\frac{\operatorname{Vol}((B^{d+1}+u_0)\cap S')}{\operatorname{Vol} S'} = \frac{\operatorname{Vol}\left(\bigcup_{k=0}^{d}((B^{d+1}+p_k)\cap S)\right)}{\operatorname{Vol} S} = \sigma_d,$$

其中 p_k, $0 \leqslant k \leqslant d$, 表示 S 的顶点. □

利用一些冗长 (但常规) 的计算可以证得, 当 $d\to\infty$ 时,

$$\sigma_d = \left[\frac{1}{e}+o(1)\right] d\cdot 2^{-d/2}.$$

这表明, 对于较大的 d 值, Rogers 所得的上界仅比 Blichfeldt 的上界 (见推论 6.3) 优化了一个因子 $2/e$ (见习题 6.5).

L. Fejes Tóth (1959b) 猜想定理 6.8 成立, 之后 Baranovskiĭ (1964) 再次发现这一结论. 在很长一段时间里人们一直认为对较大的 d 值, Blichfeldt 与 Rogers 的估计大体是渐近最优的. 然而, 事实证明情形恰恰相反. 事实上, 在低维的 d 维空间中, Rogers 的结论非常强, 至今仍未见用其他方法可以改进此界 [唯一的例外是 $d=3$ 的情形, Lindsey(1986) 和 Muder(1988, 1993), 也许还有 Hsiang(1993) 改进了这种情形下的界 $\delta(B^3)\leqslant 0.7796\cdots$] 对于高维空间, Sidelnikov (1973, 1974) 与 Levenštein (1975) 改进了 Rogers 的结果, 目前已知的最佳渐近结果是 Kabatjanskiĭ, Levenštein (1978) 得到的: 当 $d\to\infty$ 时,

$$\delta(B^d) \leqslant 2^{-0.599d+o(d)}.$$

对于 $\mathbb{R}^d$ 中单位球覆盖的最小密度, Coxeter et al. (1959) 得到了一个类似于定理 6.8 的界.

定理 6.9 (Coxeter et al., 1959)　*设 $S^d=\operatorname{conv}\{p_0,p_1,\cdots,p_d\}$ 为内接于单位球 $B^d\subseteq\mathbb{R}^d$ 的正则单纯形. 以 S^d 的每一个顶点为球心作单位球, 记 τ_d 为这些球含*

于 S^d 中那些部分的体积之和与 S^d 体积的比率, 且设 $\vartheta(B^d)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中最稀疏的单位球覆盖的密度, 则

$$\vartheta(B^d) \geqslant \tau_d .$$

本定理的证明与定理 6.8 的证明类似, 其主要区别是必须考虑的不再是 $\mathbb{R}^d$ 的 Dirichlet 胞腔分解, 而是一个称为**Delaunay 三角剖分**的分解.

定义 6.10 设 $C = \{c_1, c_2, \cdots\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中无聚点的点集, 且并非所有点全在同一个超平面内. 设 $C' \subseteq C$ 为满足下述条件的极大子集: 存在一闭球 B, 其内部不含 C 的点且 $B \cap C = C'$. 记 $\tilde{D}(C') = \operatorname{conv} C'$, 则称多胞形 $\tilde{D}(C')$ 为与 C' 相关的**Delaunay 胞腔**. 若将每一个 Delaunay 胞腔划分为单纯形 (不增加新的顶点), 则得到 $\operatorname{conv} C$ 的一个单纯形划分, 称之为 C 的**Delaunay 三角剖分** (Delaunay, 1934) (示例见图 6.5).

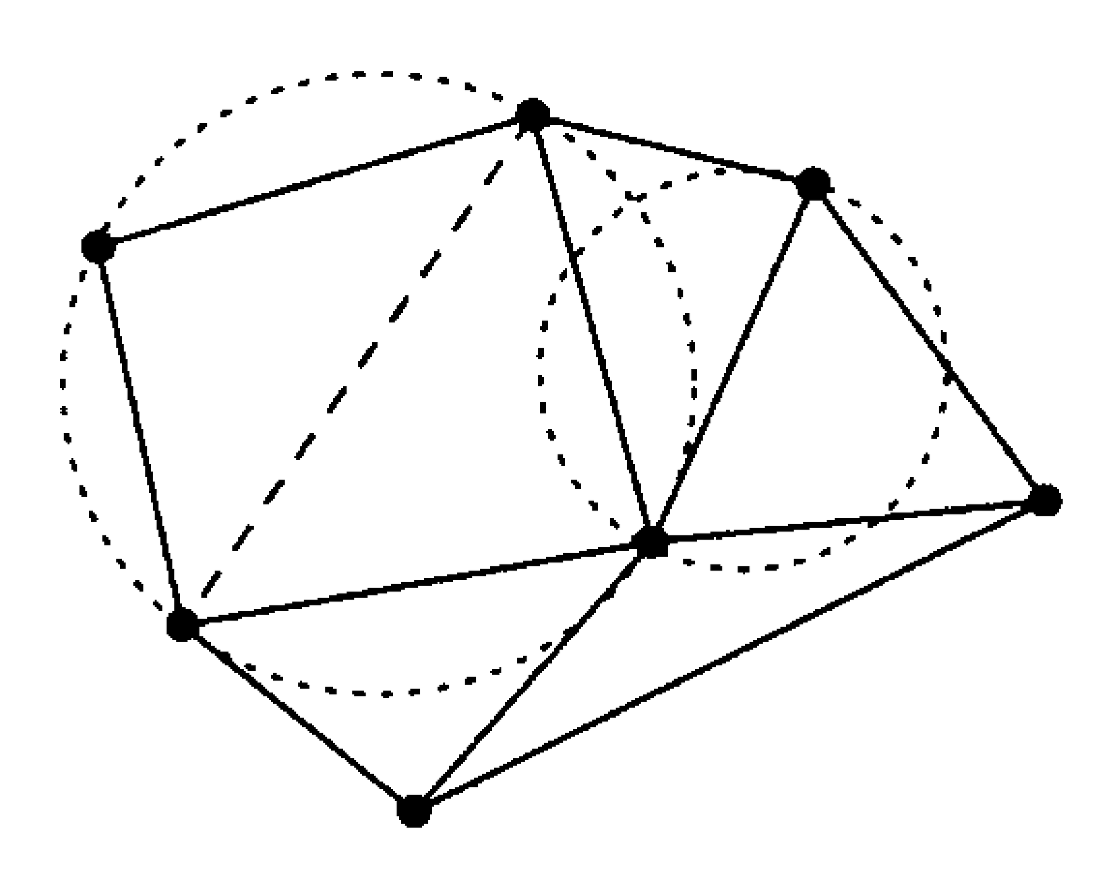


图 6.5 Delaunay 三角剖分

由下述引理容易推得定理 6.9.

引理 6.11 设 S 为含于单位球 B^d 的 d 维单纯形, 则当 S 为 B^d 的内接正则单纯形时, S 的所有立体角之和与 S 体积的比率达到最小值.

不难验证, 当 $d \to \infty$ 时,

$$\tau_d = \left(\frac{2d}{d+1}\right)^{d/2} \sigma_d \ = \ d\left(e^{-3/2} + o(1)\right)$$

(见习题 6.8).

6.3 球填装的截面

用一个适当选取的平面横截 $\mathbb{R}^3$ 中球形成的最稠密的格填装, 即得一密度为 $\sigma_2 = \pi/\sqrt{12}$ 的全等圆盘填装. 一般而言, 平面中任何一个全等圆盘填装均可由一平面横截半径相同的球形成的填装得到. 但是, 许多不等圆盘填装不能用这种方法构造. 例如, G. Fejes Tóth (1980) 的一个定理 (L. Fejes Tóth 猜想) 就说明了这一点, 该定理断言任何全等球形成的填装的平面截面都是密度至多为 $\pi/\sqrt{12}$ 的圆盘填装.

事实上, 这个结论是前一节所讨论的 Rogers 定理的下述推广的一种特例. 如前设 S^k 为 $\mathbb{R}^k$ 中边长为 2 的正则单纯形, σ_k 表示 S^k 被 $k+1$ 个以其顶点为球心的单位球覆盖部分的体积与 S^k 体积的比率.

定理 6.12 (G. Fejes Tóth) 设 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球填装, $\mathcal{B}'$ 表示 k 维子空间 $\mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^d$ $(1 \leqslant k \leqslant d)$ 与 $\mathcal{B}$ 中各球相交所得的 k 维球填装. 现记 $\mathcal{B}'$ 在 $\mathbb{R}^k$ 中的上密度为 $\bar{d}(\mathcal{B}', \mathbb{R}^k)$, 则

$$\bar{d}(\mathcal{B}', \mathbb{R}^k) \leqslant \sigma_k.$$

利用 Rogers 证明中的主要步骤即可证得此结论, 关键是要注意到, 在定理 6.8 的证明中仅仅利用了定理 6.6 所表述的 Dirichlet 胞腔的性质. 事实上, 任何其他满足这一条件的胞腔分解都可以起到同样的作用. 更确切地说, 有如下结论.

引理 6.13 设 $B' \subseteq \mathbb{R}^k$ 是以 c' 为球心以 r 为半径的球, $P \subseteq \mathbb{R}^k$ 为凸多胞形, 使得 c' 与 P 的一 i 维面中任何一点间的距离至少为

$$r\sqrt{\frac{2(k-i)}{k-i+1}}, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

则有

$$\frac{\mathrm{Vol}_k(B')}{\mathrm{Vol}_k(P)} \leqslant \sigma_k.$$

注意到, 当 $i = k-1$ 时, 由引理的条件可知 $B' \subseteq P$.

定理 6.12 的证明 不妨假设 $\mathcal{B}$ 为极大单位球填装, 即 $\mathbb{R}^d$ 中任一单位球至少与 $\mathcal{B}$ 中的一个元相交. 据此可知由这些球心所确定的 Dirichlet 胞腔的直径至多为 4.

设 c 为与 $\mathbb{R}^k$ 相交的球 $B \in \mathcal{B}$ 的球心, $D(c)$ 为 c 在 $\mathbb{R}^d$ 中所对应的 Dirichlet 胞腔.

下证 $B' = B \cap \mathbb{R}^k, P = D(c) \cap \mathbb{R}^k$ 满足引理 6.13 中的条件. 事实上, 设 x 为 P 的 i 维面上的任意一点, 则 x 也属于 $D(c)$ 的某个 $(d-k+i)$ 维面. 因此, 根据定理 6.6, 有

$$|x-c| \geqslant \sqrt{\frac{2(k-i)}{k-i+1}}.$$

现记 cx 与 B 的边界的交点为 y, y 在直线 $c'x$ 上的正交投影为 y'(图 6.6). 则

$$\begin{aligned} |x-c'| &= \frac{|y'-c'|}{|y-c|}|x-c| \\ &\geqslant r|x-c| \geqslant r\sqrt{\frac{2(k-i)}{k-i+1}}, \end{aligned}$$

故得证.

这样, 由引理 6.13 可知

$$\frac{\mathrm{Vol}_k(B')}{\mathrm{Vol}_k(P)} \leqslant \sigma_k.$$

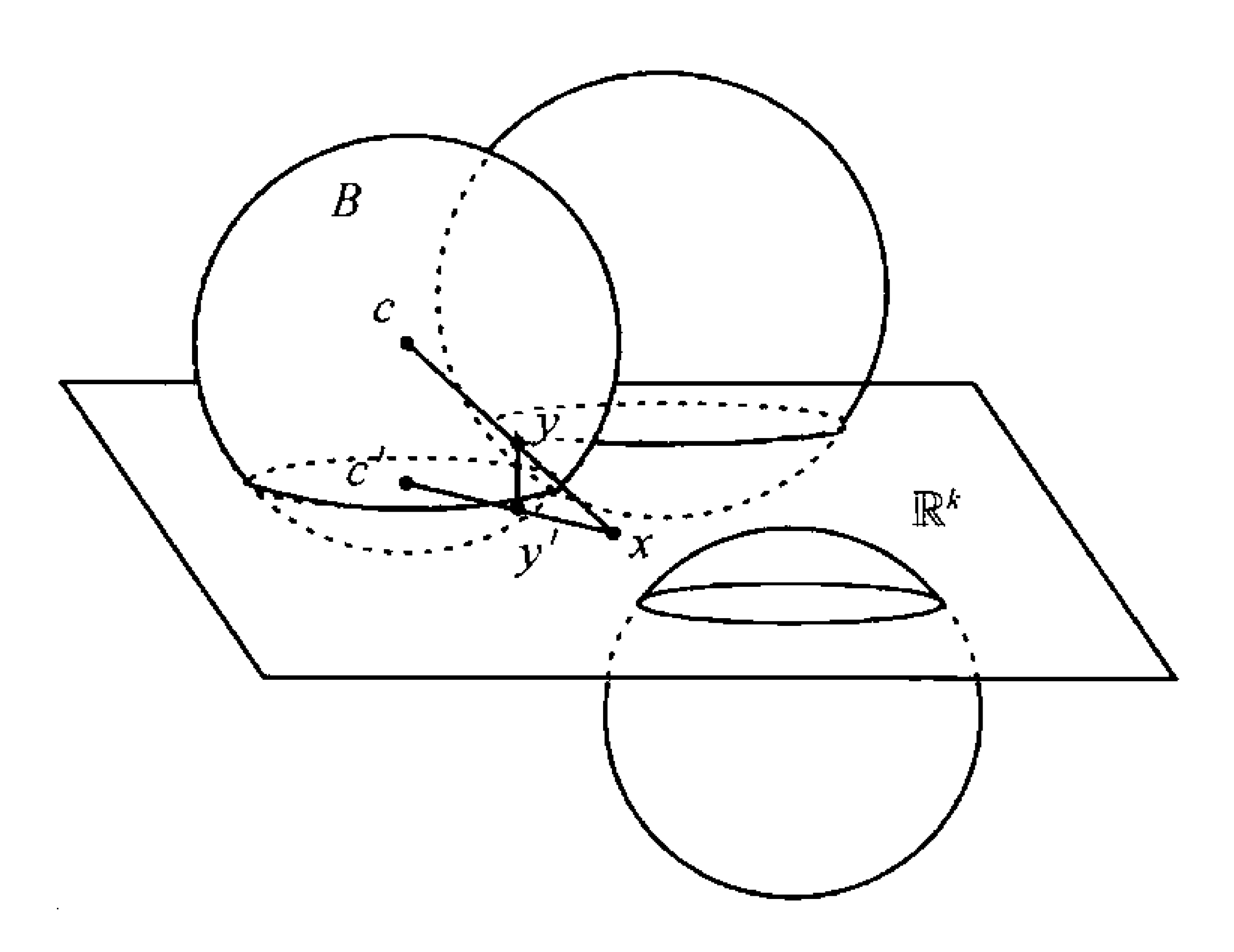


图 6.6　定理 6.12 证明图示

注意到, 与 $\mathcal{B}$ 相关的 d 维 Dirichlet 胞腔与 $\mathbb{R}^k$ 的交将 $\mathbb{R}^k$ 剖分为有界胞腔, 并且每一个这样的胞腔至多与 $\mathcal{B}'$ 中的一个元相交, 故定理得证. □

不难证明对于覆盖类似陈述是错误的 (见习题 6.9). 要想得到肯定的结果, 必须限定只讨论格覆盖 (Bezdek, 1984).

习　题

6.1　(i) 设 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}^d$ 是半径为 $\sqrt{2}$ 的球中满足 $|c_i - c_j| > 2$ 的 n 个点. 证明 $n \leqslant d+1$;

(ii) 利用密度函数

$$D(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{d+1}, & r \leqslant \sqrt{2} - \varepsilon, \\ 0, & r > \sqrt{2} - \varepsilon \end{cases}$$

给出 $\delta(B^d)$ 的一个上界, 其中 ε 为固定的小正数.

6.2　证明对于任意凸体 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 及任意不超过 C 的内半径的正数 ρ, C 的半径为 ρ 的内部平行体 $C_{-\rho}$ 是凸的 (见定义 6.4).

6.3　证明定理 6.5.

6.4　设 C 为 $(d-1)$ 维球 B^{d-1} 与线段 l 的笛卡儿积. 确定 $\mathbb{R}^d$ 中 C 的全等拷贝所成填装的最大密度 $\delta(C)$ 的一个上界.

6.5* [Daniels, 见文献 (Rogers, 1964)]　以边长为 2 的 d 维正则单纯形的顶点为球心作 $d+1$ 个单位球, 设 σ_d 表示单纯形被单位球覆盖部分的体积与其自身体积的比率. 证明当 $d \to \infty$ 时,

$$\sigma_d = \left[\frac{1}{e} + o(1)\right] d \cdot 2^{-d/2}.$$

6.6　设 C 为 $\mathbb{R}^d$ 中无聚点的点集, $C' \subseteq C$ 为任一满足下述条件的极大 (按包含关系) 子集: 对应于 C' 中元素的闭 Dirichlet 胞腔至少有一个公共点. 令 $\hat{D}(C') = \operatorname{conv} C'$, 证明 $\hat{D}(C') = \tilde{D}(C')$, 后者为与 C' 相关的 Delaunay 胞腔 (见定义 5.1 与定义 6.10).

6.7* (Coxeter et al., 1959)　证明引理 6.11.

6.8　证明

$$\tau_d = \left(\frac{2d}{d+1}\right)^{d/2} \sigma_d = d\big[e^{-3/2} + o(1)\big]$$

(见定理 6.9 与习题 6.5).

6.9　对于任意的 $\varepsilon > 0$ 与一个固定的平面, 构作 $\mathbb{R}^3$ 的单位球覆盖, 使得其与该平面的交所成覆盖的密度至多为 $1 + \varepsilon$.

第 7 章 有效随机配置

第 6 章确立了 d 维欧氏空间中单位球形成的最大 (最小) 填装 (覆盖) 密度的上界. 现在讨论相反的问题: 证明单位球高密度填装 (低密度覆盖) 的存在性. 所采用的方法是非构造性的. 本章将证明由随机选取的基底向量生成的某些格配置非常有效, 且其概率为正. 证明的思想源于 Minkowski, 后来由 Hlawka 与 Rogers 进一步发展. 本章还将给出 Rush 的基于某些码存在性的略微不同的概率方法.

7.1 Minkowski-Hlawka 定理

下面从一个简单结果开始. 如前设 $\delta(C)$ ($\vartheta(C)$) 表示 $\mathbb{R}^d$ 中凸体 C 的全等拷贝所成填装 (覆盖) 的最大 (最小) 密度.

命题 7.1 对于单位球 $B^d \subseteq \mathbb{R}^d$, 有

$$\delta(B^d) \geqslant \frac{\vartheta(B^d)}{2^d} \geqslant \frac{1}{2^d}.$$

证明 仅须证明第一个不等式. 考虑 $\mathbb{R}^d$ 中单位球的**饱和** 填装 $\mathcal{B} = \{ B^d + c_i \mid i = 1, 2, \cdots \}$, 即填装中不能再添加与 $\mathcal{B}$ 所有元均不交的单位球. 现将 $\mathcal{B}$ 中每个球扩大为与其同心而半径为原半径 2 倍的球, 即得 $\mathbb{R}^d$ 的一个覆盖 $\mathcal{B}' = \{ 2B^d + c_i \mid i = 1, 2, \cdots \}$. 注意到 $\mathcal{B}'$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中的密度满足

$$\vartheta(B^d) \leqslant d(\mathcal{B}', \mathbb{R}^d) = 2^d d(\mathcal{B}, \mathbb{R}^d) \leqslant 2^d \delta(B^d),$$

命题得证. □

显然, 这一结果可推广至任意中心对称凸体 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 的平移所成的覆盖与填装 (见习题 7.1).

令人惊讶的是, 对于很大的 d 值, 上述这一平凡结果竟然可给出 $\mathbb{R}^d$ 中单位球填装最大密度的目前已知的最佳下界. 但是上述讨论中有一个严重的缺陷, 当通过不断添加另外的球来获得饱和填装 $\mathcal{B}$ 时, 无法控制它的结构. 特别地, 如果从一个格填装开始, 那么就不能保证在饱和过程中仍保持格填装这一性质. 事实上, 在高维欧式空间中, 迄今仍未发现饱和的球形成的格填装.

然而, 本章利用 Minkowski 与 Hlawka 引入的一些方法可证明 $\delta_L(B^d) > 1/2^d$, 即存在球形成的格填装, 其密度具有 (其实改进了) 命题 7.1 中的界. 为了在较为一般的框架下确切表述我们的结果, 需要一些定义.

定义 7.2　设 C 为 $\mathbb{R}^d$ 中的紧集, 如果 C 的内部含有原点 $\mathbf{0}$, 且 $x \in C$ 时对任意的 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 均有 $\lambda x \in C$, 则称 C 为一**星形体**.

如果格

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(u_1, \cdots, u_d) = \{ m_1 u_1 + \cdots + m_d u_d \mid m_1, \cdots, m_d \in \mathbb{Z} \}$$

除 $\mathbf{0}$ 外不含 C 的内点, 则称格 $\mathbf{\Lambda}$ 对于 C 是**容许的**.

C 的**临界行列式** $\Delta(C)$ 定义为

$$\Delta(C) = \inf\{ \det \mathbf{\Lambda} \mid \mathbf{\Lambda} \text{ 对于 } C \text{ 是容许的} \}$$

(见定义 1.1 与定义 1.2).

事实上, 利用紧性易证此下确界是可达的, 即

$$\Delta(C) = \min\{ \det \mathbf{\Lambda} \mid \mathbf{\Lambda} \text{ 对于 } C \text{ 是容许的} \}.$$

这是下述简单引理 (称作**Mahler 选择定理**) 的一个直接推论, 引理的证明留给读者 (见习题 7.2).

引理 7.3 (Mahler, 1946b)　设 $\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2, \cdots$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中满足下述条件的无限格序列: 存在常数 $\alpha, \beta > 0$, 使得对于任意的 i, 有

(i) $\mathbf{\Lambda}_i$ 对于 αB^d 是容许的;

(ii) $\det \mathbf{\Lambda}_i \leqslant \beta$,

则可选取一收敛子列 $\mathbf{\Lambda}_{i_1}, \mathbf{\Lambda}_{i_2}, \cdots \to \mathbf{\Lambda}$. 也就是说, 对于每个格 $\mathbf{\Lambda}_{i_j}$ 存在适当的基 $(u_{i_j,1}, \cdots, u_{i_j,d})$, 一个以 $(u_1, \cdots, u_d)$ 为基的格 $\mathbf{\Lambda}$, 使得

$$\lim_{j \to \infty} u_{i_j,k} = u_k \quad (1 \leqslant k \leqslant d).$$

事实上, 已经在第 3 章的定义 3.5 与定义 3.11 中用到了此结论的平面情形 (见习题 3.2).

现在 Minkowski 基本定理 (定理 1.7) 可重新表述如下.

定理 7.4　对于任意中心对称的凸体 $C \subseteq \mathbb{R}^d$, 有

$$\frac{\Delta(C)}{\text{Vol } C} \geqslant \frac{1}{2^d}.$$

令人感到意外的是, 事实证明, 逆问题解决起来要困难得多: 给定凸体 (或星形体) C, 试问 $\Delta(C)/\text{Vol } C$ 到底能有多大? 换言之, 即给定凸体 (或星形体) C, 欲求对于 C 容许且其行列式尽可能小的格. 对于 $C = B^d$ 这一情形, Minkowski (1905) 确立了下述不等式:

$$\frac{\Delta(C)}{\text{Vol } C} \leqslant \frac{1}{2\zeta(d)} = \frac{1}{2\left(1 + \frac{1}{2^d} + \frac{1}{3^d} + \cdots\right)},$$

其中 ζ 表示**Riemann zeta 函数**.

现给出 Hlawka (1944) 对 Minkowski 结果的一个推广, 先作一些准备.

引理 7.5 (Davenport, Rogers, 1947) 设 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 为在某有界区域外取值为 0 的连续函数. 对任意实数 γ, 令

$$V(\gamma)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\cdots,x_{d-1},\gamma)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{d-1}\,.$$

另外, 设 $\mathbf{\Lambda}'$ 为超平面 $x_d=0$ 中的整数格, $\delta>0$ 为一固定的数. 给定任一形如 $y=(y_1,\cdots,y_{d-1},\delta)$ 的向量 $y\in\mathbb{R}^d$, 设 $\mathbf{\Lambda}_y$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中由 $\mathbf{\Lambda}'$ 与 y 生成的格, 则

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\Bigg(\sum_{\substack{x\in\mathbf{\Lambda}_y\\x_d\neq0}}f(x)\Bigg)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{d-1}=\sum_{i\in\mathbb{Z}-\{0\}}V(i\delta)\,.$$

证明 设 $\mathbf{\Lambda}'=\{(m_1,\cdots,m_{d-1},0)\mid m_1,\cdots,m_{d-1}\in\mathbb{Z}\}$, 则有 $\det\mathbf{\Lambda}'=1$, 且

$$\sum_{\substack{x\in\mathbf{\Lambda}_y\\x_d\neq0}}f(x)=\sum_{i\neq0}\sum_{m_1,\cdots,m_{d-1}\in\mathbb{Z}}f(m_1+iy_1,\cdots,m_{d-1}+iy_{d-1},i\delta)\,.$$

对于固定的 $i\neq0$, 引入新变量

$$z_1=iy_1,\quad\cdots,\quad z_{d-1}=iy_{d-1},$$

则有

$$\begin{aligned}&\int_0^1\cdots\int_0^1\sum_{m_1,\cdots,m_{d-1}\in\mathbb{Z}}f(m_1+iy_1,\cdots,m_{d-1}+iy_{d-1},i\delta)\,\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{d-1}\\&=\frac{1}{i^{d-1}}\int_0^i\cdots\int_0^i\sum_{m_1,\cdots,m_{d-1}\in\mathbb{Z}}f(m_1+z_1,\cdots,m_{d-1}+z_{d-1},i\delta)\,\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_{d-1}\\&=\int_0^1\cdots\int_0^1\sum_{m_1,\cdots,m_{d-1}\in\mathbb{Z}}f(m_1+z_1,\cdots,m_{d-1}+z_{d-1},i\delta)\,\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_{d-1}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(z_1,\cdots,z_{d-1},i\delta)\,\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_{d-1}\\&=V(i\delta)\,.\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\Bigg(\sum_{\substack{x\in\mathbf{\Lambda}_y\\x_d\neq0}}f(x)\Bigg)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{d-1}=\sum_{i\neq0}V(i\delta).$$

□

定理 7.6 (Hlawka, 1944)　设 $g:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 为在某有界区域外取值为 0 的Riemann 可积函数, $\varepsilon > 0$, 则存在 $\mathbb{R}^d$ 中的单位格 $\mathbf{\Lambda}$ (即 $\det \mathbf{\Lambda} = 1$), 使得

$$\sum_{\mathbf{0}\neq x\in\mathbf{\Lambda}} g(x) < \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon .$$

证明　用一个在某有界区域外取值为 0 的连续函数 $f \geqslant g$ 逼近 g, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x < \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} .$$

现选取充分小的 $\delta > 0$, 使得

(a) 如果 $|x| \geqslant \dfrac{1}{\delta^{1/(d-1)}}$, 则 $f(x) = 0$;

(b) $$\delta \sum_{i\neq 0} V(i\delta) = \delta \sum_{i\neq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \cdots, x_{d-1}, i\delta)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{d-1} < \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

另外, 设 $\mathbf{\Lambda}'$ 为如下定义的 $(d-1)$ 维格:

$$\mathbf{\Lambda}' = \left\{ \left(\frac{m_1}{\delta^{1/(d-1)}}, \cdots, \frac{m_{d-1}}{\delta^{1/(d-1)}}, 0 \right) \,\middle|\, m_1, \cdots, m_{d-1} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

由引理 7.5 (经过适当伸缩) 可知, $\Big(\sum\limits_{\substack{x\in\mathbf{\Lambda}_y \\ x_d\neq 0}} f(x)\Big)\det \mathbf{\Lambda}'$ 在格集 $\mathbf{\Lambda}_y$ 上的**均值**为 $\sum\limits_{i\neq 0} V(i\delta)$. 因此存在 $y = (y_1, \cdots, y_{d-1}, \delta)$, $0 \leqslant y_i \leqslant 1/\delta^{1/(d-1)}$, 使得

$$\sum_{\substack{x\in\mathbf{\Lambda}_y \\ x_d\neq 0}} f(x) \leqslant \frac{\sum\limits_{i\neq 0} V(i\delta)}{\det \mathbf{\Lambda}'} = \delta \sum_{i\neq 0} V(i\delta) .$$

利用性质 (a) 与性质 (b), 可得

$$\sum_{\substack{x\in\mathbf{\Lambda}_y \\ x\neq \mathbf{0}}} f(x) = \sum_{\substack{x\in\mathbf{\Lambda}_y \\ x_d\neq 0}} f(x) \leqslant \delta \sum_{i\neq 0} V(i\delta) < \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} .$$

从而

$$\sum_{\substack{x\in\mathbf{\Lambda}_y \\ x\neq \mathbf{0}}} g(x) \leqslant \sum_{\substack{x\in\mathbf{\Lambda}_y \\ x\neq \mathbf{0}}} f(x) < \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} < \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon ,$$

结论得证. □

上述证明采用的实质上是一种随机方法. 等价地, 本来也可以这样说: 欲证的不等式对于 $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_y$ 成立的概率不为 0, 其中 y 是**随机选取**的最后一个坐标为 δ 的向量.

现易得 d 维体临界行列式的非平凡上界.

定理 7.7 (Minkowski-Hlawka 定理) 设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 为星形体, 则有

(i) $\dfrac{\Delta(C)}{\mathrm{Vol}\ C} \leqslant 1$;

(ii) 如果 C 是中心对称的, 则 $\dfrac{\Delta(C)}{\mathrm{Vol}\ C} \leqslant \dfrac{1}{2\zeta(d)}$,

其中 $\zeta(d) = 1 + \dfrac{1}{2^d} + \dfrac{1}{3^d} + \cdots$ 为Riemann zeta 函数.

证明 欲证 (i) 成立, 只须证明由 $\mathrm{Vol}\ C < 1$ 可推得 $\Delta(C) \leqslant 1$.

设 g 为 C 的**指示函数**, 即

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in C, \\ 0, & x \notin C. \end{cases}$$

现选取充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = \mathrm{Vol}\ C + \varepsilon < 1.$$

则由定理 7.6 可知, 存在单位格 $\mathbf{\Lambda}$ 满足 $\sum\limits_{\mathbf{0} \neq x \in \mathbf{\Lambda}} g(x) < 1$, 即 C 不含 $\mathbf{0}$ 以外的其他格点, 从而 $\Delta(C) \leqslant 1$, (i) 得证.

欲证 (ii), 只须证明由 $\mathrm{Vol} C < 2\zeta(d)$ 可推得 $\Delta(C) \leqslant 1$. 如前, 设 $g(x)$ 为 C 的指示函数, 令

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)\, g(ix),$$

其中, μ 表示**Möbius 函数**, 即

$$\mu(i) = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 0, & \text{存在素数 } p \text{ 使得 } p^2 | i, \\ (-1)^k, & i = p_1 p_2 \cdots p_k, \text{ 其中 } p_j \text{ 为互异素数} \end{cases}$$

(Möbius 函数的一些基本性质见习题 7.3). 称格 $\mathbf{\Lambda}$ 中的点 $x \neq \mathbf{0}$ 为**原始的**, 若连接 $\mathbf{0}$ 与 x 的开线段不含 $\mathbf{\Lambda}$ 的其他格点. 此时,

$$\sum_{\mathbf{0} \neq x \in \mathbf{\Lambda}} f(x) = \sum_{\substack{\mathbf{0} \neq x \in \mathbf{\Lambda} \\ x \text{ 是原始的}}} \sum_{j=1}^{\infty} f(jx)$$

$$= \sum_{\substack{0 \neq x \in \mathbf{\Lambda} \\ x \text{ 是原始的}}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i) g(ijx)$$

$$= \sum_{\substack{0 \neq x \in \mathbf{\Lambda} \\ x \text{ 是原始的}}} \sum_{k=1}^{\infty} g(kx) \sum_{i|k} \mu(i)$$

$$= \sum_{\substack{0 \neq x \in \mathbf{\Lambda} \\ x \text{ 是原始的}}} g(x) .$$

由 C 的中心对称性可知对于任意格 $\mathbf{\Lambda}$, 此值必为非负偶数.

另一方面, 有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i) \int_{\mathbb{R}^d} g(ix)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i) \frac{\mathrm{Vol}\ C}{i^d}$$

$$= \frac{\mathrm{Vol}\ C}{\zeta(d)} < 2.$$

此时对函数 f 应用定理 7.6, 即知存在单位格 $\mathbf{\Lambda}$ 满足 $\sum_{0 \neq x \in \mathbf{\Lambda}} f(x) < 2$. 从而可得

$$\sum_{0 \neq x \in \mathbf{\Lambda}} f(x) = \sum_{\substack{0 \neq x \in \mathbf{\Lambda} \\ x \text{ 是原始的}}} g(x) = 0 .$$

又因为 C 关于 $\mathbf{0}$ 是星形的, 所以 $C \cap (\mathbf{\Lambda} - \{\mathbf{0}\}) = \varnothing$, $\Delta(C) \leqslant 1$. (ii) 得证. □

注意定理中结论 (i) 对于任何体积非零的**Jordan 可测集** C 仍然成立 (C 称为 **Jordan 可测的**, 若对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在未必凸的多胞形 P_1, P_2, 使得 $P_1 \subseteq C \subseteq P_2$, $\mathrm{Vol}\ P_2 - \mathrm{Vol}\ P_1 < \varepsilon$). 同时, 也不难将 Minkowski-Hlawka 定理推广至无界星形体 (见习题 7.4).

7.2 空间中的稠密格填装

本章的初衷旨在确定由体 C 的全等拷贝所成格填装的最大密度的下界. 为得到这样的界, 须将差区域 (见定义 4.2) 的概念推广至 $\mathbb{R}^d$ 中的任何星形体.

定义 7.8 任给关于 $\mathbf{0}$ 的星形体 $C \subseteq \mathbb{R}^d$, C 的**差区域** $D(C)$ 定义为

$$D(C) = C + (-C) = \{\, c - c' \mid c, c' \in C \,\} .$$

注意下述事实.

引理 7.9 设 $C\subseteq\mathbb{R}^d$ 为关于 $\mathbf{0}$ 的星形体, $\mathbf{\Lambda}$ 为格. 则 $\mathbf{\Lambda}+C$ 形成一填装, 当且仅当 $\mathbf{\Lambda}$ 对于 $D(C)$ 是容许的.

证明 注意到, 如果 $\mathbf{\Lambda}$ 为格且 $x\in\mathbf{\Lambda}$, 那么 $C\cap(x+C)$ 有内点, 当且仅当 x 位于 $D(C)$ 的内部. 由此立即可得结论. □

推论 7.10 设 $C\subseteq\mathbb{R}^d$ 为关于 $\mathbf{0}$ 的星形体, $D(C)$ 为其差区域, $\delta_L(C)$ 表示 C 形成的格填装的最大密度, 则有

(i) $\delta_L(C)\geqslant 2\zeta(d)\dfrac{\mathrm{Vol}\,C}{\mathrm{Vol}\,(D(C))}$;

(ii) 如果 C 是中心对称的, 那么 $\delta_L(C)\geqslant\dfrac{\zeta(d)}{2^{d-1}}$.

证明 由引理 7.9 可知 $\delta_L(C)=\dfrac{\mathrm{Vol}\,C}{\Delta(D(C))}$. 注意到对于中心对称的 C, Vol $(D(C))=2^d\mathrm{Vol}\,C$, 由定理 7.7(ii) 即得结论. □

当 C 为凸体时, 推论 7.10 (i) 中的下界可以表述得更为明确,

$$\delta_L(C)\geqslant 2\zeta(d)\bigg/\binom{2d}{d}.$$

这一下界由推论 7.10 (i) 及 Rogers, Shephard (1957, 1958) 的下述结果立即可得.

定理 7.11 (Rogers-Shephard) 设 $C\subseteq\mathbb{R}^d$ 为凸体, 其差区域为 $D(C)$, 则有 $\mathrm{Vol}\,(D(C))\leqslant\binom{2d}{d}\mathrm{Vol}\,C$, 其中等号当 C 为单纯形时成立.

证明 设 $\chi(x)$ 为 C 的指示函数, 即

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\in C,\\ 0, & x\notin C.\end{cases}$$

对任意的 $\mathbf{0}\neq x\in D(C)$, 令 $b(x)$ 表示半直线 $\mathbf{0}x$ 与 $D(C)$ 边界的 (唯一) 交点, 则有 $0<\rho(x)\leqslant 1$, 使得 $x=\rho(x)b(x)$. 另有 $c_1(x),c_2(x)\in C$, 使得 $b(x)$ 可以表示成下述形式:

$$b(x)=\frac{x}{\rho(x)}=c_1(x)-c_2(x).$$

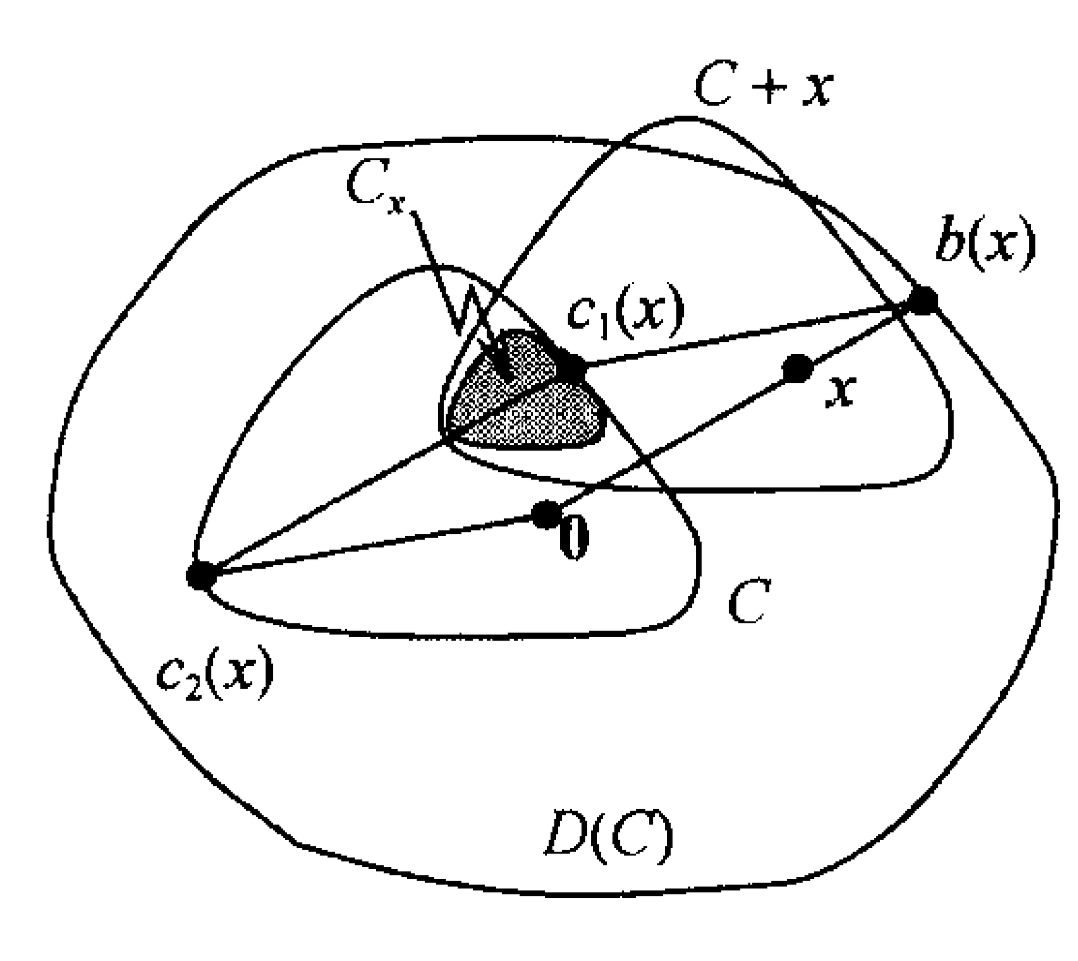


图 7.1 $C, C+x$, $D(C)$ 与 C_x

设

$$\begin{aligned}C_x&=\big[1-\rho(x)\big]C+\rho(x)c_1(x)\\&=\big[1-\rho(x)\big]C+\rho(x)c_2(x)+x.\end{aligned}$$

显然, C_x 是 $(1-\rho(x))C$ 的平移, 由 C 的凸性可知

$$C_x\subseteq C \text{ 且 } C_x\subseteq C+x.$$

从而对于任一 $x \in D(C)$, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \chi(y)\chi(y-x)\mathrm{d}y &= \mathrm{Vol}\left(C \cap (C+x)\right) \\ &\geqslant \mathrm{Vol}\ C_x \\ &= [1-\rho(x)]^d \mathrm{Vol}\ C \\ &= \mathrm{Vol}\ C \int_{\rho(x)}^{1} d(1-r)^{d-1}\,\mathrm{d}r\,.\end{aligned}$$

另外, 如果 $x \notin D(C)$, 显然有

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi(y)\chi(y-x)\mathrm{d}y = \mathrm{Vol}\left(C \cap (C+x)\right) = 0\,.$$

因此有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \chi(y)\chi(y-x)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x &= \int_{D(C)}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \chi(y)\chi(y-x)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &\geqslant \mathrm{Vol}\ C \int_{D(C)}\left[\int_{\rho(x)}^{1} d(1-r)^{d-1}\,dr\right]\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{Vol}\ C \int_0^1\left[\int_{\substack{x\in D(C)\\ \rho(x)\leqslant r}} d(1-r)^{d-1}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}r \\ &= \mathrm{Vol}\ C \int_0^1 d(1-r)^{d-1}\,\mathrm{Vol}\left(rD(C)\right)\mathrm{d}r \\ &= (\mathrm{Vol}\ C)\left[\mathrm{Vol}\left(D(C)\right)\right]\int_0^1 d(1-r)^{d-1}r^d\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{(\mathrm{Vol}\ C)\left[\mathrm{Vol}\left(D(C)\right)\right]}{\dbinom{2d}{d}}\end{aligned}$$

(见习题 7.5).

另一方面, 显然

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \chi(y)\chi(y-x)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d}\chi(y)\left[\int_{\mathbb{R}^d}\chi(y-x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\chi(y)\,(\mathrm{Vol}\ C)\,\mathrm{d}y \\ &= (\mathrm{Vol}\ C)^2\,.\end{aligned}$$

联立上述两式即得欲证不等式

$$\mathrm{Vol}\left(D(C)\right) \leqslant \binom{2d}{d}\mathrm{Vol}\ C\,.$$

容易验证, 当 C 为单纯形时, 以上所有不等式均成为等式. □

7.3 格填装与码

Rush (1989, 1992) 发现了一种略微不同的方法构作有效格填装. 在高维空间中, 利用这一方法也可得到球所成最稠密格填装密度的一个下界, 与推论 7.10 (ii) 的结果几乎相同. 此外, 对于许多凸体 C, 利用此方法可确定 C 形成的已知的最稠密格填装.

设 C 为 $\mathbb{R}^d$ 中关于原点中心对称的凸体. 对于任意的 $x \in \mathbb{R}^d$, 令

$$\|x\|_C = \min_{\lambda \geqslant 0}\{\,\lambda \mid x \in \lambda C\,\}.$$

容易验证

(i) $\|\mathbf{0}\|_C = 0$; 对任意的 $\mathbf{0} \neq x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\|_C > 0$;

(ii) 对任意的 $x \in \mathbb{R}^d$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\|\mu x\|_C = |\mu| \cdot \|x\|_C$;

(iii) 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\|x+y\|_C \leqslant \|x\|_C + \|y\|_C$.

换言之, $\|\cdot\|_C$ 是一个 **范数.** 定义两点 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 间的距离为 $\|x-y\|_C$, 则得到 $\mathbb{R}^d$ 上的所谓 **Minkowski 度量** . 在此度量之下, C 是以原点为中心的单位球, 即

$$C = \{\,x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_C \leqslant 1\,\}.$$

在文献中, 称赋予了 Minkowski 度量的空间 $\mathbb{R}^d$ 为具有**规范体**C 的**Minkowski 空间**.

下面这个结论的证明留给读者 (见习题 7.7).

引理 7.12 设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 为内部含有 $\mathbf{0}$ 的凸体, 假定 C 关于每一个坐标超平面都是对称的, 则有

(i) C 关于 $\mathbf{0}$ 中心对称;

(ii) $\|x\|_C$ 是 x 的每个坐标分量绝对值的非减函数, 也就是说, 如果 $x=(x_1, \cdots, x_d)$, $x' = (x'_1, \cdots, x'_d)$, $|x'_1| \geqslant |x_1|, \cdots, |x'_d| \geqslant |x_d|$, 那么 $\|x'\|_C \geqslant \|x\|_C$.

设 p 为奇素数, 本节将采用一个不太常见的记法 $\mathbb{Z}_p$ 来表示满足下述条件的所有整数 q 的集合:

$$-\frac{p-1}{2} \leqslant q \leqslant \frac{p-1}{2}.$$

$\mathbb{Z}_p$ 中的加法和乘法均取模 p. 相应地, 令 $\mathbb{Z}_p^d$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中所有坐标均属于 $\mathbb{Z}_p$ 的整数点的全体.

Rush (1989) 与在一特殊情形下 Rush, Sloane (1987) 引入了 $\mathbb{Z}_p^d$ 上的下述很自然的范数, 可视其为 Minkowski 度量的离散形式.

定义 7.13 设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 为关于 $\mathbf{0}$ 中心对称的凸体, p 为一奇素数. 对于任意的 $x \in \mathbb{Z}_p^d$, 令

$$\|x\|_{C,p} = \min_{\lambda \geqslant 0}\{\, \lambda \mid x \in \lambda C + p\mathbb{Z}^d \,\}\,.$$

可以验证 $\|\cdot\|_{C,p}$ 满足三角不等式 (见习题 7.9). 显然, $\|x\|_{C,p} \leqslant \|x\|_C$. 此外, 如果 C 关于每一个坐标超平面都是对称的, 那么对于所有的 $x \in \mathbb{Z}_p^d$, 均有

$$\|x\|_{C,p} = \|x\|_C.$$

事实上, 在此情形下由引理 7.12 可知

$$x \in \lambda C + p\mathbb{Z}^d \implies x \in \lambda C\,.$$

定义两点 $x, y \in \mathbb{Z}_p^d$ 之间的距离为 $\|x-y\|_{C,p}$, 则得到 $\mathbb{Z}_p^d$ 上的 **Rush 度量**, 它在下面的讨论中起着关键性作用.

设 $B_{C,p}^d(r)$ 表示 Rush 度量下以原点为中心以 r 为半径的球, 即

$$B_{C,p}^d(r) = \{\, x \in \mathbb{Z}_p^d \mid \|x\|_{C,p} \leqslant r \,\}\,.$$

引理 7.14 *设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 为关于每一个坐标超平面都对称的凸体, 假定标准基向量*

$$(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 1)$$

位于 C 的表面上. 则对于任意 $r \geqslant 0$, 有

$$|B_{C,p}^d(r)| \leqslant \left(r + \frac{d}{2}\right)^d \operatorname{Vol} C.$$

证明 设 K 为如下定义的单位立方体:

$$K = \left\{\, x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \text{对于所有的 } i,\ |x_i| \leqslant \frac{1}{2} \,\right\}.$$

由引理 7.12 可知对于任意的 $x \in K$, 有

$$\begin{aligned}
\|x\|_C &\leqslant \left\| \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\right) \right\|_C \\
&\leqslant \left\| \left(\frac{1}{2}, 0, \cdots, 0\right) \right\|_C + \left\| \left(0, \frac{1}{2}, \cdots, 0\right) \right\|_C + \cdots + \left\| \left(0, 0, \cdots, \frac{1}{2}\right) \right\|_C \\
&= \frac{d}{2}\,.
\end{aligned}$$

因此, $K \subseteq (d/2)\,C$, 且

$$\begin{aligned}
|B_{C,p}^d(r)| &= \left|\{\, x \in \mathbb{Z}_p^d \mid \|x\|_C \leqslant r \,\}\right| \\
&\leqslant \left|\{\, x \in \mathbb{Z}^d \mid \|x\|_C \leqslant r \,\}\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x \in rC \cap \mathbb{Z}^d} \operatorname{Vol}(K+x) \\
&\leqslant \operatorname{Vol}(K+rC) \\
&\leqslant \operatorname{Vol}\left(\frac{d}{2}C + rC\right) \\
&= \left(r+\frac{d}{2}\right)^d \operatorname{Vol} C.
\end{aligned}$$

□

显然, $\mathbb{Z}_p^d$ 可视为域 $\mathbb{Z}_p$ 上的 d 维线性空间. 任意 k 个线性无关的元 $u_1, u_2, \cdots, u_k \in \mathbb{Z}_p^d$ 生成一 k 维子空间

$$L = \{\, q_1u_1 + \cdots + q_ku_k \mid q_1, \cdots, q_k \in \mathbb{Z}_p \,\} \subseteq \mathbb{Z}_p^d.$$

这样的一个子空间通常称为 k 维 **线性码**, 它的元素叫做 **码字**. 任给两个码字 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_d) \in L$, 使得 $x_i \neq y_i$ 的下标 i 的总个数称为 x 与 y 之间的**Hamming 距离** . 两个码字之间的 Hamming 距离越大, 越容易将两者加以区分. 因此, 在信息论中 (更确切地说, 在 **纠错码** 理论中), 任两个码字之间 Hamming 距离的最小值是码最重要的特征.

Leech, Sloane (1971) 利用各种具有最大最小 Hamming 距离的码构作了许多低维空间中稠密的球填装. 然而, 欲达到我们的目标, 必须用 $\mathbb{Z}_p^d$ 上的 Rush 度量替换 Hamming 距离.

定理 7.15 *设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 为关于原点中心对称的凸体, p 为奇素数, $r \geqslant 0$. 则对于任意*

$$k < d + 1 - \log_p\left(\frac{p-1}{2}|B_{C,p}^d(r)|\right),$$

存在 k 维线性码 $L \subseteq \mathbb{Z}_p^d$, 使得

$$\min_{\substack{x,y \in L \\ x \neq y}} \|x-y\|_{C,p} = \min_{0 \neq x \in L} \|x\|_{C,p} \geqslant r.$$

证明 对 k 用归纳法. 当 $k=0$ 时无须证明, 故可设 $k \geqslant 1$. 假设已证结论对 $(k-1)$ 成立, 即存在满足定理要求的 $(k-1)$ 维线性码 $L' \subseteq \mathbb{Z}_p^d$. 设 $B'(r)$ 为 $\mathbb{Z}_p^d$ 中与 L' 的至少一个元的 Rush 距离不大于 r 的点的全体.

可以断言, 随机选取的点 $u \in \mathbb{Z}_p^d$ 不属于集合

$$\mathbb{Z}_pB'(r) = \{\, qv \mid q \in \mathbb{Z}_p, v \in B'(r) \,\}$$

的概率是严格正的. 欲证明此断言, 只须注意到由定理条件和归纳假设可推得

$$|\mathbb{Z}_pB'(r)| = \left|\left\{\, qv \,\middle|\, 1 \leqslant q \leqslant \frac{p-1}{2}, v \in B'(r) \,\right\}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{p-1}{2}|B'(r)| \\
&\leqslant \frac{p-1}{2}|L'|\cdot|B^d_{C,p}(r)| \\
&= \frac{p-1}{2}p^{k-1}|B^d_{C,p}(r)| \\
&< p^d .
\end{aligned}
$$

现假设 $u \notin \mathbb{Z}_p B'(r)$, $L \subseteq \mathbb{Z}_p^d$ 为由 L' 与 u 生成的 k 维码, 即

$$L = \{qu + x' \mid q \in \mathbb{Z}_p,\, x' \in L'\}.$$

欲证 L 即为满足定理要求的 k 维线性码.

以反证法证之. 假设 L 不满足定理要求, 即存在 $\mathbf{0} \neq x = qu+x'$, 使得 $\|x\|_{C,p} < r$. 显然, $q \neq 0$, 否则由归纳假设可知

$$\|x\|_{C,p} = \|x'\|_{C,p} \geqslant r.$$

又因为 $-x' \in L'$, $\|qu-(-x')\|_{C,p} = \|x\|_{C,p} < r$, 所以 $qu = x - x' \in B'(r)$. 但由此可得

$$u \in q^{-1}B'(r) \subseteq \mathbb{Z}_p B'(r),$$

与 u 的选择矛盾. □

设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 为关于每一个坐标超平面均对称的凸体, 现已准备就绪, 开始构作 C 形成的稠密格填装. 由于 $\delta_L(C)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 的仿射变换下保持不变, 故不妨假设标准基向量 $(1,0,\cdots,0), (0,1,\cdots,0), \cdots, (0,0,\cdots,1)$ 落在 C 的表面上.

设 $0 \leqslant r \leqslant p$,

$$k = \left\lceil d - \log_p\left(\frac{p-1}{2}|B^d_{C,p}(r)|\right)\right\rceil,$$

且 $L \subseteq \mathbb{Z}_p^d$ 为满足条件 $\min\limits_{\mathbf{0}\neq x\in L}\|x\|_{C,p} \geqslant r$ 的 k 维线性码, 其存在性由前一定理保证, 则

$$\mathbf{\Lambda} = L + p\mathbb{Z}^d = \{x + pz \mid x \in L, z \in \mathbb{Z}^d\}$$

为格 (见习题 7.10). 此外, 格 $\mathbf{\Lambda}$ 对 rC 是**容许的** (见定义 7.2). 否则可找到 $x \in L, z \in \mathbb{Z}^d$, 使得两者不全为 $\mathbf{0}$, 且 x 落在 $rC + pz$ 的内部. 如果 $x \neq \mathbf{0}$, 则必有

$$\|x\|_{C,p} = \min_{\lambda\geqslant 0}\{\lambda \mid x \in \lambda C + p\mathbb{Z}^d\} < r,$$

矛盾. 如果 $x = \mathbf{0} \neq z$, 只须注意到 C 含于以 $\mathbf{0}$ 为中心, 边长为 2 且各边均与坐标轴平行的立方体内. 因此, 如果 $0 \leqslant r \leqslant p$, 则 $x = \mathbf{0}$ 不可能位于 $rC + pz$ 的内部, 矛盾.

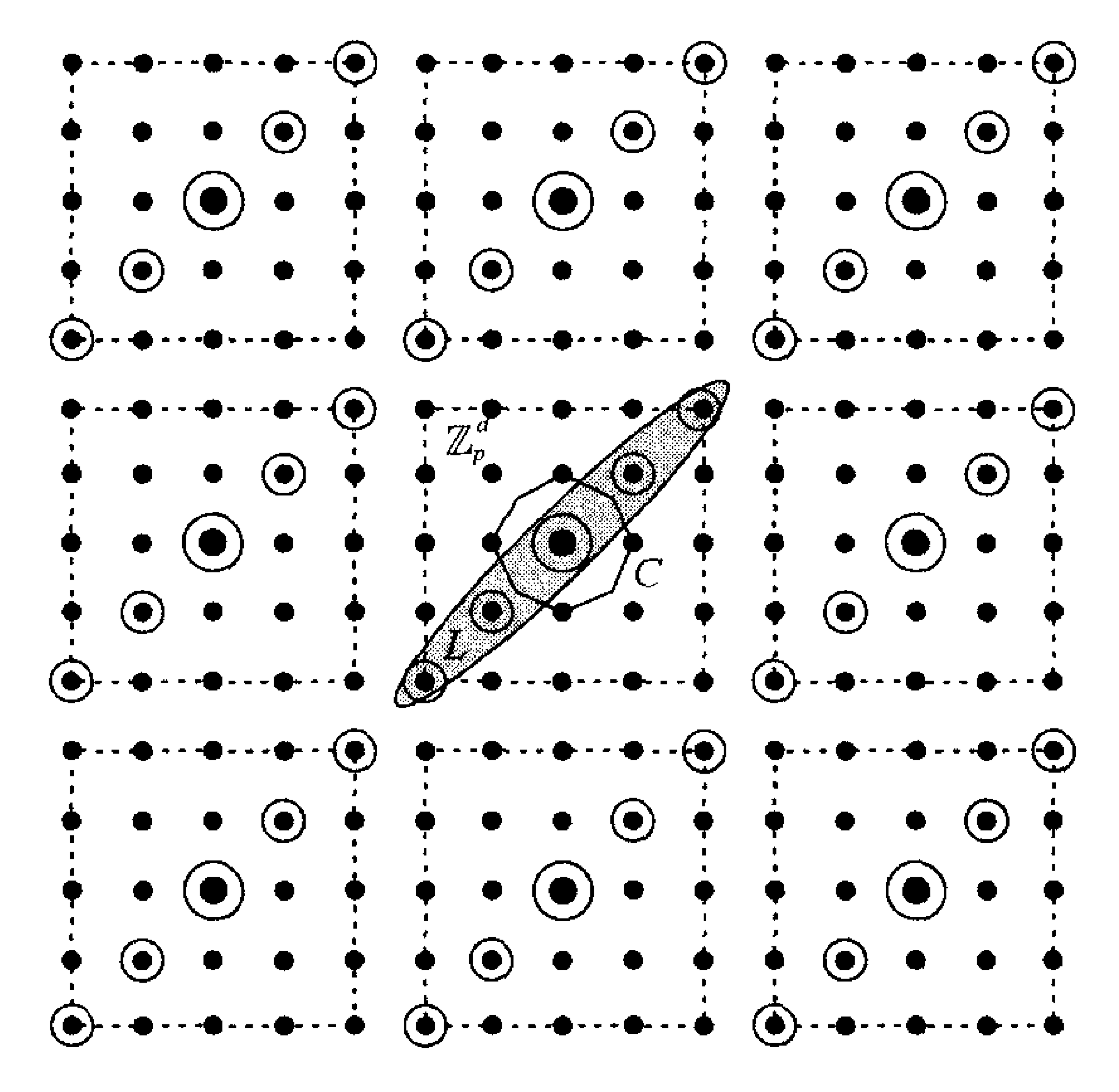


图 7.2 $\mathbf{\Lambda} = L + p\mathbb{Z}^d (p = 5, d = 2)$, 圈中的点属于 $\mathbf{\Lambda}$

因为 C 是中心对称的, 所以 $\mathbf{\Lambda} + \frac{r}{2}C$ 形成一填装 (见引理 7.9). 又因为格 $\mathbf{\Lambda}$ 的基本平行体的体积为 p^{d-k}, 故此填装的密度为

$$\frac{\operatorname{Vol}\left(\frac{r}{2}C\right)}{p^{d-k}} = \frac{r^d}{2^d p^{d-k}} \operatorname{Vol} C$$
$$\geqslant \frac{r^d}{2^d \left(\frac{p-1}{2}\right) |B_{C,p}^d(r)|} \operatorname{Vol} C .$$

因此由引理 7.14 (这一引理作用颇大) 可得

$$\delta_L(C) \geqslant \frac{1}{2^{d-1}(p-1)\left(1+\frac{d}{2r}\right)^d} .$$

对 $d \geqslant 2$, 选取奇素数 $d^2/2 \leqslant p \leqslant d^2$, 且令 $r = d^2/2$, 则可得到如下结论.

推论 7.16 *设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 为关于每一个坐标超平面均对称的凸体, 则 C 形成的格填装的最大密度满足*

$$\delta_L(C) \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}d^2} \frac{1}{2^{d-1}} .$$

关于 C 的最稠密的格填装密度, 推论 7.10 和 7.16 所得到的下界仅仅稍弱于已知的最佳估计. Schmidt (1963) 改进 Rogers (1947) 与 Davenport, Rogers (1947) 的某些较早的界后, 证明了对于中心对称的凸体 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 及任意的 $\varepsilon < \lg 2$, 如果 d 充分大, 则有

$$\delta_L(C) > \varepsilon\frac{d}{2^d} \tag{7.1}$$

(见习题 7.6). 对于 $C = B^d$ 这一特殊情形, Ball (1992) 利用差分方法证明了

$$\delta_L(B^d) \geqslant 2\zeta(d)\frac{d-1}{2^d}.$$

但遗憾的是, 即使这个下界与第 6 章中所讨论的上界也相去甚远.

7.4 空间中的稀疏覆盖

$\mathbb{R}^d$ 的全等球覆盖的最小密度现有上下界之间的差距, 与 $\mathbb{R}^d$ 中全等球填装的最大密度上下界之间的差距相比, 前者要小得多. 在第 6 章中我们已经知道 (见定理 6.9 和习题 6.8),

$$\vartheta(B^d) \geqslant \tau_d \approx \frac{d}{e^{3/2}}.$$

另一方面, Rogers (1957) 证明了下述结论.

定理 7.17 (Rogers) 给定凸体 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 3)$, 设 $\vartheta_T(C)$ 为 C 的平移形成的 $\mathbb{R}^d$ 的覆盖的最小密度, 则

$$\vartheta(C) \leqslant \vartheta_T(C) \leqslant d\ln d + d\ln\ln d + 5d.$$

证明 不妨假设 C 的形心为原点且 $\mathrm{Vol}\, C = 1$. 设 s 为一个大正值常数, 考虑格

$$\mathbf{\Lambda} = \{\, (m_1 s, m_2 s, \cdots, m_d s) \mid m_1, m_2, \cdots, m_d \in \mathbb{Z} \,\}.$$

如果 s 充分大, 则 $C + \mathbf{\Lambda} = \{\, C + x \mid x \in \mathbf{\Lambda} \,\}$ 形成一填装.

在立方体 $K = [0, s]^d$ 中独立地随机选取 n 个服从均匀分布的点 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 对于固定的 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\mathbb{R}^d$ 未被 C 的平移所成集族

$$C + \mathbf{\Lambda} + \{\, y_1, \cdots, y_i \,\} = \{\, C + x + y_j \mid x \in \mathbf{\Lambda}, j \leqslant i \,\}$$

覆盖部分所占比例的期望值显然等于

$$\left(1 - \frac{\mathrm{Vol}\, C}{\mathrm{Vol}\, K}\right)^i = \left(1 - \frac{1}{s^d}\right)^i.$$

特别地, 存在 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的一种特定选择, 使得空间中未被 $\mathcal{C}_1 = C + \mathbf{\Lambda} + \{\, y_1, \cdots, y_n \,\}$ 覆盖部分的比例至多为

$$\left(1 - \frac{1}{s^d}\right)^n < e^{-n/s^d}.$$

令 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{d}$ 为一稍后即将确定的小常数. 设 $\{z_1,z_2,\cdots,z_m\}$ 为 K 中满足下述条件的最大点集: 集合 $-\varepsilon C+x+z_j$ $(x\in\mathbf{\Lambda},1\leqslant j\leqslant m)$ 彼此无公共内点, 或与 $\mathcal{C}_1$ 中任意元也无公共内点. 令 $\mathcal{C}_2=C+\mathbf{\Lambda}+\{z_1,\cdots,z_m\}$.

这里 $\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2$ 未必形成 $\mathbb{R}^d$ 的覆盖, 然而将证明, 如果将 $\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2$ 中的每个元以其形心为中心适当放大, 则可得到 $\mathbb{R}^d$ 的一个覆盖.

更确切地说, 对于任意的点 $p\in\mathbb{R}^d$, 下述两种可能情形至少有一个成立:

(a) 存在 $x\in\mathbf{\Lambda}$, $1\leqslant i\leqslant n$, 使得

$$p\in(1+\varepsilon)C+x+y_i;$$

(b) 存在 $x\in\mathbf{\Lambda}$, $1\leqslant j\leqslant m$, 使得

$$p\in(1+\varepsilon)C+x+z_j.$$

为证明这一事实, 固定任意的 $p\in\mathbb{R}^d$, 考虑集族 $-\varepsilon C+x+p$ $(x\in\mathbf{\Lambda})$, 显然这些集合形成一填装.

由 m 的最大性, 下述两种可能情形至少有一个成立:

情形1: $-\varepsilon C+p$ 与 $\mathcal{C}_1$ 的某个元有公共点. 此时存在 $c_1,c_2\in C$, $1\leqslant i\leqslant n$, $x\in\mathbf{\Lambda}$, 使得

$$-\varepsilon c_1+p=c_2+x+y_i.$$

由 C 的凸性可知

$$\begin{aligned}p&=(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{1+\varepsilon}c_2+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}c_1\right)+x+y_i\\&\in(1+\varepsilon)C+x+y_i,\end{aligned}$$

从而 (a) 成立.

情形2: $-\varepsilon C+p$ 与某一形如 $-\varepsilon C+x+z_j$ $(x\in\mathbf{\Lambda},1\leqslant j\leqslant m)$ 的集合有公共点. 则存在 $c_1,c_2\in C$, 使得

$$-\varepsilon c_1+p=-\varepsilon c_2+x+z_j\,.$$

由凸性理论中的一个著名结论可知, 对于任何形心在原点的凸体 $C\subseteq\mathbb{R}^d$, 有 $-\dfrac{1}{d}C\subseteq C$ [例如, 可参见文献 (Bonnesen, Fenchel, 1934)]. 再由 $\varepsilon<1/d$ 这一事实可知 $c_3=-\varepsilon c_2\in C$. 因此

$$\begin{aligned}p&=-\varepsilon c_2+\varepsilon c_1+x+z_j\\&=c_3+\varepsilon c_1+x+z_j\\&=(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{1+\varepsilon}c_3+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}c_1\right)+x+z_j\end{aligned}$$

$$\in (1+\varepsilon)C + x + z_j\,,$$

从而 (b) 成立.

综上可知, 集族

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= (1+\varepsilon)\mathcal{C}_1 \cup (1+\varepsilon)\mathcal{C}_2\\ &= \{(1+\varepsilon)C + x + y_i \mid x \in \mathbf{\Lambda}, 1 \leqslant i \leqslant n\}\\ &\quad \cup \{(1+\varepsilon)C + x + z_j \mid x \in \mathbf{\Lambda}, 1 \leqslant j \leqslant m\}\end{aligned}$$

形成 $\mathbb{R}^d$ 的一个覆盖.

下面估计此覆盖的密度 $d(\mathcal{C}, \mathbb{R}^d)$. 由 $\mathcal{C}_1$ 的定义,

$$d(\mathcal{C}_1, \mathbb{R}^d) = \frac{n\mathrm{Vol}\, C}{\mathrm{Vol}\, K} = \frac{n}{s^d},$$

从而可得

$$d((1+\varepsilon)\mathcal{C}_1, \mathbb{R}^d) = (1+\varepsilon)^d \frac{n}{s^d}.$$

另外, 根据 z_j 的选择, 集合 $-\varepsilon C + x + z_j$ 形成一密度至多为 e^{-n/s^d} 的填装. 因此

$$d((1+\varepsilon)\mathcal{C}_2, \mathbb{R}^d) \leqslant \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^d \mathrm{e}^{-\frac{n}{s^d}}.$$

将这两个界结合在一起, 选取

$$\varepsilon = \frac{1}{(d\ln d)}, \quad n = s^d d(\ln d + \ln\ln d),$$

则有

$$\begin{aligned}d(\mathcal{C}, \mathbb{R}^d) &= d\big((1+\varepsilon)\mathcal{C}_1, \mathbb{R}^d\big) + d\big((1+\varepsilon)\mathcal{C}_2, \mathbb{R}^d\big)\\ &\leqslant (1+\varepsilon)^d \left(\frac{n}{s^d} + \frac{1}{\varepsilon^d}\mathrm{e}^{-\frac{n}{s^d}}\right)\\ &< \left(1 + \frac{2}{\ln d}\right)(d\ln d + d\ln\ln d + 1)\\ &< d\ln d + d\ln\ln d + 5d.\end{aligned}$$

□

Erdős, Rogers (1962) 努力完善了上述论证, 由此证明了存在 C 的平移形成 $\mathbb{R}^d$ 的下述覆盖：其密度不超过定理 7.17 的界, 且 $\mathbb{R}^d$ 中任意点不被过于频繁地覆盖. 两个证明的第一步都是随机生成 C 的平移的一个适度稀疏的配置, 使其覆盖空间 $\mathbb{R}^d$ 的很大一部分.

Gritzmann (1985) 大大改进了 Rogers (1957, 1959) 较早的一些结果, 随后证明了如果凸体 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 至少关于 $\mathrm{lb}\ln d + 4$ 个正交超平面对称, 则 C 可形成密度至

多为 $cd(\ln d)^{1+\mathrm{lbe}} \leqslant cd(\ln d)^{2.443}$ 的格覆盖. 然而对于单位球, Rogers 的界 $\vartheta(B^d) \lessapprox cd(\ln d)^{2.047}$ 则要更好一些 (此处 c 为某个固定常数).

本章有关稠密填装和稀疏覆盖存在性的所有结果都是通过 **随机方法** (通常借助对均值的讨论) 得到的. 对于大多数这类问题, 几乎没有希望利用构造性方法求得与这些结果一致的密度的界.

可直接应用于信息论 (纠错码) 的球填装问题却是少数例外之一. 近几十年来, 这一领域的研究非常活跃, 获得了许多出人意料的重要发现. Leech (1967) 构造出 $\mathbb{R}^{24}$ 中一个密度为 $(0.00193\cdots)$ 的格填装, 此密度与第 6 章所述 Rogers 的上界 $[\delta(B^{24}) \leqslant \sigma_{24} = 0.00245\cdots]$ 非常接近. 普遍认为 $\mathbb{R}^{24}$ 中不存在更高密度的格填装. 在 Leech 的构造中, 每一个球与其他 196560 个球相接触, 在这方面 Leech 格被认为是最优的. Levenštein (1979) 与 Odlyzko, Sloane (1979) 独立证明了 24 维空间中与一个给定球相接触的互不交叠的球的最大个数恰好为 196560.

本章概述的 Leech, Sloane (1971), Rush, Sloane (1987) 以及 Rush (1989) 的方法表明, 如果能够发现若干高度对称的码, 则可获得有效的方法构造密度与随机方法所得密度一致的球填装.

习　题

7.1　给定任一中心对称凸体 $C \subseteq \mathbb{R}^d$, 设 $\delta_T(C)$ $(\vartheta_T(C))$ 表示 C 的平移形成的 $\mathbb{R}^d$ 的填装 (覆盖) 的最大 (最小) 密度, 证明

$$\delta_T(C) \geqslant \frac{\vartheta_T(C)}{2^d}.$$

7.2 (Mahler, 1946b)　设 $\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2, \cdots$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中满足下述条件的无限格序列：存在常数 $\alpha, \beta > 0$, 使得对于任意的 i, 有

(i) $\mathbf{\Lambda}_i$ 对于 αB^d 是容许的 (见定义 7.2);

(ii) $\det \mathbf{\Lambda}_i \leqslant \beta$,

则可选取一收敛子列 $\mathbf{\Lambda}_{i_1}, \mathbf{\Lambda}_{i_2}, \cdots \to \mathbf{\Lambda}$. 也就是说, 对于每个格 $\mathbf{\Lambda}_{i_j}$ 存在适当的基 $(u_{i_j,1}, \cdots, u_{i_j,d})$, 存在一个以 $(u_1, \cdots, u_d)$ 为基的格 $\mathbf{\Lambda}$, 使得

$$\lim_{j\to\infty} u_{i_j,k} = u_k \quad (1 \leqslant k \leqslant d).$$

7.3　设 μ 表示**Möbius 函数**, 即

$$\mu(i) = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 0, & \text{存在素数 } p \text{ 使得 } p^2 | i, \\ (-1)^k, & i = p_1 p_2 \cdots p_k, \text{ 其中 } p_j \text{ 为互异素数}. \end{cases}$$

证明:

(i) μ 为乘性函数, 即对于任何一对互素的正整数 (i,j), $\mu(ij)=\mu(i)\mu(j)$;

(ii) 对于任何乘性函数 m, 函数

$$M(k)=\sum_{i|k} m(i)$$

仍是乘性函数, 这里的和式对 k 的所有正因子求和;

(iii) $\sum_{i|k}\mu(i)=\begin{cases}1, & k=1,\\ 0, & k>1;\end{cases}$

(iv) **(Möbius 反演公式)** 对于任意定义在正整数集上的实 (或复) 值函数 f, 设

$$F(k)=\sum_{i|k} f(i),$$

则

$$f(k)=\sum_{i|k}\mu(i)F\left(\frac{k}{i}\right);$$

(v) 如果对于某对定义在正整数集上的实 (或复) 值函数 f 与 F, 有

$$f(k)=\sum_{i|k}\mu(i)F\left(\frac{k}{i}\right),$$

则

$$F(k)=\sum_{i|k} f(i);$$

(vi) 如果 $d>1$, 则有 $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(i)\frac{1}{i^d}=\frac{1}{\zeta(d)}=\frac{1}{1+\frac{1}{2^d}+\frac{1}{3^d}+\cdots}$.

7.4　证明:

(i) 对于任何 Jordan 可测集 $C\subseteq\mathbb{R}^d$ 有 $\Delta(C)\leqslant \mathrm{Vol}\ C$;

(ii) 对于任何体积有限的无界星形体 C 有 $\Delta(C)\leqslant\frac{\mathrm{Vol}\,C}{2\zeta(d)}$.

7.5　证明

$$\int_0^1 d(1-r)^{d-1}r^d\,\mathrm{d}r=\frac{(d!)^2}{(2d)!}.$$

7.6　对中心对称的凸体利用 (7.1), 证明对任何凸体 $C\subseteq\mathbb{R}^d$, 均有

$$\delta_L(C)>\frac{cd^{3/2}}{4^d},$$

其中 $c>0$ 为与 C, d 无关的常数.

7.7　设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 为关于每一坐标超平面均对称的凸体, $\|\cdot\|_C$ 为相应的 Minkowski 度量. 证明

$$\|x\|_C = \|(x_1, \cdots, x_d)\|_C$$

为 $|x_i|$ 的非减函数, $1 \leqslant i \leqslant d$.

7.8 (Katona et al., 1993)　设 $C \subseteq \mathbb{R}^2$ 为中心对称的凸体, $\|\cdot\|_C$ 为相应的 Minkowski 度量. 证明对任意 $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^d$, 如果 $\|x_i\|_C \geqslant 1$ $(i = 1, 2, 3)$, 则存在两个不同的下标 $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$, 使得 $\|x_i + x_j\|_C \geqslant 1$.

7.9　设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 为关于 $\mathbf{0}$ 中心对称的凸体, p 为一奇素数. 证明对于所有的 $x, y \in \mathbb{Z}_p^d$, 有

$$\|x + y\|_{C,p} \leqslant \|x\|_{C,p} + \|y\|_{C,p},$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 Rush 度量 (见定义 7.13).

7.10 (Leech, Sloane, 1971)　设 p 为素数, $L \subseteq \mathbb{Z}_p^d$ 为 k 维线性码. 证明

$$\mathbf{\Lambda} = L + p\mathbb{Z}^d = \{\, x + pz \mid x \in L, p \in \mathbb{Z}^d \,\}$$

为 $\mathbb{R}^d$ 中的格.

7.11　设 $\boldsymbol{H}_n$ 是元素为 ± 1 $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 的 $2^n \times 2^n$ 矩阵, 定义如下: $\boldsymbol{H}_0 = (1)$; 对于所有的 $n \geqslant 1$,

$$\boldsymbol{H}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_{n-1} & \boldsymbol{H}_{n-1} \\ \boldsymbol{H}_{n-1} & -\boldsymbol{H}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(i) 证明 $\boldsymbol{H}_n$ 为对称矩阵, 即其转置 $\boldsymbol{H}_n^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{H}_n$;

(ii) 证明 $\boldsymbol{H}_n$ 为 **Hadamard 矩阵**, 即 $\boldsymbol{H}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_n = 2^n\boldsymbol{I}$, 其中 $\boldsymbol{I}$ 表示主对角线上元素均为 1, 其他元素均为 0 的 $2^n \times 2^n$ 矩阵;

(iii) 设 v_i (v_i') 是由 $\boldsymbol{H}_n$ ($-\boldsymbol{H}_n$) 的第 i 行得到的 0-1 序列, 该行中原有的 -1 均替换为 0, 证明

$$L_n = \{v_1, \cdots, v_{2^n}, v_1', \cdots, v_{2^n}'\}$$

为 $\{0,1\}^{2^n}$ 中的一个线性码, 即对 L_n 中任何两个元素的和取模 2 后仍在 L_n 内;

(iv) 对 $n \geqslant 1$, 证明 L_n 的任两个不同元之间的最小 Hamming 距离为 2^{n-1}, 从而 $L_n \subseteq \mathbb{R}^{2^n}$ 中任两个不同元之间的最小欧氏距离为 $2^{(n-1)/2}$;

(v) 证明

$$\mathbf{\Lambda}_n = L_n + 2\mathbb{Z}^{2^n} = \{\, v + 2z \mid v \in L_n,\ z \in \mathbb{Z}^{2^n} \,\}$$

为一个格, 且以 $\mathbf{\Lambda}_n$ 中的格点为球心以 $\min\{2^{(n-3)/2}, 1\}$ 为半径的球形成一填装 $(n \geqslant 1)$. 对于 $n = 1, 2, 3$, 确定此填装的密度, 以及此填装中与一固定球相切的球的个数.

7.12　设 C 为有限圆柱, 证明 C 形成的最稠密格填装的密度为 $\delta_L(C) = \pi/\sqrt{12}$.

7.13 (Bezdek, W. Kuperberg, 1991)

(i) 证明对 $\mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 2)$ 中任意两个体积相等的椭圆体, 存在一仿射变换, 将两者变换成全等的 d 维体;

(ii) 证明存在椭圆体 $C \subseteq \mathbb{R}^3$, 使得 $\delta(C) \neq \delta_L(C)$.

7.14 (Fejes Tóth W. Kuperberg, 1993c)　证明存在椭圆体 $C \subseteq \mathbb{R}^3$, 使得 $\vartheta(C) \neq \vartheta_L(C)$.

第 8 章　圆盘填装与平面图

给定凸体 C, 在 C 的全等拷贝构成的填装中, 能与一个填装元相接触的"邻居"的最大个数是多少? 就这一问题的特殊情形 $C = B^3$ (3 维球), Gregory 和 Newton 曾经有过一场著名的争论, 这或许是组合几何中第一个真正有重大意义的问题. 事实上, 可以提出一项更具挑战性的研究任务. 给定一个由凸体构成的填装 $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ 的**接触图**定义如下, 其顶点对应于 $\mathcal{C}$ 的元素, 两个顶点以边相连, 当且仅当对应元素在 $\mathcal{C}$ 中相接触. 试刻画可由给定凸体 C 的全等拷贝 (相似拷贝, 平移等) 形成的填装得出的接触图图类 [参见文献 (Jackson, Ringel, 1984; Moser, Pach, 1993; Pach, 1980)]. 这方面的第一个非平凡结果是 Koebe 的著名的表示定理, 该定理指出有限图是平面中圆盘填装的接触图, 当且仅当该有限图是平面图 (图 8.1). 这一结果有许多有趣的推论. 特别地, 它提供了平面图的 Lipton-Tarjan 分离子定理的一个纯几何证明.

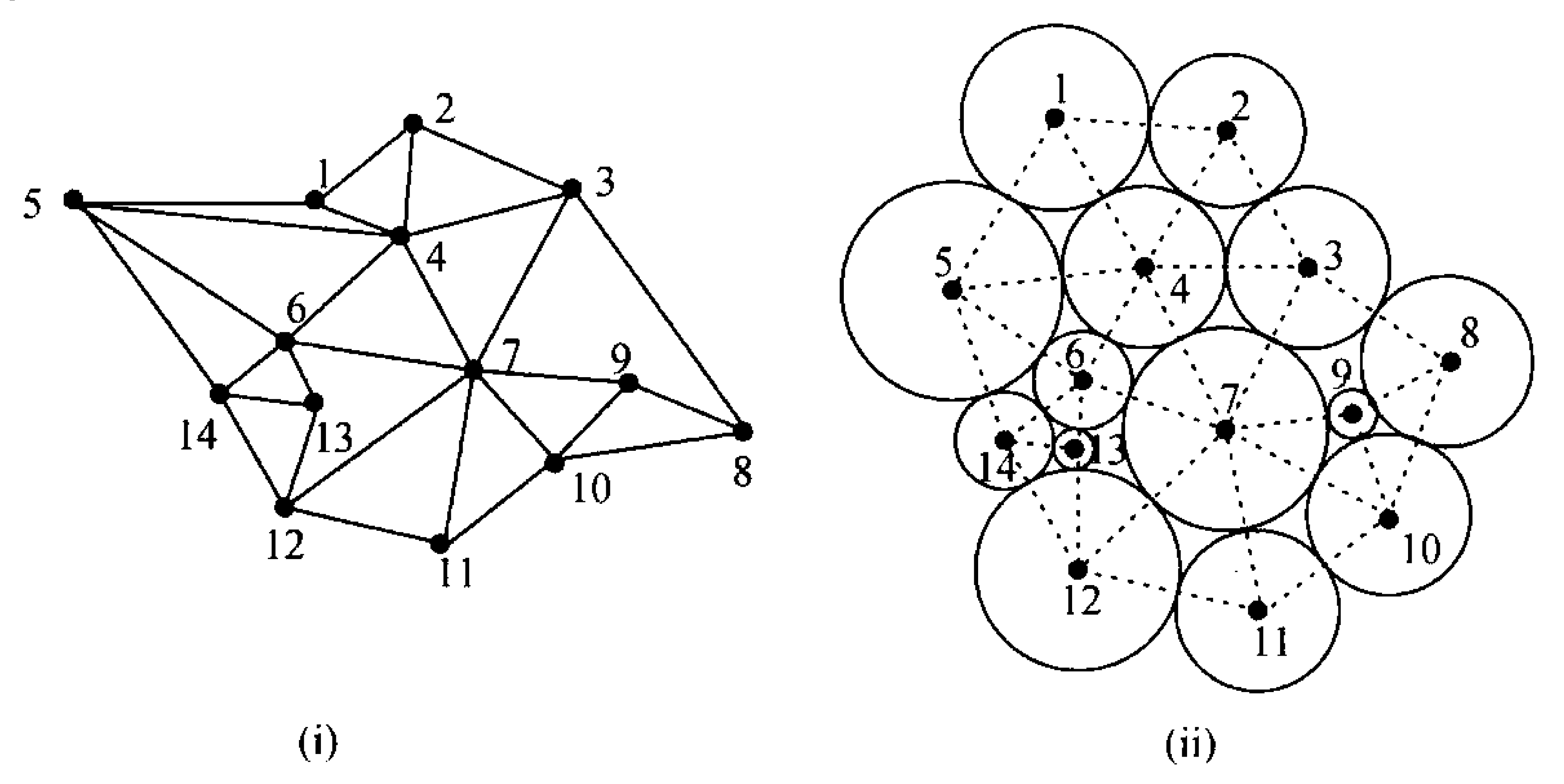


图 8.1　(i) 具有 14 个顶点的平面图 G, (ii) 图 G 的圆盘表示

8.1　Koebe 表示定理

Koebe (1936) 证明了下述著名定理, 该定理后来由 Andreev (1970a, 1970b) 与 Thurston (1985a) 重新发现; 有关背景另可参见文献 (Brightwell, Scheinerman, 1993; Sachs, 1994).

定理 8.1 (Koebe)　任意给定平面图 G, 其顶点集为 $V(G) = \{v_1, \cdots, v_n\}$, 边集为 $E(G)$, 则存在平面中由 n 个圆盘 (未必全等) $\mathcal{C} = \{C_1, \cdots, C_n\}$ 构成的一个

具有下述性质的填装: 对 $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, C_i 与 C_j 相切当且仅当 $v_iv_j \in E(G)$.

当然, 如果已有图 G 的一个此种 **相切** 圆盘表示, 则不难通过平面关于圆心不被任一圆盘所覆盖的圆的反演构造多个此种表示. Thurston 还证明了, 如不计上述变换, 任意 **极大平面图** (即 **三角剖分图**)的相切圆盘表示是唯一的.

定理 8.1 的下述证明是由 Colin de Verdière (1989) 与 Marden-Rodin (1990) 给出的. 这一证明系根据 Thurston 就较为一般的情形给出的论证直接改写而成.

定理 8.1 的证明　只须对极大平面图 G 证明结论. 事实上, 如果 G 有非三角形面, 在每个非三角形面中添加一个新顶点并将其与该面的每个顶点连一条边. 若所得图存在满足定理条件的圆盘表示, 则删除与新增顶点相对应的圆盘, 即得原图的满足条件的表示.

现设图 G 为固定的三角剖分图, 其顶点集 $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$, 边集为 E, 面集为 F (包括外部三角形). 由 **Euler 多面体公式**, 有

$$|V| - |E| + |F| = 2\,.$$

因为 $3|F| = 2|E|$, 所以

$$|F| = 2|V| - 4 = 2n - 4\,. \tag{8.1}$$

令 $r = (r_1, \cdots, r_n)$ 表示由 n 个正实数组成的任一向量, 其中 $r_1 + \cdots + r_n = 1$. 对 G 的每个面 $v_iv_jv_k$, 考虑从纸板上剪下的一个三角形, 其顶点为三个两两相切圆盘的圆心, 三个圆盘的半径分别为 r_i, r_j 和 r_k. 为简单起见, 纸板三角形的三个顶点仍分别记为 v_i, v_j 和 v_k. 将这些纸板三角形按其在 G 中的连接情况沿边粘接. 对任意顶点 v_i, 令 $\sigma_r(v_i)$ 表示所有以 v_i 为顶点的纸板三角形在 v_i 处的角的和. 如果恰好 G 的每个不属于外部面的顶点处都有 $\sigma_r(v_i) = 2\pi$, 则纸板三角形在平面上完全拼合, 从而得到由半径为 $r_1, \cdots, r_n$ 的圆盘形成的图 G 的满足条件的表示 (**注意**: 这一陈述并不是显而易见的).

否则, 在任何情况下, 由 (8.1) 均可推知

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_r(v_i) = |F|\pi = (2n-4)\pi.$$

令 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 为如下定义的 $(n-1)$ 维单纯形

$$S = \left\{ r = (r_1, \cdots, r_n) \mid \text{对所有 } i,\ r_i > 0 \text{ 且 } \sum_{i=1}^{n} r_i = 1 \right\},$$

并令

$$H = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_n) \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i = (2n-4)\pi \right\}.$$

考虑连续映射 $f: S \to H$, 其中,

$$f(r) = (\sigma_r(v_1), \cdots, \sigma_r(v_n)).$$

不妨假设 v_1, v_2 和 v_3 是图 G 的外部面的顶点. 例如, 如前所述, 只须证明点

$$x^* = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 2\pi, 2\pi, \cdots, 2\pi\right) \tag{8.2}$$

落在 f 的象集中.

断言 A $f: S \to H$ 为 1-1 映射.

为证此结论, 任取两个互异点 $r, r' \in S$, 令 I 表示所有使得 $r_i < r'_i$ 的足标 i 组成的集合. 显然, $I \neq \varnothing$ 且 $I \neq \{1, \cdots, n\}$.

考虑分别以 r_i, r_j 和 r_k 为半径的三个两两相切圆盘的圆心所确定的纸板三角形 $v_i v_j v_k$. 如果增大 r_i 而令另外两个半径减小或保持不变, 使三个圆盘仍两两相切, 则该三角形以 v_i 为顶点的角减小 (见习题 8.1). 类似地, 如果 r_i 和 r_j 增大而 r_k 减小或保持不变, 则该三角形中以 v_i 和 v_j 为顶点的两角之和将减小. 所以

$$\sum_{i \in I} \sigma_r(v_i) > \sum_{i \in I} \sigma_{r'}(v_i), \tag{8.3}$$

由此即得 $f(r) \neq f(r')$. 断言 A 证毕.

设 $s = (s_1, \cdots, s_n)$ 为单纯形 S 的边界点, I 表示所有使 $s_i = 0$ 的足标的集合. 注意, 如果 r 趋向于 s, 则在每个至少有一个顶点属于集合 $\{v_i \mid i \in I\}$ 的纸板三角形中, 这些顶点处的角的和趋于 π. 所以,

$$\lim_{r \to s} \sum_{i \in I} \sigma_r(v_i) = |F(I)|\pi, \tag{8.4}$$

其中 $F(I)$ 表示 G 的至少有一个顶点在 $\{v_i \mid i \in I\}$ 中的面所成的集合.

对任意固定的 $r \in S$ 和任意非空真子集 $I \subset \{1, \cdots, n\}$, 均存在 $s \in \mathrm{Bd}\, S$, 使得对所有 $i \in I$ 有 $s_i = 0$, 对所有 $i \notin I$ 有 $s_i > r_i$. 如果令 r 沿直线趋向于 s, 则由 (8.3) 知, $\sum_{i \in I} \sigma_r(v_i)$ 将增大. 考虑到 (8.4), 即得

$$\sum_{i \in I} \sigma_r(v_i) < |F(I)|\pi.$$

换言之, 映射 $f: S \to H$ 的象落在由下述关系确定的 $(n-1)$ 维 (有界) 凸多胞形 P^* 内,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = (2n-4)\pi, \quad \sum_{i \in I} x_i < |F(I)|\pi, \tag{8.5}$$

其中 I 取遍 $\{1,\cdots,n\}$ 的所有非空真子集.

易知 $f:S\to P^*$ 为 1-1 映射, 并且当 r 趋向于 $\mathrm{Bd}\,S$ 时, $f(r)$ 的所有聚点属于 $\mathrm{Bd}\,P^*$ [见 (8.4)]. 根据这一事实, 立即得到下述结果.

断言 B $f:S\to P^*$ 为**满射**, 即 $f(S)=P^*$ (见习题 8.2).

为完成定理 8.1 的证明, 还须证 (8.2) 中定义的点 $x^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)$ 属于 P^*. 显然,

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^*=(2n-4)\pi\,.$$

设 I 为 $\{1,\cdots,n\}$ 的非空真子集. 如果 $|I|=n-1$ 或 $n-2$, 则 G 的每个面至少有一个顶点属于 $\{v_i\mid i\in I\}$, 即

$$|F(I)|=|F|=2n-4\,.$$

所以, 在以上两种情形下

$$\sum_{i\in I}x_i^*\leqslant 2\pi(n-3)+\frac{4\pi}{3}<(2n-4)\pi=|F(I)|\pi\,.$$

下述结果的证明留作习题 (见习题 8.3).

断言 C 对任意子集 $I\subseteq\{1,\cdots,n\}$, 若 $1\leqslant|I|\leqslant n-3$, 则 G 的至少有一个顶点属于 $\{v_i\mid i\in I\}$ 的面的个数大于 $2|I|$.

对任意这样的 I, 有

$$\sum_{i\in I}x_i^*\leqslant 2\pi|I|<|F(I)|\pi\,.$$

因此 x^* 满足定义 P^* 的 (8.5) 中的所有关系式, 即 $x^*\in P^*=f(S)$, 定理证毕. □

设 G 为任一含三角形面 $v_1v_2v_3$ 的极大平面图. 注意, 通过适当的反演, G 的任一圆盘表示可以转换成具有下述性质的另一圆盘表示: 对应于 v_1,v_2 和 v_3 的圆盘大小相同, 且其他圆盘均落在这些圆盘围成的区域中. 因此, 由断言 A 立即可得, G 的此种表示在不计平面的反演与刚体运动的意义下是唯一确定的.

注意, 由定理 8.1 可直接推得 Fáry (1948) 给出的下述著名结果 [另见 (Tutte, 1963)].

定理 8.2 (Fáry) *任意有限平面图均可画在平面上, 使得其边为两两不相交的直线段.*

8.2 Lipton-Tarjan 分离子定理

分治法也许是解决许多算法问题最有效的方法 [参见文献 (Aho et al., 1974; Coreman et al., 1990; Ullman, 1984)]. 其思想是将一个问题分成两个较小的同类型

的子问题, 每个子问题都可以用递归方法解决, 综合两个子问题的解以获得原问题的解. 这一方法在平面图中的许多应用都是以 Lipton-Tarjan (1979) 给出的下述重要结果为基础的, 该结果证明了任一平面图都可以通过删除相对较少的顶点分成两个小得多的分支.

定理 8.3 (Lipton-Tarjan) 设 G 为具有 n 个顶点的平面图. 则 G 的顶点集可划分为三部分 A, B 和 C, 使得 $|A|, |B| \leqslant \frac{3}{4}n$, $|C| < 2\sqrt{n}$, 且 A 中每个顶点均不与 B 中顶点相邻.

事实上, Lipton 和 Tarjan 证得了一个稍强一些的结论, 指出 A 与 B 的大小具有上界 $\frac{2}{3}n$ (见习题 8.4). 这一定理在如下领域有广泛的应用: 图论 (Lipton, Tarjan, 1980; Frederickson, 1987), 超大规模集成理论 (VLSI) (Leiserson, 1983; Leighton, 1983; Ullman, 1984), 数值分析 (Gilbert, 1980; Gilbert, Tarjan, 1987; Lipton et al., 1979), 复杂度理论 (Lipton, Tarjan, 1980) 等. 关于此定理的许多扩张, 推广和其他应用, 参见 Alon et al. (1990, 1994), Chung (1990), Djidjev (1982), Gazit, Miller (1990), Miller (1986), Miller et al. (1991), Teng (1991).

下面提供定理 8.3 的一个证明, 该证明是由 Miller, Thurston (1990) 根据 Koebe 表示定理得出的. 这里要用到下面这一众所周知的事实.

引理 8.4 对任意 n 点集 $P \subseteq \mathbb{R}^d$, 均存在点 $q \in \mathbb{R}^d$, 使得任一不含 q 的半空间覆盖 P 的至多 $\frac{d}{d+1}n$ 个点 (这样的点 q 称为 P 的**中心点**).

证明 令 $\mathcal{H}$ 为所有覆盖 P 的多于 $\left\lfloor \frac{d}{d+1}n \right\rfloor$ 个点的半空间所成的集合. 须证明 $\mathcal{H}$ 中所有元素的交非空. 由 Helly 定理 (1923) (Eckhoff, 1993)], 只须证明任意 $d+1$ 个半空间 $H_1, \cdots, H_{d+1} \in \mathcal{H}$ 有公共点. 事实上, 如无公共点, 则有

$$\begin{aligned}|P| &\leqslant \sum_{i=1}^{d+1} |(\mathbb{R}^d - H_i) \cap P| \\ &\leqslant (d+1)\left(n - \left\lfloor \frac{d}{d+1}n \right\rfloor - 1\right) \\ &< n,\end{aligned}$$

矛盾. □

定理 8.3 的证明 令 S 表示 $\mathbb{R}^3$ 中以 $(0,0,1)$ 为球心的单位球, 其北极和南极分别为 $N=(0,0,2)$ 和 $(0,0,0)$. **球极平面投影** $\pi: \mathbb{R}^2 \to S$ 将 xy 平面中任一点 p 映射到 Np 与 S 的交点. 任一圆盘在 π 下的象为一球冠. 反之, S 的任一内部不含 N 的球冠的原象为 xy 平面的一个圆盘或半平面 (图 8.2).

由定理 8.1 知, G 的顶点可以表示为互不交叠的球冠 $C_1, \cdots, C_n \subseteq S$, 使得其中两个球冠相接触当且仅当它们所对应的顶点相邻. 在 C_i 内部选取一点 p_i, 记

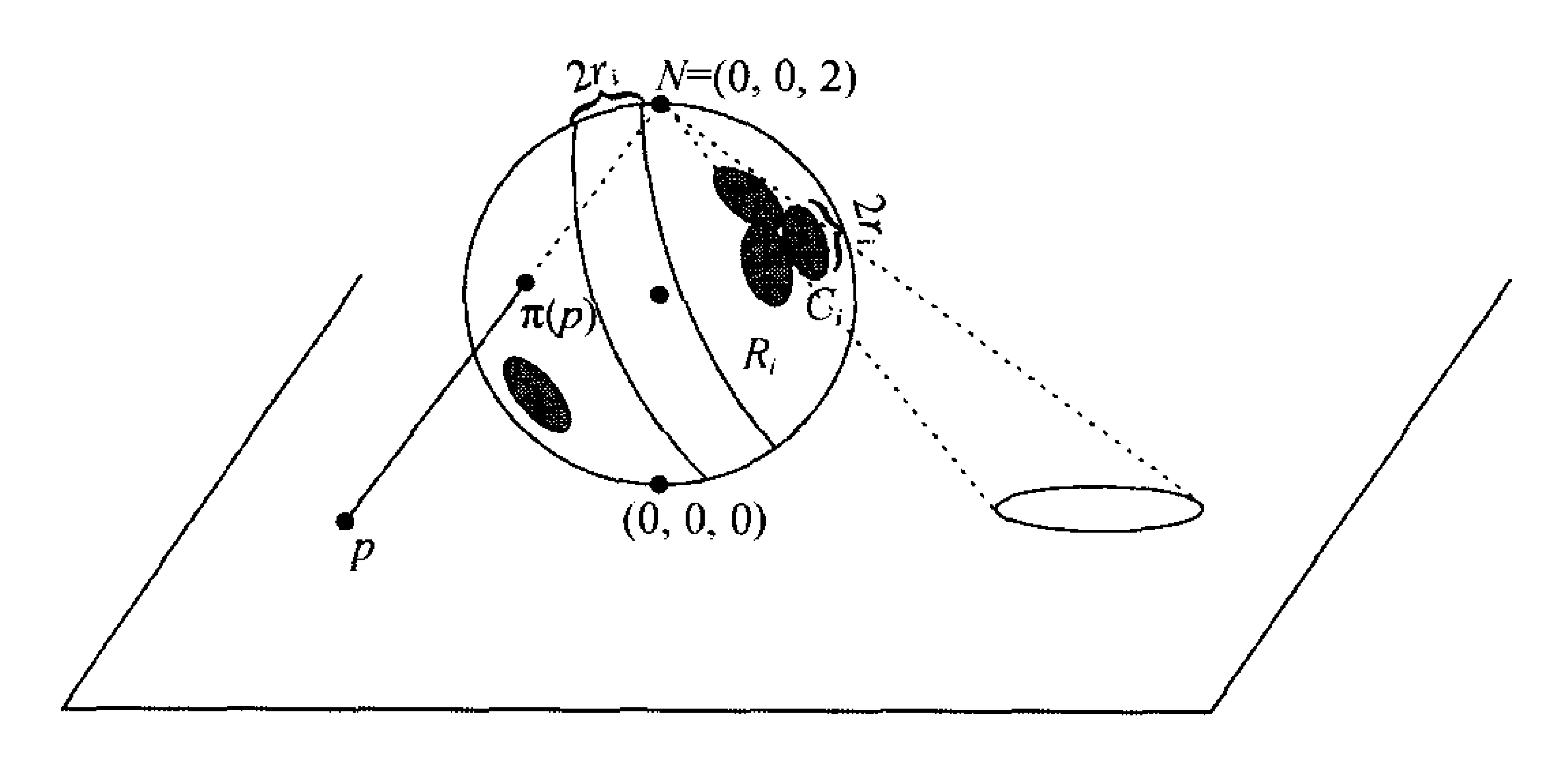


图 8.2　定理 8.3 证明图示

$P=\{p_1,\cdots,p_n\}$. 设 $q\in\mathbb{R}^3$ 为 P 的满足引理 8.4 中条件的中心点. 由对称性, 可设 q 属于连接 S 的球心与南极的线段.

假设 q 不与 S 的中心 $(0,0,1)$ 重合, 则

$$d=|q-(0,0,1)|\neq 0\,.$$

令 $\sigma:S\to S$ 为由下式定义的映射:

$$\sigma(p)=\begin{cases}\pi\left(\sqrt{\dfrac{1+d}{1-d}}\pi^{-1}(p)\right), & p\neq N,\\ N, & p=N.\end{cases}$$

因为 σ 系由一个逆球极投影, 一个 xy 平面的倍数为 $\sqrt{\dfrac{1+d}{1-d}}$ 的伸缩变换和一个球极平面投影三者复合而成, 它将球冠映成球冠, 并且保持关联关系. 显然, $\sigma(p_i)$ 位于球冠 $\sigma(C_i)$ 的内部, 可以证明 $(0,0,1)$ 为 $\sigma(P)$ 的中心点.

所以不妨设 $(0,0,1)$ 为 P 的中心点. 则任一过点 $(0,0,1)$ 的平面至多有 P 的 $\dfrac{3}{4}n$ 个点严格位于其右侧 (和左侧).

令 r_i 表示球冠 C_i 的球面半径. 因为 $C_1,\cdots,C_n$ 构成一个填装, 且 C_i 的面积至多为 πr_i^2, 故有

$$\sum_{i=1}^{n}\pi r_i^2<4\pi\,.$$

由 Jensen 不等式, 得

$$4>\sum_{i=1}^{n}r_i^2\geqslant n\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}r_i}{n}\right)^2,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}r_i<2\sqrt{n}.$$

现考虑任一过 $(0,0,1)$ 的平面 H, 令 $u(H)$ 表示以 $(0,0,1)$ 为起点的单位法向量. 当 H 取遍所有过 $(0,0,1)$ 并与固定球冠 C_i 相交的平面时, $u(H)$ 的终点的轨迹形成关于 S 的一个大圆对称的类环形区域 R_i (图 8.2). 显然, R_i 的面积满足

$$A(R_i) < (2r_i)(2\pi) = 4\pi r_i.$$

所以, 存在 S 的一个点, 该点至多被

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} A(R_i)}{A(S)} < \frac{\sum_{i=1}^{n} 4\pi r_i}{4\pi} = \sum_{i=1}^{n} r_i < 2\sqrt{n}$$

个区域 R_i 所覆盖. 等价地, 存在一个平面 H_0, 与其相交的球冠 C_i 少于 $2\sqrt{n}$ 个.

令 A, B 和 C 分别表示 G 的如下顶点的集合, 这些顶点所对应的球冠 C_i 分别完全位于 H_0 的一侧, 位于 H_0 的另一侧, 或与 H_0 相交. 由 H_0 的上述性质即得 $|A|, |B| \leqslant \frac{3}{4}n$ 且 $|C| < 2\sqrt{n}$. 显然, A 的任一顶点均不与 B 的顶点相邻, 因为位于两个互余半空间的闭球冠是互不接触的. □

注意, 上述论证稍加修改可得出一个更强的结果.

定理 8.5 *设图 G 的顶点集可表示为一个 d 维球族 $\mathcal{B} = \{B_1^d, \cdots, B_n^d\}$, 其中两个球有公共点当且仅当它们对应的顶点相邻. 进而假设 $\mathbb{R}^d$ 中任何点均不同时属于 $\mathcal{B}$ 的多于 k 个球的内部, 则 G 的顶点集可以划分为三部分 A, B 和 C, 使得*

$$|A|, |B| \leqslant \frac{d+1}{d+2}n, \quad |C| \leqslant c_d k^{1/d} n^{1-(1/d)},$$

且 A 中任一顶点均不与 B 中顶点相邻 (c_d 为仅依赖于 d 的常数).

Miller et al. (1997) 也独立地得到最后这一结果. 关于定理 8.5 在平面中更深远的推广见 Fox, Pach (2008a).

8.3 离散凸函数

Koebe 给出的定理 8.1 的原证明依据的是共形映射理论中的一些高深结果. 而在本章一开始给出的 Thurston 的证明运用的是离散方法. 事实上, 他的论证很容易化成一种算法, 用以构造平面图的任意精度的“近似”圆盘表示. Thurston (1985b) 推广了这一方法, 指出共形映射理论中许多重要结果 (如 Schwarz 引理, Riemann 映射定理, Koebe 单值化定理) 均可“离散化”并用类似的构造性方法证明 (Doyle et al., 1994; Rodin, 1987, 1989; Rodin, Sullivan, 1987; Stephenson, 1990; Schramm,1991). 许多此类论证的关键是确立无限圆盘填装的某些刚性性质, 这种填装中每个圆盘与六个圆盘相切.

本节证明这样的一个结果.

定义 8.6　凸集族 $\mathcal{C}=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 形成的填装称为 k **相邻的**, 如果每个 C_i 至少与 $\mathcal{C}$ 中 k 个元素相切.

例如, 单位圆盘所成稠密格填装 (图 3.1) 是 6 相邻的. 另一方面, 易知每个由未必相等的圆盘构成的 6 相邻圆盘填装必是无限的 (见习题 8.8).

L. Fejes Tóth (1977) 猜想正则圆盘填装具有下述有趣的极值性质: 如果对其作 "扰动", 则必可生成或任意大的圆盘, 或任意小的圆盘. 更精确地说, 下面的 "0-1 律" 成立: 如果 $\mathcal{C}$ 是一个 6 相邻圆盘填装, 则

$$\frac{\inf\limits_{C\in\mathcal{C}} r(C)}{\sup\limits_{C\in\mathcal{C}} r(C)}=\begin{cases}1, & \mathcal{C}\text{是正则的},\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

其中 $r(C)$ 表示 C 的半径.

Bárány, Füredi, Pach (1984) 证明了这一猜想的加强形式.

定理 8.7 (Bárány et al.)　如果 $\mathcal{C}$ 是含有至少两个半径互异的圆盘的 6 相邻圆盘填装, 则 $\inf_{C\in\mathcal{C}} r(C)=0$.

由此人们可能会猜想, 对任一 6 相邻圆盘填装 $\mathcal{C}$, 均存在一个平面有界区域含有 $\mathcal{C}$ 的无限多个元素. 然而, 事实并非如此. 如图 8.3 (由 K. Stephenson 发现) 所示圆盘填装即不含有限聚点.

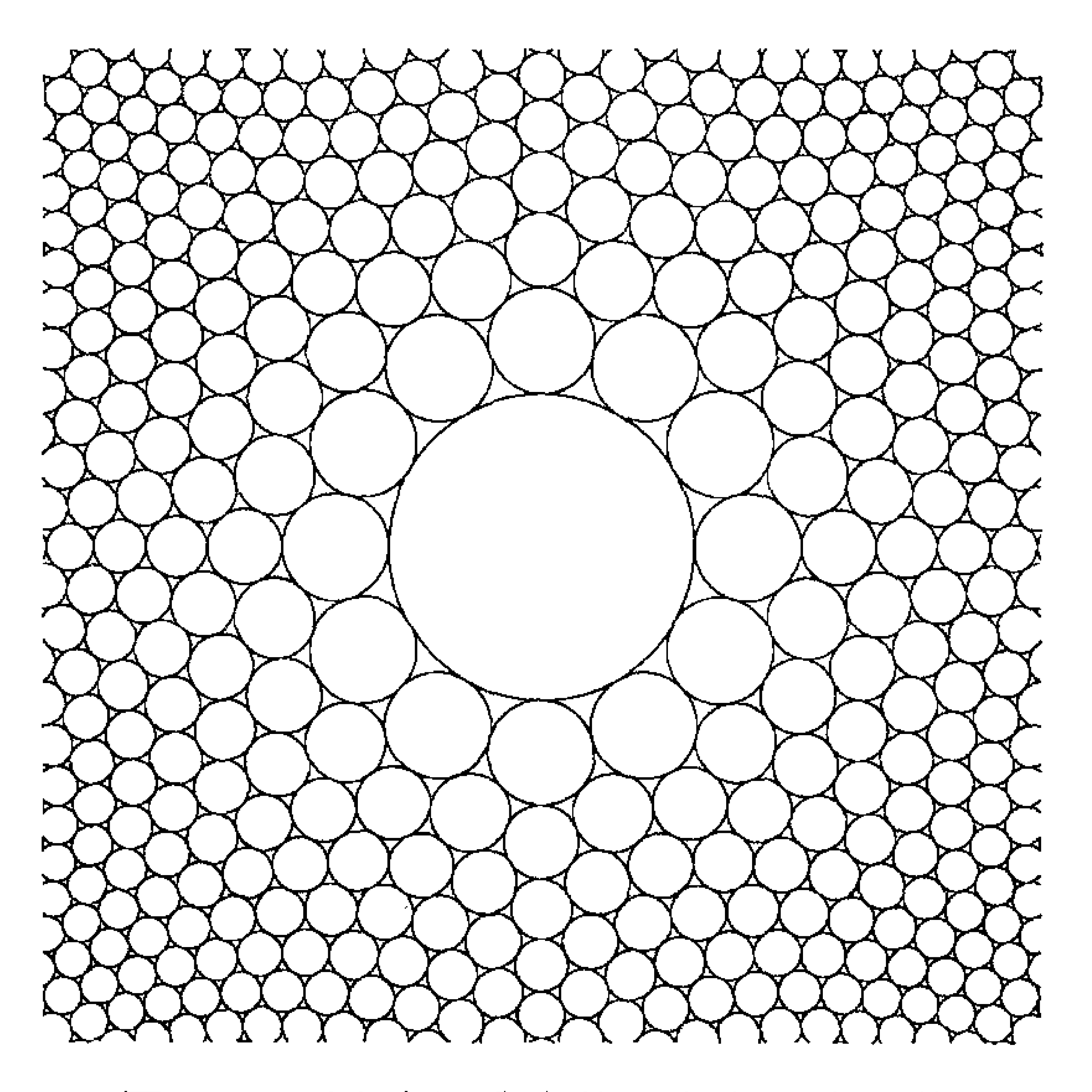


图 8.3　不含有限聚点的 6 相邻圆盘填装

为证明定理 8.7, 须做如下准备.

定义 8.8 图 $G=(V,E)$ 称为**局部有限图**, 如果每个顶点只与有限个其他顶点相邻. 对任一 $x\in V$, 令 $N_G(x)$表示 x 的所有邻点所成集合.

函数 $f:V\to\mathbb{R}$ 称为 G 上的**凸函数** (或**下调和函数**), 如果对任意 $x\in V$, 有

$$\frac{1}{|N_G(x)|}\sum_{y\in N_G(x)} f(y)\geqslant f(x).$$

显然, 定义在连通有限图上的任意凸函数都是常数.

定理 8.9 (Bárány et al., 1984) 设 $G=(V,E)$ 为局部有限图, $f:V\to\mathbb{R}$ 是 G 上的凸函数. 又设存在一条边 $x_0y_0\in E$ 满足 $f(x_0)=0$, $f(y_0)=1$, 令 V_i 表示 G 中从 y_0 出发可通过一条长至多为 i 的单调递增路达到的顶点所成的集合, 即

$$\begin{aligned}V_i=\{&y\in V|\exists y_1,\cdots,y_{j-1}\in V,\text{使得}\, j\leqslant i,\ y_0y_1,y_1y_2,\cdots,y_{j-1}y\in E,\\&f(y_0)\leqslant f(y_1)\leqslant\cdots\leqslant f(y)\}.\end{aligned}$$

则对任意自然数 n,

$$\max_{x\in V_n} f(x)\geqslant 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|E_i|},$$

其中

$$E_i=\{uv\in E\mid u\in V_{i-1},v\in V_i-V_{i-1},f(u)\leqslant f(v)\}.$$

证明 证明中约定 n 固定不变, 且 $M=\max_{x\in V_n} f(x)$.

定义子图 $G'=(V',E')\subseteq G$ 如下:

$$\begin{aligned}V'&=V_n\cup\{x_0\},\\E'&=\{uv\in E\mid u,v\in V_n\}\cup\{x_0y_0\}.\end{aligned}$$

按下述规则对 G' 的边 uv 定向, 将其转换成**有向图** $\vec{G'}=(V',\vec{E'})$.

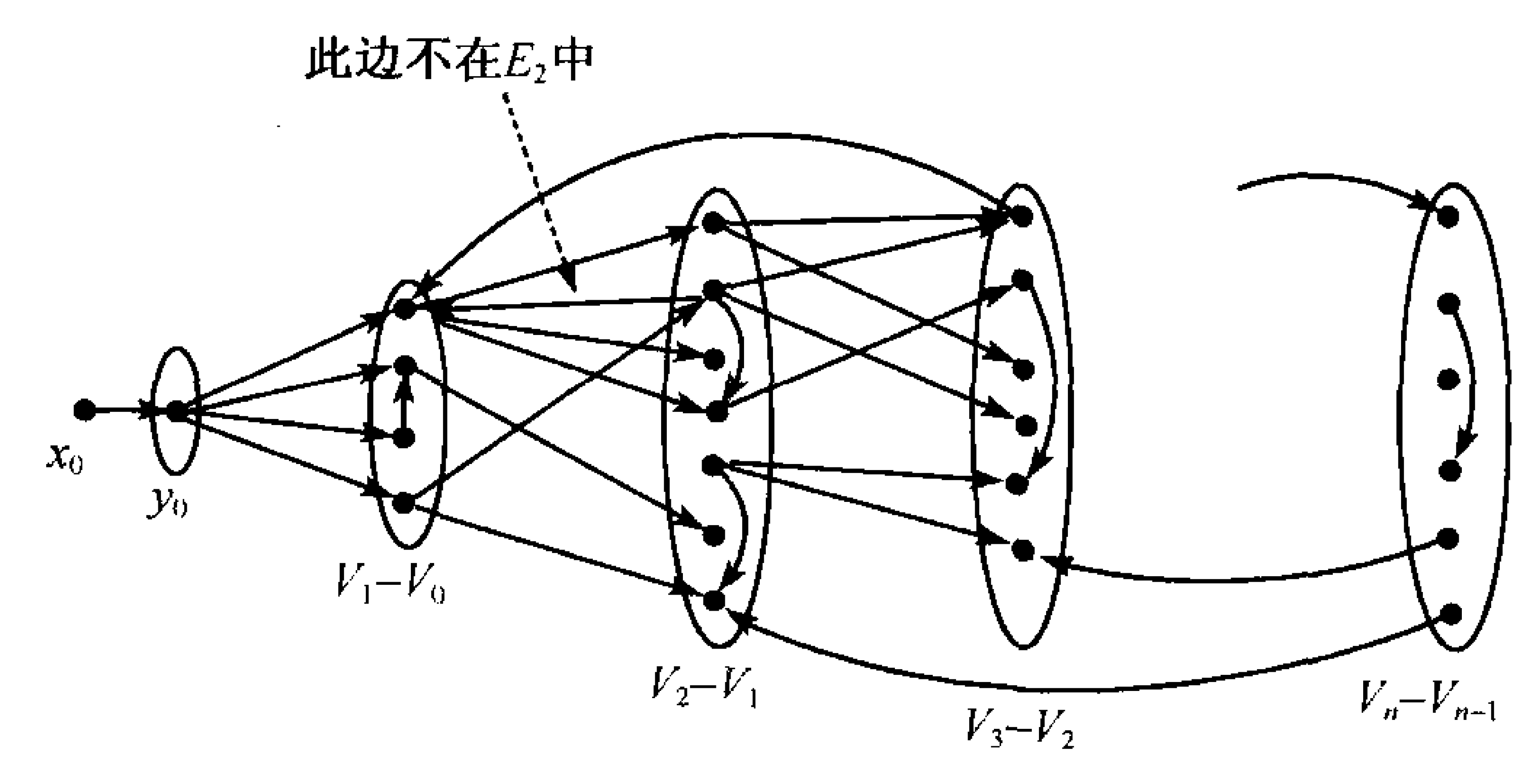


图 8.4 图 $\vec{G'}$

(a) 如果 $uv \in E'$ 且 $f(u) < f(v)$, 则令 $\overrightarrow{uv} \in \vec{E}'$;

(b) 如果对某个 $u \in V_{i-1}$, $v \in V_i - V_{i-1}$ 有$uv \in E_i$ ($\subseteq E'$), 则令$\overrightarrow{uv} \in \vec{E}'$ ($1 \leqslant i \leqslant n$);

(c) 所有其他边 $uv \in E'$ [满足 $f(u) = f(v)$] 可任意定向.

注意, 如果对某个 $u \in V_{i-2}$, $v \in V_i - V_{i-1}$ 有 $uv \in E'$, 则 $f(u)$ 必大于 $f(v)$, 从而 $\overrightarrow{vu} \in \vec{E}'$.

设 Φ 为具有下述性质的函数 $\varphi : V' \to \mathbb{R}$ 所成的集合:

(i) $\varphi(x_0) = 0$;

(ii) 对任意 $x \in V'$, $f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant M$;

(iii) 存在有向子图 $\vec{G''} = (V', \vec{E''}) \subseteq \vec{G'}$, 使得 $\overrightarrow{x_0y_0} \in \vec{E''} \subseteq \vec{E'}$, 对任意 $\overrightarrow{uv} \in \vec{E''}$, $\varphi(u) \leqslant \varphi(v)$, 且

$$\frac{1}{|N_{G''}(x)|} \sum_{y \in N_{G''}(x)} \varphi(y) \geqslant \varphi(x)$$

对任意 $x \in V_{n-1}$ 成立. 这里 G'' 表示略去 $\vec{G''}$ 中边的方向所得到的图.

显然有 $f \in \Phi$. 为此只须证明 $\varphi = f$ 满足条件 (iii), 其中 $\vec{G''} = \vec{G'}$. 这一结果由下述事实立即可得: 如果 $x \in V_{n-1}$, 则对任意 $y \in N_G(x) - N_{G'}(x)$, 有 $f(y) < f(x)$.

任意给定 $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, 如果对任意 $x \in V'$, 有 $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$, 则称 $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$. 以下按此偏序关系取定 Φ 的一个**极大元** φ (通过简单的紧性推理即得这一极大元的存在性). 令 $\vec{G''}$ 表示 (iii) 中的对应图.

可以断言 φ 满足: 对 G'' 中任一非孤立点 $x \in V_{n-1}$, 有

$$\frac{1}{|N_{G''}(x)|} \sum_{y \in N_{G''}(x)} \varphi(y) = \varphi(x).$$

用反证法, 假设对某个 $x \in V_{n-1}$, 上式左端严格大于右端. 则对一充分小的 $\varepsilon > 0$,

$$\varphi_\varepsilon(z) = \begin{cases} \varphi(z), & z \neq x, \\ \varphi(x) + \varepsilon, & z = x, \end{cases}$$

且 $\vec{G}''_\varepsilon = (V', \vec{E''} - \{\, \overrightarrow{xz} \mid \varphi(x) = \varphi(z) \,\})$ 满足条件 (i)~(iii), 与 φ 的极大性矛盾. 故断言成立.

换言之, 对任意 $\overrightarrow{xy} \in \vec{E''}$, 令 $\varphi(\overrightarrow{xy}) = \varphi(y) - \varphi(x) \geqslant 0$, 则对任意 $x \in V_{n-1}$, 有

$$\sum_{\overrightarrow{xy} \in \vec{E''}} \varphi(\overrightarrow{xy}) = \sum_{\overrightarrow{zx} \in \vec{E''}} \varphi(\overrightarrow{zx}). \tag{8.6}$$

用图论中的术语, 称 $\vec{G''}$ 是一个具有**源点** x_0 及若干个属于 $V_n - V_{n-1}$ 的**汇点**的**网络**, 对每条边 $\overrightarrow{xy} \in \vec{E''}$ 赋值 $\varphi(\overrightarrow{xy}) \geqslant 0$, 即得到一个**流**. 注意, 由 φ 的极大性, 对任意 $x \in V_n - V_{n-1}$ 有 $\varphi(x) = M$, 所以在 $V_n - V_{n-1}$ 中不存在任何源点.

因为在汇点消失的流值等于进入网络的流值, 从而有

$$\sum_{y\in V_n-V_{n-1}}\ \sum_{\vec{xy}\in\vec{E''}}\varphi(\vec{xy})=\varphi(\overrightarrow{x_0y_0})=\varphi(y_0)\,. \tag{8.7}$$

显然每条离开 V_{i-1} 的具有正流值的边均属于 E_i, 于是

$$\sum_{\substack{\vec{xy}\in\vec{E''}\\ xy\in E_i}}\varphi(\vec{xy})\geqslant\varphi(\overrightarrow{x_0y_0})=\varphi(y_0),\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{8.8}$$

从而, 由 (8.6) 和 (8.7) 可得

$$\begin{aligned}\sum_{xy\in E''}[\varphi(y)-\varphi(x)]^2&=\sum_{y\in V'}\varphi(y)\sum_{x\in N_{G''}(y)}[\varphi(y)-\varphi(x)]\\&=\sum_{y\in V_n-V_{n-1}}\varphi(y)\sum_{x\in N_{G''}(y)}[\varphi(y)-\varphi(x)]\\&=\sum_{y\in V_n-V_{n-1}}M\sum_{\vec{xy}\in\vec{E''}}\varphi(\vec{xy})\\&=M\varphi(y_0)\,.\end{aligned}$$

另一方面, 利用 (8.8) 式和 Jensen 不等式, 得到

$$\begin{aligned}\sum_{xy\in E''}[\varphi(y)-\varphi(x)]^2&\geqslant[\varphi(y_0)-\varphi(x_0)]^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\vec{xy}\in\vec{E''}\\ xy\in E_i}}\varphi^2(\vec{xy})\\&\geqslant\varphi^2(y_0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi^2(y_0)}{|E''\cap E_i|}\\&\geqslant\varphi^2(y_0)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|E_i|}\right).\end{aligned}$$

比较最后两个关系式并注意到 $\varphi(y_0)\geqslant f(y_0)=1$, 定理立即得证. □

定理 8.9 是 Nash-Williams (1959) 给出的关于无限渗流的一个结果的推广. 离散凸函数更进一步的性质参见文献 (Doyle, Snell, 1984).

另外, 还要用到下述关于环绕一个固定圆盘的圆盘半径的不等式.

定理 8.10 (Bárány et al., 1984) 设 C 是半径为 $r(C)$ 的圆盘, C 至少与 6 个互不交叠的圆盘 $C_1,\cdots,C_k(k\geqslant 6)$ 相切, 则

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r(C_i)}\geqslant\frac{1}{r(C)},$$

其中等式成立当且仅当 $k=6$, $r(C)=r(C_1)=\cdots=r(C_6)$.

下述简洁证明是 I. Vincze 给出的.

证明 不妨假设 C 恰被 $C_1, \cdots, C_k$ 所环绕, 即每个 C_i 与 C_{i-1}, C_{i+1} 及 C 相切 (其中下标取模 k). 令 O 与 O_i 分别表示 C 和 C_i 的中心, 并令 $\angle O_iOO_{i+1} = \varphi_i$.

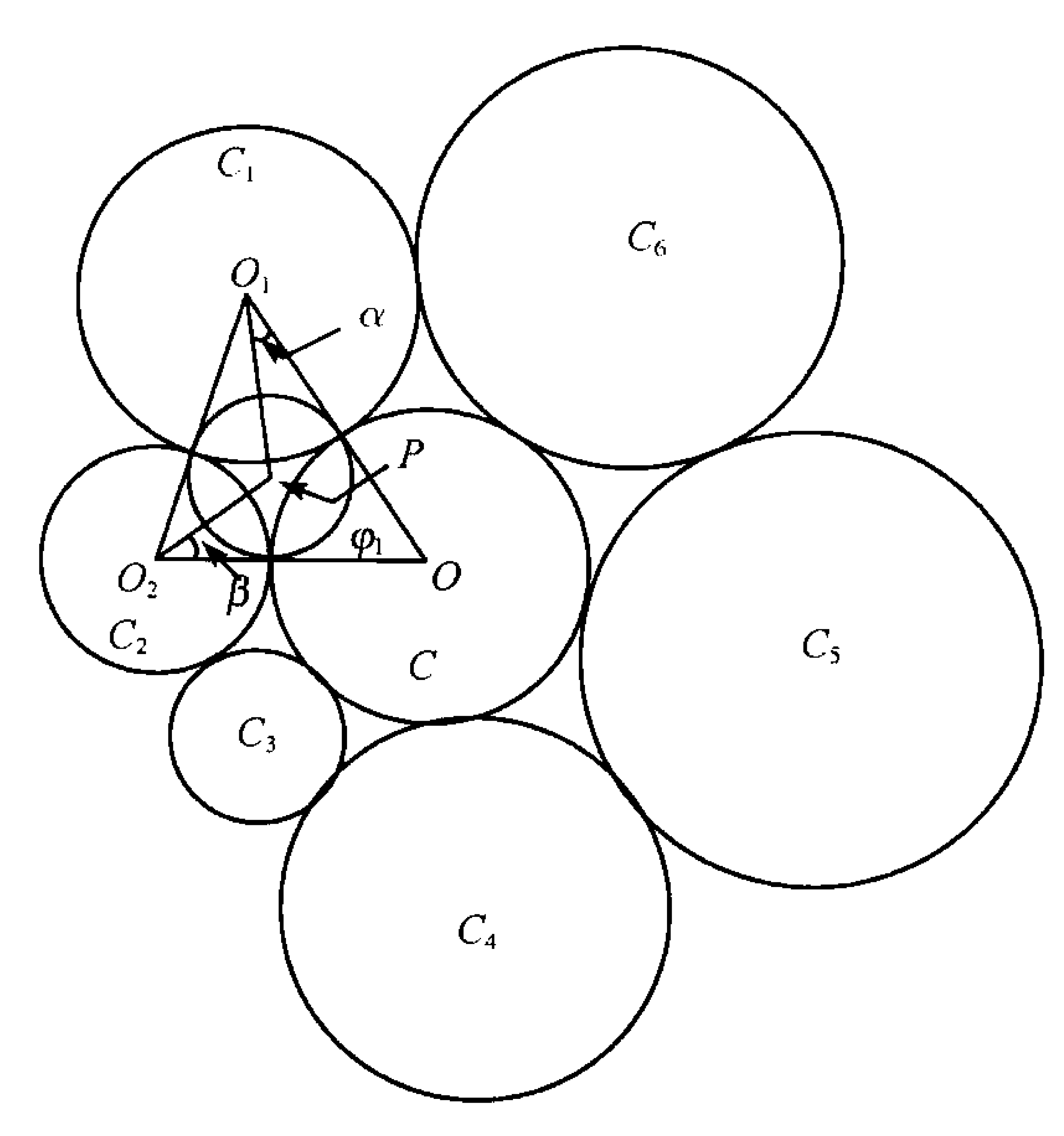


图 8.5 恰环绕圆盘 C 的圆盘 $C_1, \cdots, C_k$

进一步考察 C, C_1 和 C_2. 令 P 表示 $\triangle OO_1O_2$ 的内切圆 D 的中心, 并令 $\angle OO_1P = \alpha$, $\angle OO_2P = \beta$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{r(D)}{r(C_1)} + \frac{r(D)}{r(C_2)} &= \tan\alpha + \tan\beta \\ &\geqslant 2\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ &= 2\tan\frac{\pi - \varphi_1}{4} \\ &= \tan\frac{\varphi_1}{2}\frac{\left(1-\tan\frac{\varphi_1}{4}\right)^2}{\tan\frac{\varphi_1}{4}} \\ &= \frac{r(D)}{r(C)}\left(\tan\frac{\varphi_1}{4} + \cot\frac{\varphi_1}{4} - 2\right).\end{aligned}$$

类似地, 对任意 $1 \leqslant i \leqslant k$, 有

$$\frac{1}{r(C_i)} + \frac{1}{r(C_{i+1})} \geqslant \frac{1}{r(C)}\left(\tan\frac{\varphi_i}{4} + \cot\frac{\varphi_i}{4} - 2\right).$$

设 $k \geqslant 6$, 对这些不等式求和并利用 Jensen 不等式, 有

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r(C_i)} &\geqslant \frac{1}{r(C)}\sum_{i=1}^{k}\left(\tan\frac{\varphi_i}{4}+\cot\frac{\varphi_i}{4}-2\right)\\ &\geqslant \frac{k}{r(C)}\left(\tan\frac{\pi}{2k}+\cot\frac{\pi}{2k}-2\right)\\ &\geqslant \frac{2k}{r(C)}.\end{aligned}$$

□

定理 8.7 的证明 设 $\mathcal{C}$ 为 6 相邻圆盘填装. 构造平面图 G 如下: 对每个 $C_i \in \mathcal{C}$ 指定一个顶点 v_i, 令 v_i 与 v_j 相邻当且仅当 C_i 与 C_j 相切.

如果 G 不是局部有限的, 或 $\mathcal{C}$ 为单位圆盘所成正则格填装, 则无须证明. 因此, 不妨假设存在两个元素, 如 $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, 两者相切且 $r(C_1) > r(C_2)$. 由定理 8.10 知

$$f(v_i)=\frac{\dfrac{1}{r(C_i)}-\dfrac{1}{r(C_1)}}{\dfrac{1}{r(C_2)}-\dfrac{1}{r(C_1)}},\quad C_i\in\mathcal{C}$$

为 G 上的凸函数. 并且 $f(v_1)=0$, $f(v_2)=1$. 所以 f 满足定理 8.9 的条件, 其中 $x_0=v_1$, $y_0=v_2$.

现设结论不成立, 即

$$\inf_{C_i\in\mathcal{C}} r(C_i)=\varepsilon>0,$$

则定理 8.9 中定义的集合 V_i 的所有元素所对应的圆盘都包含于以 C_2 的圆心为中心, 以 $2r(C_2)i$ 为半径的圆盘. 从而对所有 $i \geqslant 1$, 有

$$|V_i| \leqslant \left[\frac{2r(C_2)}{\varepsilon}\right]^2 i^2.$$

另一方面, 因为 G 为平面图, 由 $V_i \subseteq V(G)$ 导出的 G 的子图至多含有 $3|V_i|-6$ 条边. 所以对所有 $i \geqslant 1$, 有

$$\sum_{j=1}^{i}|E_j| < 3|V_i| \leqslant 3\left[\frac{2r(C_2)}{\varepsilon}\right]^2 i^2,$$

其中 E_j 的意义见定理 8.9. 由此可得, 对所有 $n \geqslant 1$, 有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|E_j|} \geqslant \frac{\varepsilon^2}{24r^2(C_2)}\ln n$$

(见习题 8.14).

因而, 由定理 8.9, 有

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in V_n} f(x)=\infty,$$

与假设

$$f(v_i)=\frac{\dfrac{1}{r(C_i)}-\dfrac{1}{r(C_1)}}{\dfrac{1}{r(C_2)}-\dfrac{1}{r(C_1)}}<\frac{\dfrac{1}{\varepsilon}-\dfrac{1}{r(C_1)}}{\dfrac{1}{r(C_2)}-\dfrac{1}{r(C_1)}}$$

对任意 $C_i\in\mathcal{C}$ 成立矛盾. □

习　题

8.1　设 v_i, v_j, v_k 为平面中三个两两相切圆盘的中心, 圆盘的半径分别为 r_i, r_j, r_k. 证明: 如果增大 r_i 而减小 r_j 和 r_k, 同时保持圆盘的相切关系, 则角 $v_jv_iv_k$ 变小.

8.2　设 f 为 d 维球 B^d $(d\geqslant 1)$ 的内部到其自身的连续 1-1 映射. 证明: 如果当 p 趋于 B^d 的边界点时, $f(p)$ 的所有聚点均在 $\mathrm{Bd}\,B^d$上, 则 $f(B^d)=B^d$.

8.3　设 G 为三角剖分平面图, 顶点集为 $V(G)=\{v_1,\cdots,v_n\}$, $n>3$. 对任意 $U\subseteq V(G)$, 令 $F(U)$ 表示 G 的至少有一个顶点属于 U 的面 (含外部面) 所成集合. 证明对任意满足 $1\leqslant|U|\leqslant n-3$ 的 U, 有 $|F(U)|>2|U|$.

8.4 (Alon, Seymour, Thomas, 1994)　设 G 为具有 n 个顶点的平面图, 所有面均为三角形. 对 G 的任一圈 C, 令 $A(C)$ 和 $B(C)$ 分别表示严格画在 C 的内部和严格画在 C 的外部的顶点集. 设 C 为一个圈, 顶点数 $|C|\leqslant 2\lfloor\sqrt{2n}\rfloor$, $|B(C)|<\dfrac{2}{3}n$, 且在这些条件下 $|A(C)|-|B(C)|$ 达到最小. 证明 $|A(C)|<\dfrac{2}{3}n$, 且 $A(C)$ 中任何顶点均不与 $B(C)$ 的顶点相邻.

8.5　设平面图 G 的顶点为 $v_1,\cdots,v_n$, 又 d_i 表示顶点 v_i 的度. 每个 v_i 有非负权 $w(v_i)$, 且 $\sum_{i=1}^n w(v_i)=1$.

(i) 证明 G 的顶点集可划分为三部分 A, B 和 C, 使得

$$\sum_{v_i\in A} w(v_i),\quad \sum_{v_i\in B} w(v_i)\leqslant\frac{3}{4},\quad |C|<2\sqrt{n},$$

并且 A 中顶点不与 B 中顶点相邻;

(ii) 证明对任意 $\varepsilon>0$, 存在常数 c_ε (不依赖于 G), 使得顶点集可以划分成两部分 A 和 B,

$$\sum_{v_i\in A} w(v_i),\quad \sum_{v_i\in B} w(v_i)\leqslant\frac{3}{4}+\varepsilon,$$

且 A 与 B 之间至多有 $c_\varepsilon\left(\sum_{i=1}^n d_i^2\right)^{1/2}$ 条边;

(iii)* (Gazit, Miller, 1990) 证明 G 的顶点集可以划分为两部分 A 和 B, 使得

$$\sum_{v_i\in A} w(v_i),\quad \sum_{v_i\in B} w(v_i)\leqslant \frac{2}{3},$$

且 G 中 A 与 B 之间至多有 $1.58\left(\sum_{i=1}^n d_i^2\right)^{1/2}$ 条边.

8.6 (de Fraysseix et al., 1994) 证明任何平面图的顶点可表示为平面中互不交叠的三角形, 使得两个三角形相接触当且仅当它们所对应的顶点相邻.

8.7* (Rodin, Sullivan, 1987) 给定平面中一个圆盘填装 $\mathcal{C}=\{C_1,C_2,\cdots\}$, 令 $C(\mathcal{C})$ 表示由两两相切圆盘的圆心连线所确定的 $\mathbb{R}^2$ 的胞腔分解. 又令 $\mathcal{C}_0$ 表示单位圆盘形成的正则六角填装. 证明 $C(\mathcal{C})$ 拓扑同构于 $C(\mathcal{C}_0)$ 当且仅当 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C}_0$ 相似.

8.8 证明任何平面 6 相邻圆盘填装都包含无限多个圆盘.

8.9 (Grünbaum, 1961; Hadwiger, 1969) 给定凸体 $C\subseteq\mathbb{R}^d$, 令 $H(C)$ 表示与 C 相接触的 C 的互不交叠的平移的最大个数, $H(C)$ 称为 C 的 **Hadwiger 数**. 证明 $H(C)\leqslant 3^d-1$, C 为平行体时等号成立.

8.10 (Danzer, Grünbaum, 1962) 设 $C\subseteq\mathbb{R}^d$ 为凸体. 证明 C 的互不交叠且两两接触的平移的最大个数为 2^d, C 为平行体时达到最大个数.

8.11 (Malitz, Papakostas, 1992) 证明对任意 d, 存在具有下述性质的 $\varepsilon(d)>0$: 各顶点的度至多为 d 的平面图必存在一种平面画法, 其中边为不相交线段, 任两条有公共顶点的边的夹角至少为 $\varepsilon(d)$.

8.12 (Formann et al., 1993) 证明存在具有下述性质的常数 $c>0$: 各顶点的度至多为 d 的图必存在一种平面画法, 其中边为线段 (可以相交), 任两条有公共顶点的边的夹角至少为 c/d^2.

8.13 (L.Fejes Tóth, 1978–1982) 设 $C_1,\cdots,C_k$ $(k\geqslant 3)$ 为平面中互不交叠的恰环绕圆盘 C 的圆盘, 即每个 C_i 与 C_{i-1}, C_{i+1} 及 C 相切. 证明:

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k r^n(C_i)\geqslant\left[\frac{\sin\dfrac{\pi}{k}}{1-\sin\dfrac{\pi}{k}}r(C)\right]^n$$

对任意 $n\geqslant 1$ 成立, 等号成立当且仅当 $r(C_1)=r(C_2)=\cdots=r(C_k)$.

8.14 设 $e_1,\cdots,e_n$ 和 γ 均为正数, 满足

$$\sum_{j=1}^i e_j\leqslant \gamma i^2,\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

则

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{e_j} > \frac{\ln n}{2\gamma}.$$

注：这是 Karamata 不等式 (1932) 的一个简单的特殊情况.

8.15　设图 G 的顶点集由平面中的整数格点构成, 即

$$V(G) = \{(m_1, m_2) \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\},$$

且两个顶点 (m_1, m_2) 和 (m_1', m_2') 间连一条边, 当且仅当它们的 Hamming 距离为 1, 即

$$|m_1 - m_1'| + |m_2 - m_2'| = 1.$$

证明如果 f 是图 G 上的有上界的凸函数, 则 f 为常数.

8.16 (Österreicher, Linhart, 1981)　证明：

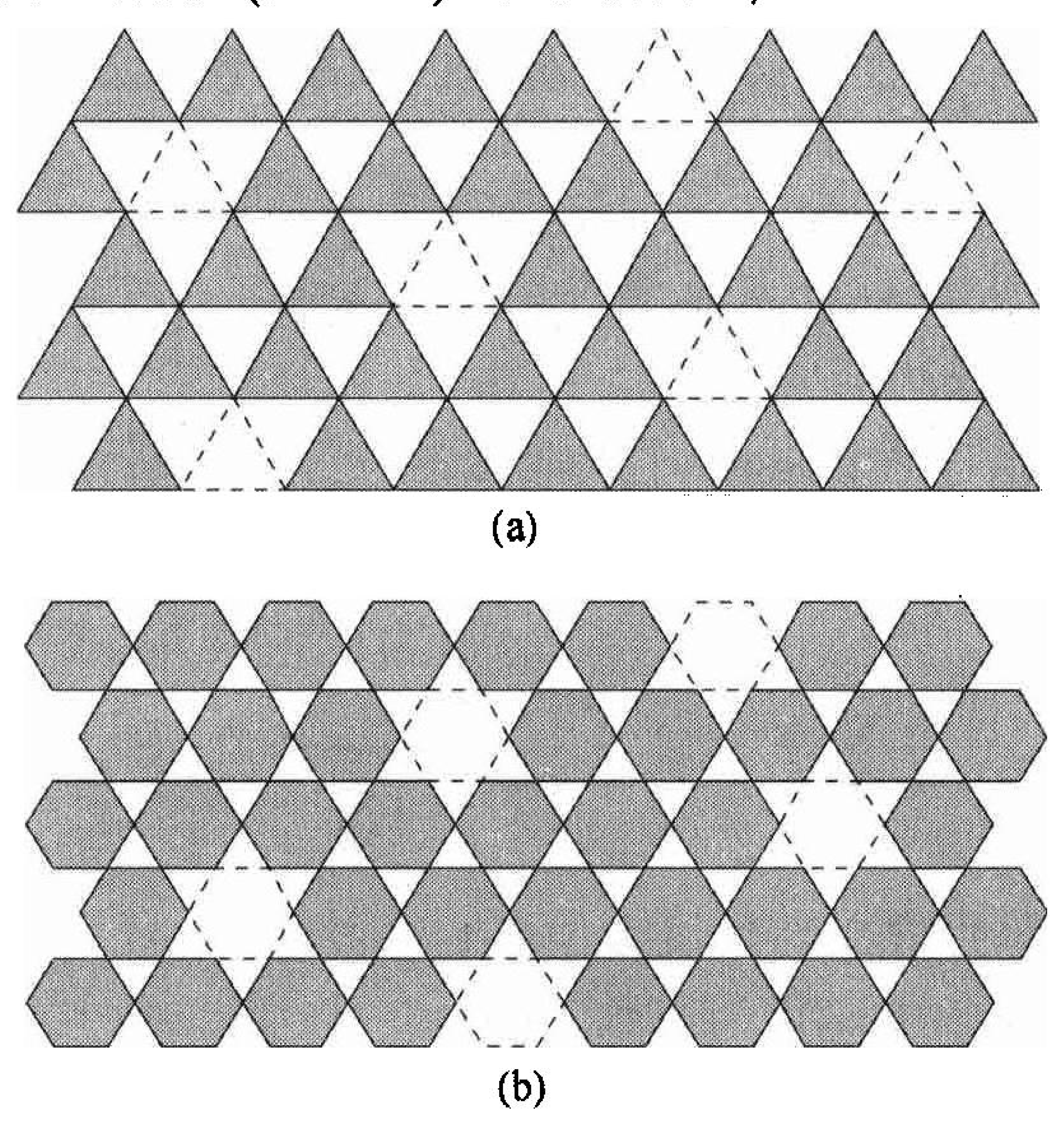
(i) 平面中不存在有限多个相等圆盘构成的 4 相邻填装;

(ii) 平面中存在有限多个 (未必相等) 圆盘构成的 5 相邻填装(见定义 8.6).

8.17 (Makai, 1987)　证明：

(i) $\mathbb{R}^2$ 中存在由一个平行四边形的平移构成的 5 相邻填装 $\mathcal{C}$, 其密度为 $d(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) = 0$;

(ii)* 对任意由非平行四边形的凸体 C 的平移构成的 5 相邻填装 $\mathcal{C}$, 有 $d(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \geqslant 3/7$, 仅当 C 为三角形 (图 8.6a) 时等号成立;



(a)

(b)

图 8.6　5 相邻填装

(a) 全等凸体构成, (b) 中心对称全等凸体构成

(iii)* 对 $\mathbb{R}^2$ 中任意由非平行四边形中心对称凸体 C 的平移构成的 5 相邻填装 $\mathcal{C}$, 有 $d(\mathcal{C},\mathbb{R}^2)\geqslant\frac{9}{14}$, 其中等号仅当 C 为仿射正六边形时成立 (图 8.6b).

8.18　定理 8.1 的下述推广是否正确? 如果 $\mathcal{C}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中至少含有两个半径互异的球的 12 相邻球填装, 则

$$\inf r(B)=0,$$

其中 $r(B)$ 表示 B 的半径, inf 表示对 $\mathcal{C}$ 中所有元素取下确界.

第二部分　点与直线的配置

第9章　极图理论

20 世纪 30 年代早期, 一群热情洋溢的年轻学生开始了极图理论的研究，当时他们正在布达佩斯理工学院 (Budapest Polytechnic) 师从 D. König 学习图论. Erdős, T. Gallai, E. Klein, G. Szekeres 和 P. Turán 确立了这一领域中的许多基本定理, 事实证明, 这些定理有着极其重要的几何应用. 他们的若干早期成果已在 König (1936) 的经典著作中论及.

设 G 为具有顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$的 **简单图**, 即 G 无环和重边. 极图理论的基本问题之一是确定具有给定性质 $\mathcal{P}$ 的 n 顶点图 G 的最大边数. 在大多数应用中, 性质 $\mathcal{P}$ 为 "G 不含同构于某一固定图 H 的子图". H 通常称为 **禁用子图**. 本章介绍这方面的一些基本结果. 许多其他问题与结果参见 B. Bollobás 的优秀专著 (B. Bollobás, 1978, 1979).

9.1　禁用路与圈

称图 H 为图 G 的 **子图**, 如果 H 可由 G 删除 G 的若干顶点和边得到; 称图 H 为图 G 的 **导出子图** , 如果 H 可由 G 删除 G 的若干顶点以及与之关联的边 (仅这种边) 得到. 换言之, G 的导出子图可视为 G 在 $V(G)$ 的一个子集上的限制. 顶点 $x \in V(G)$ 的 **度** 定义为图 G 中与 x 相邻的顶点的个数, 记为 $d(x) = d_G(x)$. 令 P_r (C_r) 表示长为 r 的路 (圈), 令 K_r 表示具有 r 个顶点的 **完全图** , 即

$$
\begin{aligned}
V(P_r) &= \{x_0, x_1, \cdots, x_r\}, \quad E(P_r) = \{x_0x_1, x_1x_2, \cdots, x_{r-1}x_r\},\\
V(C_r) &= \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}, \quad E(C_r) = \{x_1x_2, \cdots, x_{r-1}x_r, x_rx_1\},\\
V(K_r) &= \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}, \quad E(K_r) = \{x_ix_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant r\}.
\end{aligned}
$$

图 G 称为是 **连通** 的, 如果对任意 $x \neq x' \in V(G)$, 都存在一条连接 x 与 x' 的路 $P_r \subseteq G$ (即 $x_0 = x, x_r = x'$). 子图 $C_r \subseteq G$ 称为 **Hamilton 圈** , 如果 C_r 是长为 $r = |V(G)|$ 的圈, 即它过 G 的所有顶点. 显然, 任一有 Hamilton 圈的图 G 是连通的.

为确定不含 P_r 为子图的 n 顶点图的最大边数, 用到 D. Dirac (1952) 给出的一个技术性结果. 下述简要明确的证明是 L.Pósa (1962) 在他年仅 13 岁时给出的.

定理 9.1 (Dirac)　*设 G 为顶点数 $n \geqslant 3$ 的连通图, 对 G 中任意两个不相邻的顶点 $x, y \in V(G)$, 均有*

$$d(x)+d(y)\geqslant r,$$

(i) 若 $r=n$, 则 G 有Hamilton 圈;

(ii) 若 $r<n$, 则 $G\supseteq P_r$ 且存在 i 使得 $G\supseteq C_i$, 其中 $i\geqslant\lceil(r+2)/2\rceil$.

证明　设 $P=x_1x_2\cdots x_m$ 为图 G 的最长路, 从而 x_1 与 x_m 的所有邻点都是该路的顶点.

首先假设 G 含有一个长为 m 的圈 C_m, 则 $m=n$. 否则, 由 G 的连通性知, 存在 C_m 的一个顶点与点 $y\notin V(C_m)$ 相邻, 从而 y 为一条长为 $m+1$ 的路的终点, 与 m 的最大性矛盾. 所以, 在此情形下 G 有 Hamilton 圈, 结论成立.

下设 G 不含长为 m 的圈. 令

$$N(x_1)=\{x_i\in V(P)\,|\,x_1x_i\in E(G)\},$$

$$N^+(x_m)=\{x_i\in V(P)\,|\,x_{i-1}x_m\in E(G)\}.$$

显然, x_1 与 x_m 不相邻, 且 $N(x_1)\cap N^+(x_m)=\varnothing$; 否则 G 含长为 m 的圈 (图 9.1). 所以, 由 x_1 和 x_m 的度所满足的条件, 得

$$r\leqslant d(x_1)+d(x_m)=|N(x_1)|+|N^+(x_m)|<m.$$

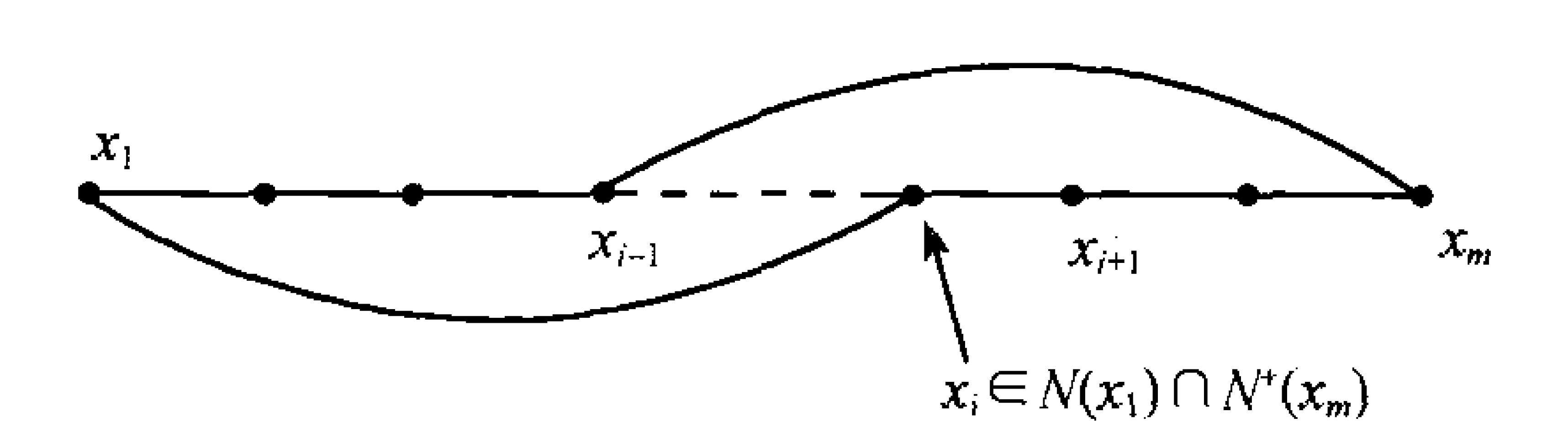


图 9.1　定理 9.1 证明图示

故 $r<n$, 并由 P 的长度为 $m-1\geqslant r$ 得 $G\supseteq P_r$. 欲证明 (ii) 的第二部分, 注意到 $d(x_1)$ 与 $d(x_m)$ 之一, 如 $d(x_1)$, 至少为 $\lceil r/2\rceil$. 从而存在 $i\geqslant\lceil r/2\rceil+1$, 使 $x_i\in N(x_1)$, 故 $x_1,x_2,\cdots,x_i$ 形成一个长至少为 $\lceil r+2/2\rceil$ 的圈, 即得结论. □

推论 9.2　设图 G 具有 n 个顶点且不含长为 r 的路, 则

$$|E(G)|\leqslant\frac{r-1}{2}n,$$

等号成立当且仅当 G 的各连通分支为 r 个顶点的完全图.

证明　对 n 用归纳法证明. 显然结论对 $n\leqslant r$ 成立. 下设 $n>r$, 并假设结论对顶点个数小于 n 的任何图 G 成立. 如果 G 不连通, 则对每个连通分支用归纳假设, 结论成立.

如果 G 连通, 则由定理 9.1(ii) 知, 至少存在一个顶点 x 满足 $d(x) < r/2$, 否则 $G \supseteq P_r$. 令 $G-x$ 表示图 G 中删去顶点 x (连同与顶点 x 关联的所有边) 所得的图. 显然, $G-x$ 不是 r 个顶点的不交完全子图的并, 故由归纳假设, $|E(G-x)| < (r-1)(n-1)/2$, 即严格不等号成立. 从而有

$$\begin{aligned}|E(G)| &= |E(G-x)| + d(x)\\ &< \frac{r-1}{2}(n-1) + \frac{r-1}{2}\\ &= \frac{r-1}{2}n.\end{aligned}$$ □

根据 Erdős , Gallai (1959) 给出的类似结果, 任一具有 n 个顶点且不含长至少为 r 的圈的图至多有 $\frac{(r-1)(n-1)}{2}$ 条边. 等号成立当且仅当 G 由以 "仙人掌" 形结构连接的 $\frac{n-1}{r-2}$ 片 "叶子" 构成, 每片 "叶子" 为 $r-1$ 个顶点的完全子图 (图 9.2).

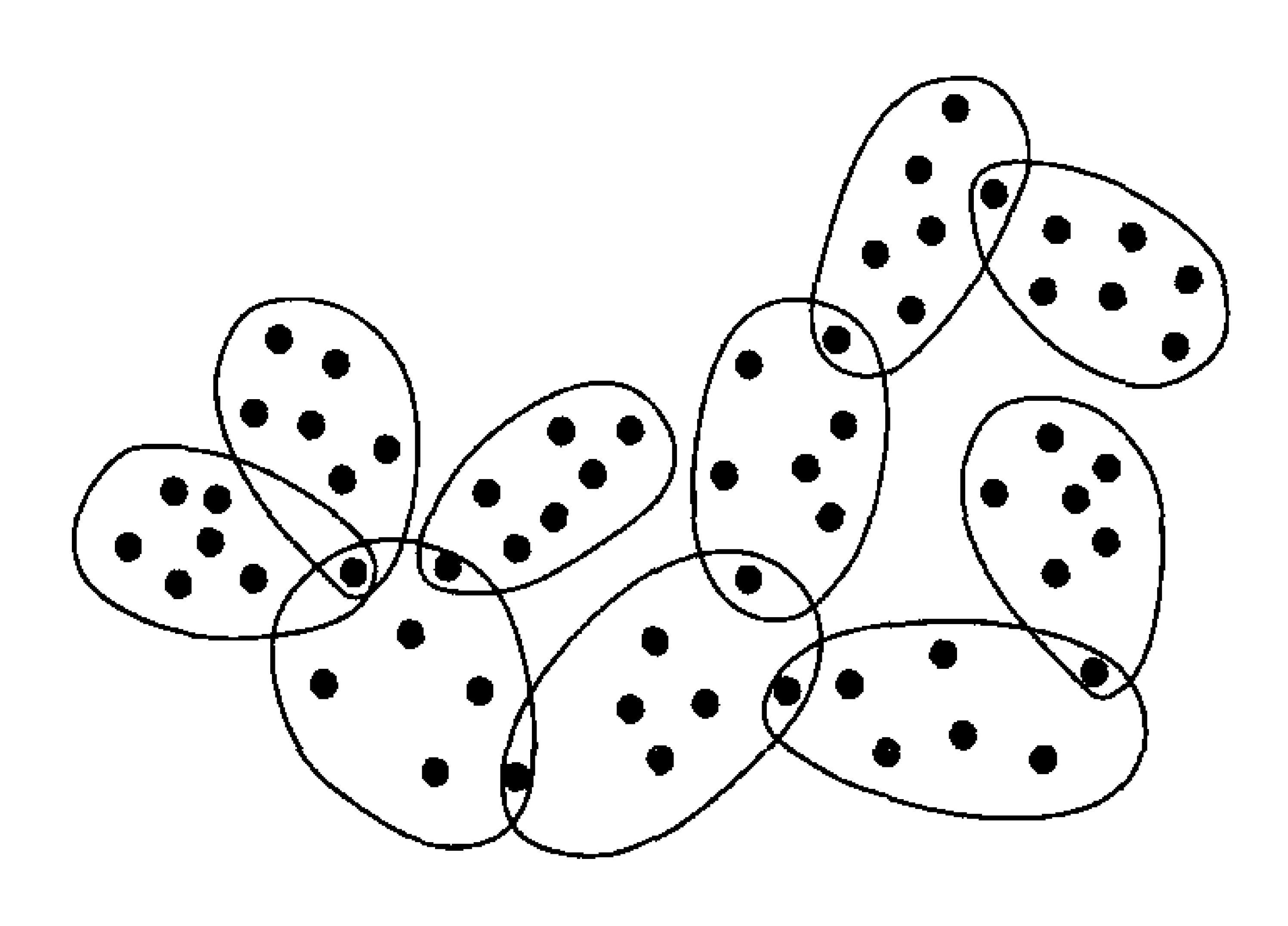


图 9.2 不含 C_r 的图 $(r=8)$ 达到上界的构造

9.2 禁用完全子图

本节介绍 Turán (1941, 1954) 经典定理的一个简洁证明, 该证明是由 Erdős(1970) 给出的.

n 顶点图 G 称为 s **部图** $(1 \leqslant s \leqslant n)$, 如果其顶点集可以划分为 s 个部集 $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_s$, 使得位于同一部集的两个顶点无边相连. 如果此外还满足

(i) 对任意 i, $|V_i| = \lfloor n/s \rfloor$ 或 $\lceil n/s \rceil$;

(ii) 任意两个属于不同部集 V_i 和 V_j 的顶点均有 G 的一条边相连 (对所有 $1 \leqslant i < j \leqslant s$),

则 G 称为**平衡完全** s **部图**, 记为 $T_s(n)$.

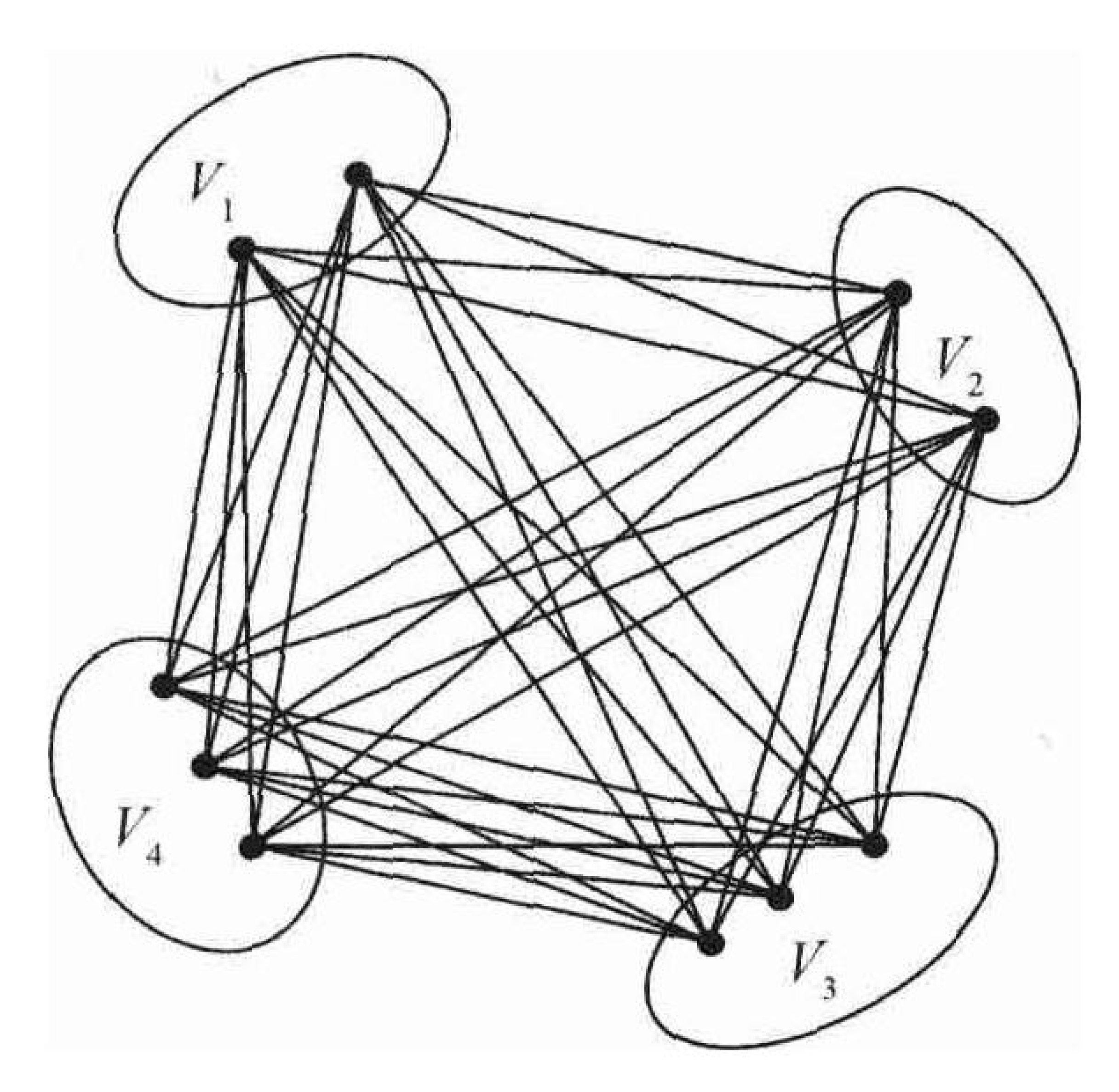


图 9.3　$T_4(10)$—— 具有 10 个顶点的平衡完全 4 部图

显然, $K_r \not\subseteq T_{r-1}(n)$, 即 $T_{r-1}(n)$ 不含 K_r.

定理 9.3 (Turán)　设 G 为具有 n 个顶点不含 K_r 的图, 则

$$|E(G)| \leqslant |E(T_{r-1}(n))|,$$

等号成立当且仅当 G 同构于 $T_{r-1}(n)$.

由下述结果立即可推出 Turán 定理. 为此只须证明, 所有顶点数为 n 的 $(r-1)$ 部图中, $T_{r-1}(n)$ 具有最大边数 (见习题 9.5).

定理 9.4 (Erdős)　任意给定具有 n 个顶点且不含 K_r 的图 G, 可以构造一个具有相同顶点集的 $(r-1)$ 部图 H, 使得对所有 $x \in V(G) = V(H)$,

$$d_H(x) \geqslant d_G(x).$$

此外, 如果 G 不是完全 $(r-1)$ 部图, 则至少对一个顶点 x 有 $d_H(x) > d_G(x)$.

证明　对 r 用归纳法证明. $r=2$ 时, 结论显然成立. 下设 $r>2$, 假设对任一小于 r 的正整数结论成立.

在 G 中选取一个顶点 $v \in V(G)$, v 在 G 中的度最大. 令 $N_G(v)$ 表示 v 在 G 中的所有邻点的集合, 则由 $N_G(v)$ 导出的 G 的子图 $G[N_G(v)]$ 显然不含 K_{r-1}. 所以, 由归纳假设, 存在 $N_G(v)$ 上的一个 $(r-2)$ 部图 H', 使得 H' 中任一顶点的度都不小于其在 $G[N_G(v)]$ 中的度. 令 H 表示在 H' 的基础上将 $V(G)-N_G(v)$ 的每个顶点与 $N_G(v)$ 的每个顶点连一条边所得到的图, $V(G)-N_G(v)$ 中任意两个顶点在 H 中不相邻.

显然 H 是 $(r-1)$ 部的, 由 $d_G(v)$ 的最大性知, 对任意 $x \in V(G)-N_G(v)$, 有

$$d_H(x) = d_G(v) \geqslant d_G(x).$$

另一方面, 对每个 $x \in N_G(v)$, 有

$$\begin{aligned} d_H(x) &= d_{H'}(x) + (n - d_G(v)) \\ &\geqslant d_{G[N_G(v)]}(x) + \Big(n - d_G(v)\Big) \\ &\geqslant d_G(x). \end{aligned}$$

如果对所有 x, 有 $d_H(x) = d_G(x)$, 则 $G[N_G(v)]$ 必为完全 $(r-2)$ 部图, 且 $N_G(v)$ 的每个顶点必与 $V(G)-N_G(v)$ 中的所有顶点相邻. 所以 G 为完全 $(r-1)$ 部图. □

下述定理可看成 Turán 定理在二部图情形的类似结果, 由 Kővári Sós, Turán (1954) 以略微不同的方式给出了证明, Erdős 也独立地证明了该结果 (未发表). 这一问题在文献中通常称为 Zarankiewicz (1951) 问题. 令 $K_{r,s}$ 表示在第一和第二部集分别有 r 和 s 个顶点的完全二部图.

定理 9.5 (Kővári et al.) 设 $G_{m,n}$ 为**二部图**, 第一部集有 m 个顶点, 第二部集有 n 个顶点. 如果 $G_{m,n}$ 不以 $K_{r,s}$ 为子图, 使得 $K_{r,s}$ 的第一部集和第二部集分别包含在 $G_{m,n}$ 的第一部集和第二部集中, 则

$$|E(G_{m,n})| \leqslant c_{r,s}\left(mn^{1-\frac{1}{r}}+n\right),$$

其中 $c_{r,s}$ 是仅依赖于 r 和 s 的常数.

证明 令 V_1 和 V_2 表示 $G_{m,n}$ 的两个部集, $|V_1|=m$, $|V_2|=n$. 由于 V_1 中每个 r 元组 W 至多与 $s-1$ 个顶点 $x\in V_2$ 完全相连接, 这样的对 (W,x) 的个数必满足

$$\sum_{x\in V_2}\binom{d(x)}{r} = \text{完全连接对}(W,x)\text{的个数} \leqslant (s-1)\binom{m}{r}. \tag{9.1}$$

注意

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z(z-1)\cdots(z-r+1)}{r!}, & z\leqslant r-1,\\ 0, & z\geqslant r-1\end{cases}$$

为一凸函数. 所以, 应用 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned}\sum_{x\in V_2}\binom{d(x)}{r} &= \sum_{x\in V_2} f(d(x))\\ &\geqslant nf\left(\sum_{x\in V_2}\frac{d(x)}{n}\right)\\ &= nf\left(\frac{|E(G_{m,n})|}{n}\right).\end{aligned} \tag{9.2}$$

如果 $|E(G_{m,n})|/n\leqslant r-1$, 则定理成立. 否则, 结合 (9.1) 和 (9.2) 得

$$\begin{aligned}&(s-1)\binom{m}{r}\geqslant n\binom{\frac{|E(G_{m,n})|}{n}}{r}\\ &\Rightarrow (s-1)m^r\geqslant n\left(\frac{|E(G_{m,n})|}{n}-r+1\right)^r\\ &\Rightarrow (s-1)^{1/r}mn^{1-1/r}+(r-1)n\geqslant |E(G_{m,n})|.\end{aligned}$$ □

下述简单但极为有用的引理的证明留作习题 (见习题 9.16).

引理 9.6　任何图 G 的顶点集可以划分为两个不交部分 V_1 和 V_2, 使得 $\big||V_1|-|V_2|\big| \leqslant 1$, 并且满足 $x \in V_1, y \in V_2$ 的边 $xy \in E(G)$ 的条数至少为 $|E(G)|/2$.

推论 9.7　给定 $r \leqslant s$. 则任意具有 n 个顶点且不含 $K_{r,s}$ 的图 G 至多有 $c_s n^{2-1/r}$ 条边, 其中 c_s 是仅依赖于 s 的常数.

证明　由引理 9.6 知, 存在二部子图 $G_{\lfloor n/2\rfloor,\lceil n/2\rceil} \subseteq G$, 满足

$$|E(G)| \leqslant 2\left|E\big(G_{\lfloor n/2\rfloor,\lceil n/2\rceil}\big)\right|.$$

对 $G_{\lfloor n/2\rfloor,\lceil n/2\rceil}$ 应用定理 9.5, 即得结论. □

Reiman (1958) 给出的一个著名的构造表明, 上述推论中的上界对 $r=2$ 是渐近紧的 [参见文献 (Erdős, Rényi, 1962; Mörs, 1981; Füredi, 1996) 和图 9.4]. Brown (1966) 用一个独具创见的代数构造证明了 $r = 3$ 时上述界不能再改进. 对任意 $r > 3$ 判定是否有相同结果是这一领域中尚未解决的最富挑战性的问题之一. 有关细节可参见文献 (Kollár et al., 1996).

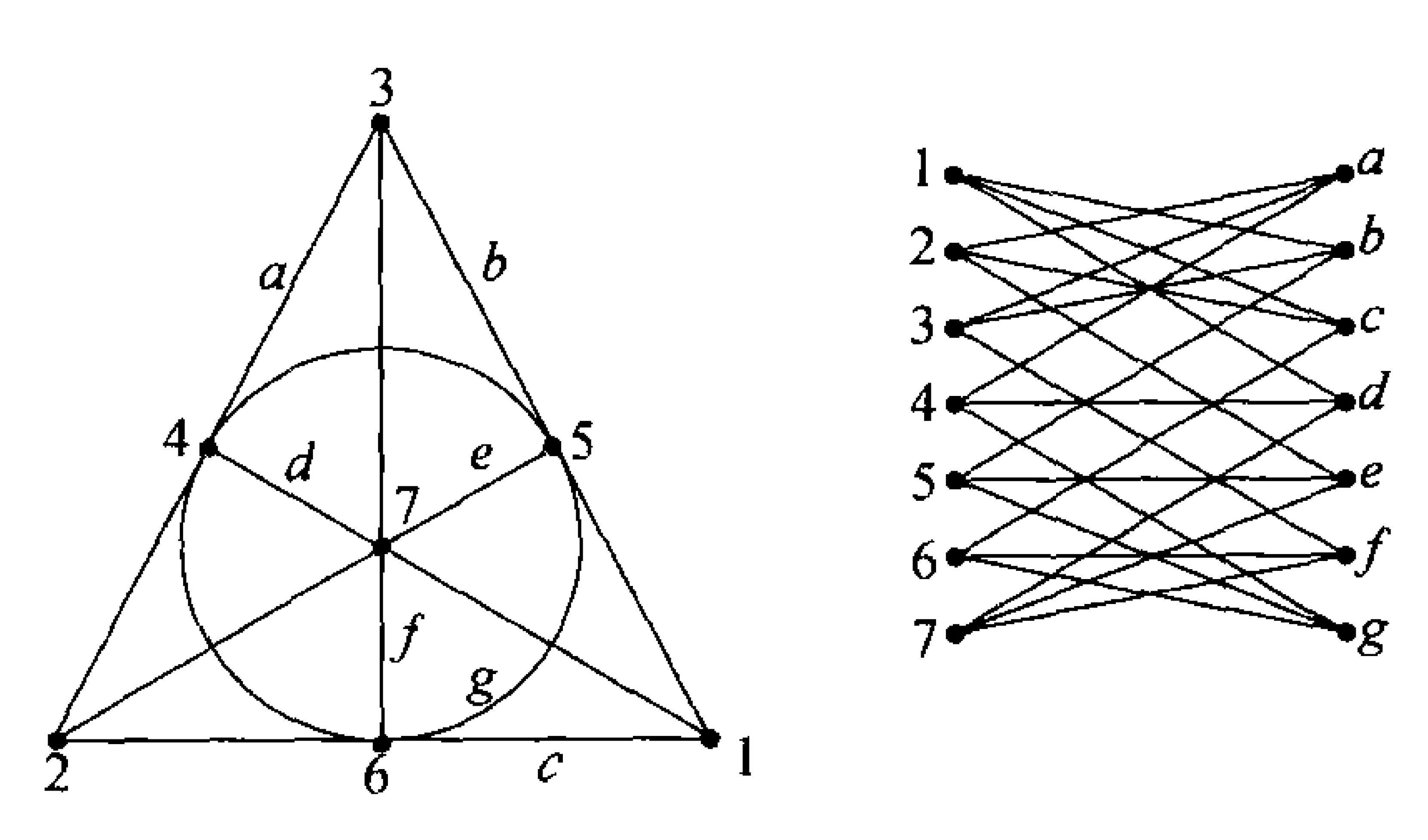


图 9.4　Fano 平面 $PG(2,2)$ 及其关联图

定理 9.8　给定 $r \geqslant 2$. 对任何 n, 均存在具有 n 个顶点且不含 $K_{r,r}$ 的图 G, 使得

(i) 如果 $r=2$, 则 $|E(G)| \geqslant c_2 n^{3/2}$;

(ii) 如果 $r>2$, 则 $|E(G)| \geqslant c_r n^{2-2/r}$,

其中 c_r 是仅依赖于 r 的正值常数.

证明　(i)为简单起见, 设存在某一素数 p 使 $n=p^2+p+1$, 则可按如下方法构造一个**阶**为 p 的**射影平面** $PG(2,p)$.

$PG(2,p)$ 中的**点**用有序三元组 (a,b,c) 表示, 其中, $a,b,c \in \mathbb{Z}_p$ (未必互异), 且不全为 0. 两个三元组 (a,b,c) 和 (a',b',c') 表示同一个点, 当且仅当 $(a',b',c') = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ 对某一 $\lambda \neq 0$ 成立.

$PG(2,p)$ 的一条**线**包含所有满足

$$ax+by+cz \equiv 0 \pmod p$$

的三元组 (x,y,z), 其中, (a,b,c) 为某一固定三元组. 显然, $PG(2,p)$ 中的点数和线数都等于

$$\frac{p^3-1}{p-1}=p^2+p+1=n.$$

$PG(2,p)$ 中的每条线恰含有 $p+1$ 个点, 过任一点也恰好有 $p+1$ 条线.

设图 G 的顶点为 $PG(2,p)$ 的点, 两个互异点 (a,b,c) 和 (a^*,b^*,c^*) 间连一条边, 当且仅当

$$aa^*+bb^*+cc^*\equiv 0 \pmod p.$$

(a,b,c) 在 G 中的所有邻点显然形成 $PG(2,p)$ 的一条线, 该线可能含有 (a,b,c) 自身. 据此, G 的每个顶点的度为 p 或 $p+1$. G 显然不含 $K_{2,2}$, 并且对某一常数 $c_2>0$, 有

$$|E(G)|\geqslant\frac{(p^2+p+1)p}{2}>c_2n^{3/2}.$$

(ii) 用 "随机方法" 证明, 即证明对适当选取的 c_r, 当 $n\to\infty$ 时, 具有 n 个顶点与 $c_rn^{2-2/r}$ 条边的图中至少有一半的图不含 $K_{r,r}$ 为子图.

具有 n 个顶点与 e 条边的图共有 $\binom{\binom{n}{2}}{e}$ 个, 其中含 $K_{r,r}$ 为子图的图 G 的个数至多为

$$\frac{1}{2}\cdot\binom{n}{2r}\cdot\binom{2r}{r}\cdot\binom{\binom{n}{2}-r^2}{e-r^2},$$

因为 $K_{r,r}$ 的两个部集有

$$\frac{1}{2}\cdot\binom{n}{2r}\binom{2r}{r}$$

种不同的选取方式, 在每种情形下又可以从剩下的

$$\binom{n}{2}-r^2$$

条边中任取 G 的其他 $e-r^2$ 条边. 只要 $c_r>0$ 是一个充分小的常数, 对 $e=c_rn^{2-2/r}$, 这两个数之比为

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}\cdot\binom{n}{2r}\cdot\binom{2r}{r}\cdot\binom{\binom{n}{2}-r^2}{e-r^2}}{\binom{\binom{n}{2}}{e}}&<c_r'n^{2r}\frac{\left[\binom{n}{2}-r^2\right]!}{\binom{n}{2}!}\cdot\frac{e!}{(e-r^2)!}\\&<c_r'n^{2r}\left(e\Big/\binom{n}{2}\right)^{r^2}\\&<\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

我们不加证明介绍 Erdős 与 Bondy-Simonovits (1974) 给出的另一重要结果, 它是 推论 9.7 在特殊情形 $r=2$ 下的推广.

定理 9.9 (Bondy-Simonovits)　设 $r \geqslant 4$ 为一给定偶数, 则任意具有 n 个顶点且不含 C_r 的图 G 至多有 $c_r n^{1+2/r}$ 条边, 其中 c_r 为一适当常数.

已知这一结果对 $r=4,6$ 及 10 是渐近紧的 (Brown, 1966; Benson, 1966; Singleton, 1966; Bondy, 1971; Wenger, 1991). 对其他 r 值, Margulis (1982), Imrich (1984) 和 Lubotzky et al. (1988) 找到了一些具有 n 个顶点与 $c'_r n^{1+4/(3r+1)}$ 条边且不含 C_r 的图的代数构造.

9.3 Erdős-Stone 定理

Erdős , Stone (1946) 的下述定理或许是 Turán 定理 (定理 9.3) 的最有用的推广. Turán 定理表明, 如果 n 顶点图 G 有多于 $|E(T_{r-1}(n))| \approx \dfrac{n^2}{2}\left(1-\dfrac{1}{r-1}\right)$ 条边, 则 G 含 K_r 为子图. 此外 Erdős-Stone 定理还证明了, 如果 G 的边数至少为 $|E(T_{r-1}(n)|+\varepsilon n^2$, n 充分大, 则可以保证一个完全 r 部子图的存在性, 该子图具有非常大的部集. 更精确地说, 有下面的定理. 令 $\underbrace{K_{t,t,\cdots,t}}_{r\text{ 个}}$ 表示各部集中恰有 t 个顶点的完全 r 部图 [沿用前面的记法, $K_{t,t,\cdots,t}=T_r(rt)$].

定理 9.10 (Erdős-Stone)　设 $r \geqslant 2$ 及 t 均为固定自然数, $\varepsilon > 0$. 则存在整数 $n_0 = n_0(r,t,\varepsilon)$, 使得任意顶点数 $n \geqslant n_0$ 且至少有 $\dfrac{n^2}{2}\left(1-\dfrac{1}{r-1}+\varepsilon\right)$ 条边的图 G 含有完全 r 部子图 $K_{t,t,\cdots,t}$, 其各部集的大小为 t.

对 $r=2$ 此定理表明, 当 n 充分大时, 任意具有 n 个顶点且至少有 εn^2 条边的图都含 $K_{t,t}$. 不过, 这也是由推论 9.7 直接可得的结果.

分两步证明定理 9.10. 首先证明每个顶点的度都很大时结论成立.

引理 9.11　存在如下的 $n_1 = n_1(r,t,\varepsilon)$, 若图 G 的顶点数 $n \geqslant n_1$, 且对任何 $x \in V(G)$, 有

$$d(x) \geqslant n\left(1-\frac{1}{r-1}+\varepsilon\right),$$

则 $G \supseteq \underbrace{K_{t,t,\cdots,t}}_{r\text{ 个}}$.

证明　对 r 用归纳法证明上述结论. 如前所述, 结论对 $r=2$ 成立. 假设结论对某个 $r \geqslant 2$ 成立, 下证结论对 $r+1$ 成立.

令 $T = \left\lceil \frac{t}{\varepsilon} \right\rceil$. 如果 $n \geqslant n_1(r, T, \varepsilon)$, 则由归纳假设, $G \supseteq K_{\underbrace{T,T,\cdots,T}_{r\text{ 个}}}$. 令 $V_i(1 \leqslant i \leqslant r)$ 表示 $K_{T,T,\cdots,T}$ 的部集, $|V_i| = T$. 顶点 $x \in V(G) - \bigcup_{i=1}^r V_i$ 称为 **正则顶点** , 如果它在每个 $V_i(1 \leqslant i \leqslant r)$ 中至少有 t 个邻点. 图 G 中正则顶点的个数记为 R. 令 m 表示 $V(G) - \bigcup_{i=1}^r V_i$ 与 $\bigcup_{i=1}^r V_i$ 间 "缺少" 的边数, 即

$$m = \left|\left\{xy \notin E(G) \,|\, x \in V(G) - \bigcup_{i=1}^r V_i, y \in \bigcup_{i=1}^r V_i\right\}\right|.$$

按假设, 对任何 $y \in \bigcup_{i=1}^r V_i$,

$$d(y) \geqslant n\left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right),$$

由此可得不等式

$$m < \left|\bigcup_{i=1}^r V_i\right| \cdot n\left(\frac{1}{r} - \varepsilon\right) = Tn(1 - \varepsilon r). \tag{9.3}$$

另一方面, $V(G) - \bigcup_{i=1}^r V_i$ 中任一非正则顶点至少与一个 V_i 中的多于 $T - t$ 个顶点不相邻, 所以

$$m > (n - rT - R)(T - t) \geqslant (n - rT - R)T(1 - \varepsilon). \tag{9.4}$$

比较 (9.3) 与 (9.4), 即得

$$R > n\frac{\varepsilon(r-1)}{1-\varepsilon} - rT.$$

所以, 通过选取充分大的 n, 可保证正则顶点的个数

$$R > \binom{T}{t}^r (t-1).$$

但在此情形下由鸽笼原理知, 存在 t 个正则顶点 $v_1, \cdots, v_t \in V(G) - \bigcup_{i=1}^r V_i$ 和 t 元子集 $V_i' \subseteq V_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, 使得每个 v_j 与 $\bigcup_{i=1}^r V_i'$ 中所有点相邻. 这就表明部集 $\{v_1, \cdots, v_t\}$ 与 V_i' $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 确定了一个完全 $(r+1)$ 部子图 $K_{\underbrace{t,t,\cdots,t}_{r+1\text{ 个}}} \subseteq G$. 从而证明了结论对 $r+1$ 成立. □

定理 9.10 的证明 设 $|E(G)| \geqslant \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right)$.

如果对所有$x \in V(G)$, 有 $d(x) \geqslant n\left(1 - \frac{1}{r-1} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, 则由引理 9.11 知结论成

立. 否则, 选取一个不满足这一条件的顶点 x_1, 并令 G_1 为由图 $G=G_0$ 中删除顶点 x_1 及所有与其关联的边所得的图. 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_i, G_1, G_2, \cdots, G_i$ 都已有定义且 $|V(G_i)|=n-i \geqslant n_1\left(r, t, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, 则有下述两种可能:

(i) 对每个 $x \in V(G_i)$ 有 $d_{G_i}(x) \geqslant (n-i)\left(1-\frac{1}{r-1}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$, 则由第一步结论成立;

(ii) 可选取 $x_{i+1} \in V(G_i)$ 满足

$$d_{G_i}(x_{i+1}) < (n-i)\left(1-\frac{1}{r-1}+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

令 $G_{i+1}=G_i-x_{i+1}$, 并重复上述过程直至无法继续进行.

下证如果在第 i 步后受阻, 则 $|V(G_i)| \geqslant n_1\left(r, t, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, 所以 (i) 成立, 且 $G \supseteq K_{t,t,\cdots,t}$, 此即欲证结论. 显然,

$$\begin{aligned}
|E(G)| &= \sum_{j=1}^{i} d_{G_{j-1}}(x_j) + |E(G_i)| \\
&< \sum_{j=1}^{i}(n-j+1)\left(1-\frac{1}{r-1}+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\binom{n-i}{2} \\
&= \left[\binom{n}{2}-\binom{n-i}{2}+i\right]\left(1-\frac{1}{r-1}+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\binom{n-i}{2}.
\end{aligned}$$

另一方面, 由假设知

$$|E(G)| \geqslant \binom{n}{2}\left(1-\frac{1}{r-1}+\varepsilon\right).$$

联立最后两个不等式, 得

$$\binom{n-i}{2}\left(\frac{1}{r-1}-\frac{\varepsilon}{2}\right)+i\left(1-\frac{1}{r-1}+\frac{\varepsilon}{2}\right) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\binom{n}{2},$$

或 n 充分大时

$$\binom{n-i}{2} \geqslant \frac{\left(\frac{\varepsilon}{4}n^2-2n\right)}{\left(\frac{1}{r-1}-\frac{\varepsilon}{2}\right)} \geqslant \binom{n_1\left(r,t,\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2},$$

所以 $|V(G_i)|=n-i \geqslant n_1\left(r, t, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, 定理证毕. □

给定图 H, 按惯例, 设 $\chi(H)$ 表示其**色数**, 即 H 的任意两个相邻顶点所着颜色互异的着色所需最小颜色数.

在本章开始时提到极图理论中的一个基本问题是 "禁用子图问题", 即确定或估计函数 $ex(n,H)$, 这里 $ex(n,H)$ 表示具有 n 个顶点且不含 H 的图可能有的最大边数. 事实上, 上面讨论的几乎所有问题都归属这一范畴.

如果 $\chi(H)\geqslant 3$, 即 H 非二部图, 可以给出这一问题的一个渐近精确的回答. 下述结果是 Erdős-Stone 定理的直接推论.

推论 9.12 给定非空图 H, 其色数为 $\chi(H)$, 则

$$ex(n,H)=\frac{n^2}{2}\left[1-\frac{1}{\chi(H)-1}\right]+o(n^2).$$

9.4 Ramsey-Szemerédi定理

在本章的引言中提到, 极图理论是在 20 世纪 30 年代由一批匈牙利年轻数学家开始研究的. 然而, 这一领域的第一个名副其实的定理却是由一位才华横溢的英国思想家、经济学家和数学家 F.P. Ramsey 给出的. Ramsey 属于以凯恩斯 (J. Keynes) 为首的剑桥学派 (Cambridge circle), 父亲是 Magdalene 大学的校长, 兄弟是坎特伯雷大主教. 他的论文 (Ramsey, 1930) 一直未引起世人注意, 直到后来 Erdős, Szekeres (1935) 重新发现了论文的主要结果并应用它解决了由 E. Klein 提出的一个优美的几何问题 (Erdős 喜欢称之为"幸福结局"问题, 因为解决这一问题后不久 Klein 与 Szekeres 结为伉俪, 从此幸福地生活在一起).

定理 9.13 (Ramsey) 对任意正整数 $r\geqslant k$, 存在 $n_0=n_0(r,k)$ 满足下列条件: 对任意 $n\geqslant n_0$, 若将一个 n 元集 X 的所有 k 元组分成两类, 则总存在一个 r 元子集 $Y\subseteq X$, 使得其所有 k 元组都在同一个类中.

迭代这一结果, 对多于两类的划分很容易得到类似结论 (见习题 9.20).

对 $k=2$, 上述定理表明, 任一具有充分多个顶点的图 G 或含有 r 个顶点的完全子图, 或含有 r 个顶点的空子图 (不含边的图称为**空图**).

定理 9.14 (Erdős, Szekeres, 1935; Erdős, 1947) 设 $R(r)$ 表示具有下述性质的最小整数 n : 任意 n 顶点图或含有 r 个两两相邻的顶点, 或含有 r 个两两不相邻的顶点, 则

$$\frac{r}{6}2^{r/2}\leqslant R(r)\leqslant\binom{2r-2}{r-1}<2^{2r}.$$

证明 对任意 $r,s\geqslant 2$, 令 $R(r,s)$ 表示如下 n 的最小值. 任意 n 顶点图或含有 r 个顶点的完全子图, 或含有 s 个顶点的空子图. 显然, $R(r,s)=R(s,r)$ 且 $R(r,2)=R(2,r)=r$, 并且对 $r,s>2$, 有

$$R(r,s) \leqslant R(r-1,s)+R(r,s-1)\,. \tag{9.5}$$

事实上, 如果 G 是任一有 $R(r-1,s)+R(r,s-1)$ 个顶点的图, 则任意 $x\in V(G)$ 或至少与 $R(r-1,s)$ 个顶点相邻, 或至少与 $R(r,s-1)$ 个顶点不相邻. 由对称性, 假设第一种可能成立. 如果 x 的邻点中不存在 s 个两两不相邻的顶点, 则 x 至少有 $r-1$ 个两两相邻的邻点. 所以 G 含 K_r 为子图, (9.5) 成立.

对 $r+s$ 用归纳法, 由以上结果即得

$$R(r,s)\leqslant \binom{r+s-2}{r-1}.$$

特别地, 对 $s=r$, 即得欲证上界

$$R(r)=R(r,r)\leqslant \binom{2r-2}{r-1}.$$

下界可以用 **随机方法** 求得. 令 $n=\lfloor r2^{r/2}/6\rfloor$, 随机选取顶点集 $\{1,\cdots,n\}$ 上的一个图 G. 对任意 r 元子集 $X\subseteq\{1,\cdots,n\}$, 恰存在

$$2\cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{r}{2}}$$

个图 G, 在 G 中 X 导出完全子图或空子图. 因为顶点集 $\{1,\cdots,n\}$ 上的图共有 $2^{\binom{n}{2}}$ 个, 故随机选取的图 G 含有 r 个顶点的完全子图或空子图的概率至多为

$$\frac{\binom{n}{r}\cdot 2\cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{r}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}}\leqslant\left(\frac{ne}{r}\right)^r\cdot 2^{1-\binom{r}{2}}<1\,.$$

从而存在一个 n 顶点图, 既不含有 r 个顶点的完全子图, 又不含有 r 个顶点的空子图. □

确定 $\lim\limits_{r\to\infty}(R(r))^{1/r}$ 落在区间 $[\sqrt{2},4]$ 中何处是一件极为有意义的事. 事实上, 目前甚至还不知道该极限是否存在. $R(r)$ 的已知最佳上界仅比定理 9.14 给出的界稍好一些, 参见文献 (Conlon, 2007).

很容易将上述讨论推广到 Ramsey 定理论及的一般情况. 定理 9.13 的证明思路相同, 留给读者 (见习题 9.24).

由定理 9.8 可推出下述关于二部图的 Ramsey 定理的另一形式.

推论 9.15　*对任意 r, 存在 $n=n(r)$ 满足下列条件: 将 $K_{n,n}$ (各部集均有 n 个顶点的完全二部图) 的边集任意划分为两部分, 总存在子图 $K_{r,r}\subseteq K_{n,n}$, 其所有的边都在同一部分中.*

令人颇感意外的是, 对无限二部图类似表述是错误的 (见习题 9.21 和习题 9.22). 许多其他有限或无限 Ramsey 型结果, 可参见以下优秀专著 (Graham, 1981;

Graham et al., 1990; Erdős, Hajnal et al., 1984).

Ramsey 理论所蕴涵的一般"哲学"原理是, 即便是最混乱的系统也包含一些极为规则的相对较大的子系统. 我们以著名的 (且非常有用的) Szemerédi(1978) 定理结束本节, 该定理将这一原理推到了极至. 换一种方式也可以这样说, 即便是最混乱的系统, 也可分解成为数相对较少的若干 (几乎) 有规则的子系统.

对给定图 G 和它的两个不相交顶点子集 $V_1, V_2 \subseteq V(G)$, 令 $E(V_1, V_2)$ 表示 G 中所有一个顶点在 V_1 中另一个顶点在 V_2 中的边所成集合. 则 V_1 与 V_2 间的**边密度**定义为

$$\delta(V_1, V_2) = \frac{|E(V_1, V_2)|}{|V_1| \cdot |V_2|}.$$

集对 (V_1, V_2) 称为 ε **正则对**, 如果

$$|\delta(V_1', V_2') - \delta(V_1, V_2)| < \varepsilon$$

对所有满足 $|V_1'| \geqslant \varepsilon|V_1|$ 及 $|V_2'| \geqslant \varepsilon|V_2|$ 的子集 $V_1' \subseteq V_1$ 和 $V_2' \subseteq V_2$ 都成立.

定理 9.16 (Szemerédi 正则性引理) *任意给定 $0 < \varepsilon < 1$ 和自然数 m, 存在 $n_0 = n_0(\varepsilon, m)$ 和 $M = M(\varepsilon, m)$ 满足下列条件: 对任何满足 $|V(G)| \geqslant n_0$ 的图 G, 其顶点集可以划分为 ℓ 个大小尽可能相等的组 $V_1, \cdots, V_\ell$, 使得 $m \leqslant \ell \leqslant M$, 且除至多 $\varepsilon\ell^2$ 个集对外所有集对 (V_i, V_j) 是 ε 正则的.*

不难证明, 上述命题中不能要求所有集对 (V_i, V_j) 是 ε 正则的 (Rödl, 1985; Elekes, 1992).

关于正则性引理的新证明及其在超图中的推广, 参见文献 (Lovász, Szegedy, 2004; Rödl et al., 2005; Tao, 2006; Tao, Vu, 2006; Gowers, 2006).

设 $V_1, \cdots, V_r$ 为不交的 m 元集, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$. 现定义顶点集 $V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_r$ 上的**随机 r 部图** G. 对任意一对顶点 $u \in V_i, v \in V_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant r)$, 令 uv 属于 $E(G)$ 的概率为 δ (每个点对的选取都是独立的), 则对任意 $i \neq j$, V_i 与 V_j 间的期望边密度为 δ. 此外, G 的 r 个顶点的完全子图个数的期望值为 $\delta^{\binom{r}{2}} m^r$.

下述引理表明, 对定理 9.16 描述的划分中任意 r 个顶点组导出的图, 类似的命题成立, 只要任意两个顶点组形成一个边密度超过 δ 的 ε 正则对. 事实上, Szemerédi 正则性引理的广泛应用依据的是下述事实, 鉴于技术性原因, 由一个 ε 正则对 (V_i, V_j) 导出的二部图可视为随机图 [参见文献 (Simonovits, Sós, 1991)].

引理 9.17 *设 r 为自然数, $0 < \varepsilon \leqslant r^{-r}$, $\varepsilon^{1/r} \leqslant \delta \leqslant 1/2$. 假设图 G 有 r 个两两不交的集 $V_1, \cdots, V_r \subseteq V(G)$, 对所有 $1 \leqslant i \leqslant r$, 有 $|V_i| \geqslant N$, 且*

$$\delta(V_i', V_j') \geqslant \delta$$

对所有满足 $|V_i'| \geqslant \varepsilon|V_i|$, $|V_j'| \geqslant \varepsilon|V_j|$ 的 $V_i' \subseteq V_i, V_j' \subseteq V_j$ $(i \neq j)$ 成立, 则图 G 至少

包含

$$\delta^{\binom{r}{2}}\left(\frac{N}{2}\right)^r$$

个具有 r 个顶点 $v_1,\cdots,v_r$ 的完全子图，其中 $v_i\in V_i$.

证明 对 r 用归纳法. 当 $r=1$ 时, 无须证明. 假设结论对 $r-1$ 成立, 下证结论对 r 成立. 令 V_r' 表示 V_r 中满足下述条件的所有点组成的集合: 对所有 $i<r$, 每个合条件的点在 V_i 中至少有 $\delta|V_i|$ 个邻点. 显然, $|V_r'|\geqslant|V_r|/2$. 否则, 对某个 $i<r$, V_r 中至少存在 $|V_r|/(2r-2)>\varepsilon|V_r|$ 个点, 其在 V_i 中的邻点数小于 $\delta|V_i|$. 令 V_r'' 表示这些点组成的集合, 即得

$$\delta(V_r'',V_i)<\delta,$$

矛盾.

任意选定顶点 $x\in V_r'$, 令 V_i^* 表示 x 在 V_i $(i<r)$ 中的邻点的集合. 对集合 $V_1^*,\cdots,V_{r-1}^*$ (其中 $\varepsilon^*=\varepsilon/\delta$, $\delta^*=\delta$ 且 $N^*=\delta N$) 应用归纳假设即知, 它们至少可导出

$$\delta^{\binom{r-1}{2}}\left(\frac{\delta N}{2}\right)^{r-1}$$

个完全子图. 所以, 每个 $x\in V_r'$ 至少属于同样多个 K_r, 故由 $V_1,\cdots,V_r$ 导出的 K_r 总数至少为

$$|V_r'|\delta^{\binom{r-1}{2}}\left(\frac{\delta N}{2}\right)^{r-1}\geqslant\delta^{\binom{r}{2}}\left(\frac{N}{2}\right)^r,$$

此即欲证结论. □

推论 9.18 对任意 $\gamma>0$ 和任意自然数 $r\geqslant 2$, 存在常数 $\gamma'=\gamma'(\gamma,r)$, 使得任意具有 n 个顶点且至少有 $\dfrac{n^2}{2}\left(1-\dfrac{1}{r-1}+\gamma\right)$ 条边的图 G 至少包含 $\gamma' n^r$ 个顶点数为 r 的完全子图.

证明 对某个 ε 和 m (稍后再确定), 考虑满足定理 9.16 条件的一个划分 $V(G)=V_1\cup\cdots\cup V_\ell$. 定义顶点集 $V(G^*)=\{V_1,\cdots,V_\ell\}$ 上的一个图 G^* 如下: 令

$$V_iV_j\in E(G^*)\iff (V_i,V_j)\text{ 是 }\varepsilon\text{ 正则的且 }\delta(V_i,V_j)\geqslant\frac{\gamma}{4}.$$

G 的任意一条边连接

1. 或两个使 $V_iV_j\in E(G^*)$ 的类 (V_i,V_j);
2. 或一个 ε 正则对 (V_i,V_j);
3. 或一个满足 $\delta(V_i,V_j)<\dfrac{\gamma}{4}$ 的对 (V_i,V_j);
4. 或属于同一个组 V_i 的两个顶点.

令 $e_1,\cdots,e_4$ 分别表示 G 中满足条件 (1), $\cdots$,(4) 的边的条数, 则有

$$\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{r-1}+\gamma\right)\leqslant e_1+e_2+e_3+e_4$$
$$\leqslant|E(G^*)|\left\lceil\frac{n}{\ell}\right\rceil^2+\varepsilon\ell^2\left\lceil\frac{n}{\ell}\right\rceil^2+\frac{\gamma}{4}\binom{n}{2}+\ell\binom{\lceil n/\ell\rceil}{2}.$$

如果 $\varepsilon=(\gamma/5)^r$, $\ell\geqslant m=\lceil 5/\gamma\rceil$ 且 n 充分大, 则后三项中每一项都不超过 $\gamma n^2/8$, 故有

$$|E(G^*)|\geqslant\frac{n^2}{2\lceil n/\ell\rceil^2}\left(1-\frac{1}{r-1}+\frac{\gamma}{4}\right)$$
$$\geqslant\frac{\ell^2}{2}\left(1-\frac{1}{r-1}+\frac{\gamma}{5}\right).$$

利用 Turán定理 (见定理 9.3 或定理 9.10), 由以上结论可知, G^* 含有顶点数为 r 的完全子图, 如 r 个顶点为 $V_1,\cdots,V_r$. 令 $\delta=\gamma/5$, 利用引理 9.17, 得 G 中 K_r 的个数至少为

$$\delta^{\binom{r}{2}}\left(\frac{N}{2}\right)^r\geqslant\delta^{\binom{r}{2}}\left(\frac{\lfloor n/M(\varepsilon,m)\rfloor}{2}\right)^r. \qquad \square$$

Moon, Moser (1962) 用完全不同的方法证明了推论 9.18 对 $\gamma'=\gamma/r^r$ 成立 [另参见文献 (Lovász, 1972; Bollobás, 1976) 及习题 9.25].

9.5 两个几何应用

本节介绍 Turán 定理和 Ramsey 定理 (见定理 9.3 和定理 9.13) 的两个简单应用.

假设试图在 3 维单位球的边界 $\mathbb{S}^2$ 上安排 r 个点, 使它们确定的最小距离达到最大. 等价地, 希望确定最大值 ρ_r, 使得可以在 $\mathbb{S}^2$ 上安排 r 个互不交叠的半径为 ρ_r 的球冠. 换句话说, 希望确定 $\mathbb{S}^2$ 中 r 个全等球冠形成的填装的最大密度 δ_r. 对非常大的 r 值, 这一问题实质上等价于第 3 章中讨论的平面情形. 特别地, 有 $\lim_{r\to\infty}\delta_r=\frac{\pi}{\sqrt{12}}$. 据我们所知, δ_r 和 ρ_r 的精确值仅当 $r\leqslant 12$ 和 $r=24$ 时为已知. Kottwitz (1991) 给出了目前已知的最好构造. 这一问题是由植物学家 Tammes (1930) 提出的, 他从事花粉粒细孔分布方面的研究.

将上述问题以更一般的形式表述如下. 在本节中, 令 C 表示 $\mathbb{R}^d$ 的一个固定紧子集, 它等于其内部的闭包, 或令 C 表示这样一个集的边界 (如 $C=\mathbb{S}^2$). 对任意 $r\geqslant 2$, 定义 C 的r **阶填装常数**为

$$d_r=\max_{\substack{P\subseteq C\\|P|=r}}\ \min_{p\neq q\in P}|p-q|.$$

显然, d_r $(r=1,2,\cdots)$ 为一单调递减序列, 当 $r\to\infty$ 时趋于零. 但 d_r 未必是严格递减的 (例如, 若 $C=\mathbb{S}^2$, 则 $d_5=d_6$).

推广 Erdős (1955b) 的一个较早的结果后, Turán (1970a, 1970b) 发现, C 的填装常数可用来表述 C 中任意 (有限) 点集所确定的距离分布的一些有趣性质.

定理 9.19 (Turán) *设 $r\geqslant 2$ 为一整数, $d_{r+1}\neq d_r$. 则任意 $n\geqslant r+1$ 个点 $p_1,\cdots,p_n\in C$ 组成的集合中, 满足 $|p_i-p_j|\leqslant d_{r+1}$ 的点对 p_i,p_j $(i<j)$ 的个数至少为*

$$\frac{n^2}{2r}-\frac{n}{2}.$$

当 n 为 r 的倍数时这个界是紧的.

证明 在顶点集 $\{p_1,\cdots,p_n\}$ 上定义图 G, p_i 与 p_j 间连一条边当且仅当它们之间的距离不超过 d_{r+1}. 由 d_{r+1} 的定义知, G 不含 $r+1$ 个两两不相邻的顶点. 所以, 由 Turán 定理 (见习题 9.6) 知, $|E(G)|\geqslant \dfrac{n^2}{2r}-\dfrac{n}{2}$.

现证此上界不能再改进. 注意假设条件 $d_{r+1}\neq d_r$ 意味着可以从 C 中选取 r 个点, 使得任两点间的距离都大于 d_{r+1}. 将每个这样的点替换为它的非常小的邻域内的 n/r 个点, 得到一个 n 点集, 由此可知定理给出的界是可达的. □

Erdős等 (1971, 1972a, 1972b) 和习题 9.26 与习题 9.27 给出了这一思想的一些进一步的问题与推广.

以一个真正的“珍宝”来结束本章, 事实证明, 它的发现是图论和组合几何方面许多新进展的开端.

定理 9.20 (Erdős, Szekeres, 1935) *对任意 $r\geqslant 3$, 均存在 $n=n(r)$ 具有下述性质: 平面中任一无三点共线的 n 点集, 都包含一个凸 r 边形的顶点集.*

证明 设 $P=\{p_1,\cdots,p_n\}$ 为平面中处于一般位置的任意 n 个点所成的集合. 将所有三元组 $p_ip_jp_k$ $(1\leqslant i<j<k\leqslant n)$ 根据三角形 $p_ip_jp_k$ 的定向 (顺时针或逆时针) 划分成两类. 由定理 9.13, 如果 $n\geqslant n_0(r,3)$, 则存在一个 r 元子集 $Q\subseteq P$, 它的所有三元组属于同一类. 这说明 Q 为一个凸 r 边形的顶点集 (见习题 9.29). □

Erdős 和 Szekeres 猜想满足定理 9.20 条件的 $n(r)$ 的最小值为 $2^{r-2}+1$, 已知 $r\leqslant 6$ 时, 猜想成立. 已知的最佳上界由 Tóth, Valtr (2005) 给出.

习　题

9.1 证明不含偶圈 C_{2k} $(k=2,3,\cdots)$ 的 n 顶点图的最大边数为 $\lfloor 3(n-1)/2\rfloor$.

9.2 (Pósa, 1962) 给定 n 顶点图 G, 对任意 $k<n/2$, G 中度至多为 k 的顶点个数小于 k, 证明 G 有 Hamilton 圈.

9.3 (Erdős, 1962b) 给定 n 顶点图 G, G 中任一顶点的度至少为 k, $k<n/2$,

证明：如果

$$|E(G)| \geqslant 1 + \max_{k \leqslant t < n/2} \left[\binom{n-t}{2} + t^2 \right],$$

则 G 有 Hamilton 圈. 另证明边数条件不能减弱.

9.4 (Erdős, 1938)　设 $1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leqslant n$ 为一自然数序列, 其中每个 n_i 都不能整除其他二者的乘积 $n_g n_h$ $(i, g, h$ 互异). 证明 $k \leqslant \pi(n) + \lfloor n^{2/3} \rfloor$, 其中 $\pi(n)$ 表示不超过 n 的素数个数.

9.5　证明 n 个顶点的 $(r-1)$ 部图的最大边数为

$$|E(T_{r-1}(n))| = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{r-1}\Big)(n^2 - s^2) + \binom{s}{2},$$

其中 s 为 n 除以 $r-1$ 所得的余数.

9.6 (Turán, 1941)　设 G 为 n 顶点图. 证明:

(i) 如果 G 不含 $r+1$ 个顶点的完全子图, 则

$$|E(G)| \leqslant \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right);$$

(ii) 如果 G 不含 $r+1$ 个两两不相邻的顶点 (即不含 $r+1$ 个顶点的**空子图**), 则 $|E(G)| \geqslant \dfrac{n^2}{2r} - \dfrac{n}{2}$.

9.7* (Füredi, 1991b)

(i) 设 $H = \{E_1, \cdots, E_m\}$ 为 n 元集的子集所成的集族, 令 $s = \sum_{i=1}^{m} |E_i|/m$, 设 $k, d \geqslant 2$ 为整数. 证明: 如果

$$s\left(\frac{ms}{n} - k + 1\right) \geqslant (m-1)(k-1)(d-1),$$

则 H 中存在有公共元素的 k 个子集, 使得其中任意两个子集的交集的大小至少为 d;

(ii) 设 G_k 为二部图, 它的两个部集为

$$V_1 = \{x_0\} \cup \{x_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant k\}, \quad V_2 = \{y_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\},$$

边集为

$$E(G_k) = \{x_0 y_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\} \cup \{x_{ij} y_i, x_{ij} y_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant k\}.$$

证明: 对任意 $k \geqslant 2$ 存在常数 c_k, 使得任意具有 n 个顶点且不含 G_k 的图至多有 $c_k n^{3/2}$ 条边 (图 9.5).

图 9.5　图 G_4

9.8　设 $v_1, \cdots, v_n$ 是 d 维欧氏空间中长度至少为 1 的向量. 证明：满足 $|v_i + v_j| < 1$ 的对 v_i, v_j $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 的个数至多为 $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

9.9 (Katona, 1969, 1978)　设 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是两个同分布的离散随机变量, 其 (有限多个可能) 取值为 d 维欧氏空间中的向量. 证明：

$$Pr\{|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}| \geqslant r\} \geqslant \frac{1}{2}(Pr\{|\boldsymbol{X}| \geqslant r\})^2.$$

9.10　给定一个不含三角形 (不含 K_3) 的图 G, 按惯例 $\alpha(G)$ 表示 G 中两两不相邻的顶点的最大个数, $\tau(G)$ 表示如下顶点的最小个数, G 中每条边至少与其中一个顶点关联. 证明：

$$|E(G)| \leqslant \alpha(G)\tau(G).$$

由此推出 $r=3$ 这一特殊情形下的 Turán 定理.

9.11　设具有 n 个顶点且至少有 $\lfloor n^2/4 \rfloor$ 条边的图 G 含一个奇圈, 证明图 G 也含一个三角形.

9.12 (Dirac, 1963)　设 $T_{r-1}(n)$ 表示 n 个顶点的平衡完全 $(r-1)$ 部图, $n \geqslant r+1$. 证明任意具有 n 个顶点且至少有 $|E(T_{r-1}(n))|+1$ 条边的图 G 都包含一个删除了一条边的 K_{r+1}.

9.13 (Erdős, 1962a; Edwards, 1975)　证明：存在正值常数 c 与自然数 n_0, 使得任一顶点数 $n \geqslant n_0$, 边数超过 $\lfloor n^2/4 \rfloor$ 的图都含有 cn 个具有一条公共边的三角形.

9.14 (Erdős, 1964a)　设对于 $t>0$, 具有 n 个顶点与 $\lfloor n^2/4 \rfloor - t$ 条边的图 G 包含一个三角形, 证明该图至少包含 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - t - 1$ 个三角形, 并证明这个界是最佳可能的.

9.15 (Győri et al., 1991)　证明：在所有具有 n 个顶点且不含三角形的图中, 平衡完全二部图 $T_2(n)$ 所含长为 4 的圈的个数最多.

9.16 (Erdős, 1967b)　证明任一图 G 都含有一个二部子图 H, 其边集满足 $|E(H)| \geqslant |E(G)|/2$, 并且可以要求 H 的两个部集的大小至多相差 1.

9.17　证明对任意 r 都存在 $n_0 = n_0(r)$, 使得任一具有 $n \geqslant n_0$ 个顶点且不含 $K_{r,r}$ 的图的边数都小于 $n^{2-1/r}$.

9.18* (Simonovits, 1966)　证明任一具有 $n \geqslant n_0$ 个顶点与 $|E(T_r(n))|+n$ 条边的图 G 都包含 $K_{\underbrace{1,3,3,\cdots,3}_{r+1 \text{个}}}$, 即完全 $(r+1)$ 部子图, 其第一个部集中有 1 个顶点, 其他部集中各有 3 个顶点 (见 Turán定理).

9.19* (Erdős, Moser, 1959, 1970)　设 G 为顶点数 $n>r$ 的图, 其任意 r 个顶点都有一个公共邻点. 证明：

$$|E(G)| \geqslant (r-1)(n-1) - \binom{r-1}{2} + \left\lceil \frac{n-r+1}{2} \right\rceil,$$

并且此界是可达的.

9.20 (Ramsey, 1930) 证明: 对任意正整数 $r \geqslant k$ 和 $c \geqslant 2$, 存在满足下述条件的 $n_0 = n_0(r,k,c)$: 若将一个 n_0 元集 X 的所有 k 元组划分为 c 类, 则总可以找到一个 r 元子集 $Y \subseteq X$, Y 的所有 k 元组都属于同一类.

9.21 (Ramsey, 1930)

(i) 证明任何有无限多个顶点的图或含一个无限完全子图, 或含一个无限空子图 (即无限多个两两不相邻的顶点);

(ii) 利用 (i) 证明定理 9.13 中 $k=2$ 的情况.

9.22 构造一个二部图 G, 其部集 V_1 和 V_2 为无限集, 且不存在无限子集 $V_1' \subseteq V_1, V_2' \subseteq V_2$, 使得 $V_1' \times V_2' \subseteq E(G)$ 或 $(V_1' \times V_2') \cap E(G) = \varnothing$. 是否存在具有上述性质的不可数二部图?

9.23 给定 $r \geqslant 2$. 证明任意一个充分长的实数序列都包含一个长为 r 的单调子序列.

9.24 推广定理 9.14 中上界的证明方法, 用以证明定理 9.13.

9.25 (Moon, Moser, 1962) 对任意 n 顶点图 G, 令 $k_r(G)$ 表示 G 中具有 r 个顶点的完全子图的个数.

(i) 证明:

$$\frac{k_{r+1}(G)}{k_r(G)} \geqslant \frac{1}{r^2-1}\left(r^2 \frac{k_r(G)}{k_{r-1}(G)} - n\right);$$

(ii) 设 $|E(G)| = \dfrac{n^2}{2}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ 对某一实数 $x \geqslant r-1$ 成立. 证明:

$$k_r(G) \geqslant \frac{\binom{x}{r}}{x^r} n^r.$$

9.26 (Erdős, 1955b) 令 $\mathcal{P}$ 表示所有直径至多为 1 的平面子集所成的集族. 对任意 $r \geqslant 2$, 令

$$d_r = \max_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ |P|=r}} \min_{p \neq q \in P} |p-q|.$$

证明: 对任意集 $\{p_1, \cdots, p_n\} \in \mathcal{P}$, 满足 $|p_i - p_j| \leqslant d_{r+1}$ 的点对 p_i, p_j $(i<j)$ 的个数至少为 $\dfrac{n^2}{2r} - \dfrac{n}{2}$.

9.27 (Bateman, Erdős, 1951; Erdős, 1955b) 给定最大距离为 1 的 n 点集 $\{p_1, \cdots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$, 证明距离大于 $1/\sqrt{2}$ 的点对 p_i, p_j $(i<j)$ 的个数至多为 $\lfloor n^2/3 \rfloor$.

9.28 (Sós, 1970) 给定 $\mathbb{R}^d$ 中的 n 点集 P, $2 \leqslant r < n$, 令 $c_r^*(P)$ 表示具有下述性质的最小数: 可以选取 P 中的 r 个点, 使得 P 中其他任一点到这 r 个点中至少一个点的距离不超过 $c_r^*(P)$. 证明满足 $|p-q| \geqslant c_r^*(P)$ 的 (无序) 点对 $p, q \in P$ $(p \neq q)$ 的个数至少为

$$(r-1)(n-1) - \binom{r-1}{2} + \left\lceil \frac{n-r+1}{2} \right\rceil,$$

并且此界是可达的.

9.29 设 r 个点 $p_1, \cdots, p_r \in \mathbb{R}^2$ 中无三点共线, 并且对每个 $1 \leqslant i < j < k \leqslant r$, 三角形 $p_i p_j p_k$ 是顺时针方向的. 证明 $p_1, \cdots, p_r$ 处于凸位置.

第 10 章　空间中的重复距离

1946 年, 在《美国数学月刊》上发表的一篇论文中, P. Erdős 就距离空间中有限点集确定的距离分布提出了两个很一般的问题:

1. n 个点的集合中一个给定距离至多能出现多少次?
2. n 个点的集合中互异距离的最小个数是多少?

即使在平面点集情形, 为得到这些函数的合理上下界所作的许多尝试也均告失败. 所以人们必须认识到, 以上问题并非仅仅是趣味数学中的"珍宝", 它们提出了一些甚为深刻的研究课题, 其中有的可利用图论与组合论思想解决. 事实上, 许多重要的组合论方法与结果的发现均大大得益于人们对这些方法与结果所预期的几何结论. 本章试图说明, 如何将本书第 9 章引入的极图理论工具应用到上面提及的第一个问题及某些密切相关的问题.

10.1　平面中的单位距离

定义 10.1　*给定 d 维欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 中 n 个点的集合 $P=\{p_1,\cdots,p_n\}$, 设 $f(P)$ 表示使 p_i 与 p_j 的距离 $|p_i-p_j|$ 等于 1 的点对 p_i,p_j 的个数, 其中 $i<j$, 设*

$$f_d(n)=\max_{\substack{P\subset\mathbb{R}^d\\|P|=n}} f(P).$$

换言之, $f_d(n)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中 n 个点确定的单位距离的最大个数.

易知 $f_1(n)=n-1$, 且唯一的极值构形 (即唯一的达到该最大值的 n 点集) 是公差为 1 长度为 n 的等差数列在直线上的表示 (见习题 10.3).

对于 $d=2$, Erdős (1946) 证得下述结果:

定理 10.2 (Erdős)　*设 $f_2(n)$ 表示平面上 n 个点中单位距离可能出现的最大次数, 则存在常数 $c>0$, 使得*

$$f_2(n)\leqslant cn^{3/2}.$$

证明　给定平面点集 $P=\{p_1,\cdots,p_n\}$, 定义以 P 为顶点集的图 G_P 如下: 连接 P 的两点为边, 当且仅当该两点间的距离为 1. 也就是说,

$$V(G_P)=P,$$
$$p_ip_j\in E(G_P)\iff |p_i-p_j|=1\,.$$

G_P 通常称为 P 确定的**单位距离图** (图 10.1). 显然 G_P 不包含任何与 $K_{2,3}$ 同构的子图, 这里 $K_{2,3}$ 表示一个完全二部图, 一个顶点部集含两个顶点, 另一顶点部集含三个顶点. 因此, 利用推论 9.7 即得

$$|E(G_P)| \leqslant cn^{2-\frac{1}{2}}.$$ □

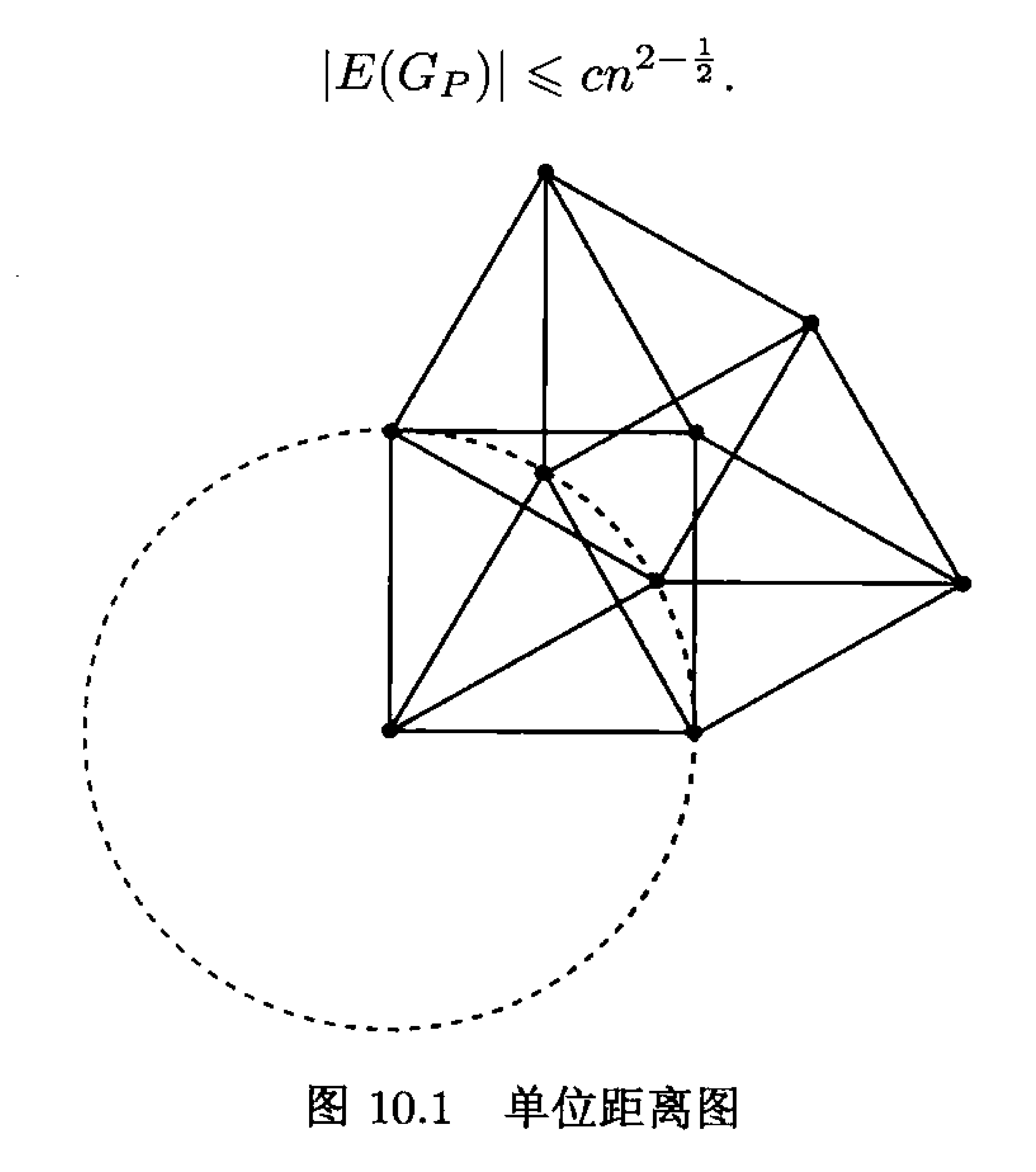


图 10.1　单位距离图

为求得 $f_2(n)$ 的下界, 首先须做适当准备.

引理 10.3　*设 $r(n)$ 表示自然数 n 写成两数平方和的不同写法的个数, 则存在常数 $c' > 0$, 使得对无限多个 n, 有*

$$r(n) \geqslant n^{c'/\log\log n}.$$

证明 (梗概)　为简便起见, 设 $n = p_1p_2, \cdots, p_k$, 其中 p_j 是第 j 个形如 $4m+1$ 的最小素数. 由定理 1.12, p_j 可写成两数平方和, 即

$$p_j = a_j^2 + b_j^2 = (a_j + b_j\mathrm{i})(a_j - b_j\mathrm{i}),$$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

对任何子集 $J \subseteq \{1, 2, \cdots, k\}$,

$$\prod_{j\in J}(a_j + b_j\mathrm{i})\prod_{j\notin J}(a_j - b_j\mathrm{i}) = A_J + B_J\mathrm{i},$$
$$\prod_{j\in J}(a_j - b_j\mathrm{i})\prod_{j\notin J}(a_j + b_j\mathrm{i}) = A_J - B_J\mathrm{i},$$

其中, A_J 与 B_J 显然满足

$$A_J^2 + B_J^2 = (A_J + B_J\mathrm{i})(A_J - B_J\mathrm{i}) = \prod_{j=1}^{k} p_j = n\,.$$

由复整数的唯一因子分解定理 [例如可参见文献 (Niven, Zuckerman 1966)], $A_J+B_J\mathrm{i}$ 因 J 的选择不同而不同, 故有

$$r(n) \geqslant 2^k\,.$$

接下来要给出 k 的用 n 表出的下界. 众所周知, 形如 $4m+1$ 的素数在全体素数组成的数列中是"均匀分布"的. 特别地, 对任何 $k>2$, 有

$$c_1 k \log k < p_k < c_2 k \log k,$$

其中 c_1 与 c_2 为适当选定的正值常数 [参见文献 (Hardy, Wright, 1960; LeVeque, 1956) 或任何有关数论的权威教材]. 于是

$$n = \prod_{j=1}^{k} p_j < p_k^k < c_2(k\log k)^k\,,$$

由此即可推知 $k > c' \log n / \log\log n$, 从而得到欲证结果. □

现在即可证明我们期待的 $f_2(n)$ 的下界.

定理 10.4 (Erdős) *设 $f_2(n)$ 表示平面上 n 个点中单位距离可能出现的最大次数, 则存在常数 $c''>0$, 使得对无限多个 n 值, 有*

$$f_2(n) > n^{1+c''/\log\log n}\,.$$

证明 设整数 N 满足不等式 $r(N) \geqslant N^{c'/\log\log N}$(见引理 10.3), 令 $n = \left(2\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil\right)^2$. 设 P 是边长等于 $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ 的正方形网格中的 $2\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil \times 2\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil$ 部分, 即

$$P = \left\{\left(i/\sqrt{N}, j/\sqrt{N}\right) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 2\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil\right\}.$$

P 中两点 $\left(i/\sqrt{N}, j/\sqrt{N}\right)$, $\left(i'/\sqrt{N}, j'\sqrt{N}\right)$ 间的距离为 1, 当且仅当 $(i-i')^2+(j-j')^2=N$. 因此, P 中每个点与 P 中至少 $r(N)$ 个点的距离为 1. 从而得

$$f(P) \geqslant \frac{nr(N)}{2} \geqslant n^{1+c''/\log\log n}\,,$$

此即欲证结果. 易知 $f_2(n)$ 的这一下界对任何充分大的 n 成立. □

第 11 章 (见推论 11.11) 要回到有关 $f_2(n)$ 的上下界问题, 并将上界改进为 $cn^{4/3}$. 但按 Erdős 的猜想, $f_2(n)$ 的真值很可能更接近下界. Erdős 曾多次提出奖额为 500 美元的悬赏, 征求对 $f_2(n) \leqslant n^{1+c/\log\log n}$ 这一上界的证明或否定.

可以对上述问题稍加调整, 改为研究平面上 n 个点中具有"近乎"相同距离的点对的最大个数. 为避免平凡情形, 当所有 $\binom{n}{2}$ 个距离均近似于 0 时, 假设这些点是"分离的". 下面的结果属于 Erdős , Makai, Pach, Spencer(1991).

定理 10.5 (Erdős et al.) *设 $t>0$, 给定平面上最小距离至少为 1 的 n 个点 $p_1,\cdots,p_n$ 的集合, 则存在 n_0, 当 $n\geqslant n_0$ 时, 给定点集中距离在 t 与 $t+1$ 之间的点对 p_i,p_j, $i<j$, 的个数不超过 $\lfloor n^2/4\rfloor$. 此外, 对所有 n 及所有充分大的 $t>t_0(n)$, 这一上界是可达的.*

证明 定义顶点集为 $\{p_1,\cdots,p_n\}$ 的图 G 如下: 以边连接 p_i 与 p_j, 当且仅当 $t\leqslant|p_i-p_j|\leqslant t+1$. 若结论不成立, 即 $|E(G)|\geqslant\lfloor n^2/4\rfloor+1$, 则存在图 G 的一条边, 如 $p_1p_2\in E(G)$, 以及与 p_1, p_2 相邻的 $\lceil cn\rceil$ 个顶点 $p_3,\cdots,p_{\lceil cn\rceil+2}$ (见习题 9.13). 按图 G 的定义, 所有的点 $p_3,\cdots,p_{\lceil cn\rceil+2}$ 必落在两个圆环 R_1 与 R_2 的交集中, 其中 R_j 的中心是 p_j ($j=1,2$), 内外半径分别是 t 与 $t+1$ (图 10.2). 但易知 $R_1\cap R_2$ 可被两个半径为 3/2 的圆盘覆盖. 在半径为 3/2 的圆盘中所能选取的两点间距离均不小于 1 的点的最大个数不超过

$$\frac{(3/2+1/2)^2\,\pi}{(1/2)^2\pi}=16.$$

如此即得 $cn\leqslant 32$, 与 n 充分大的假设矛盾.

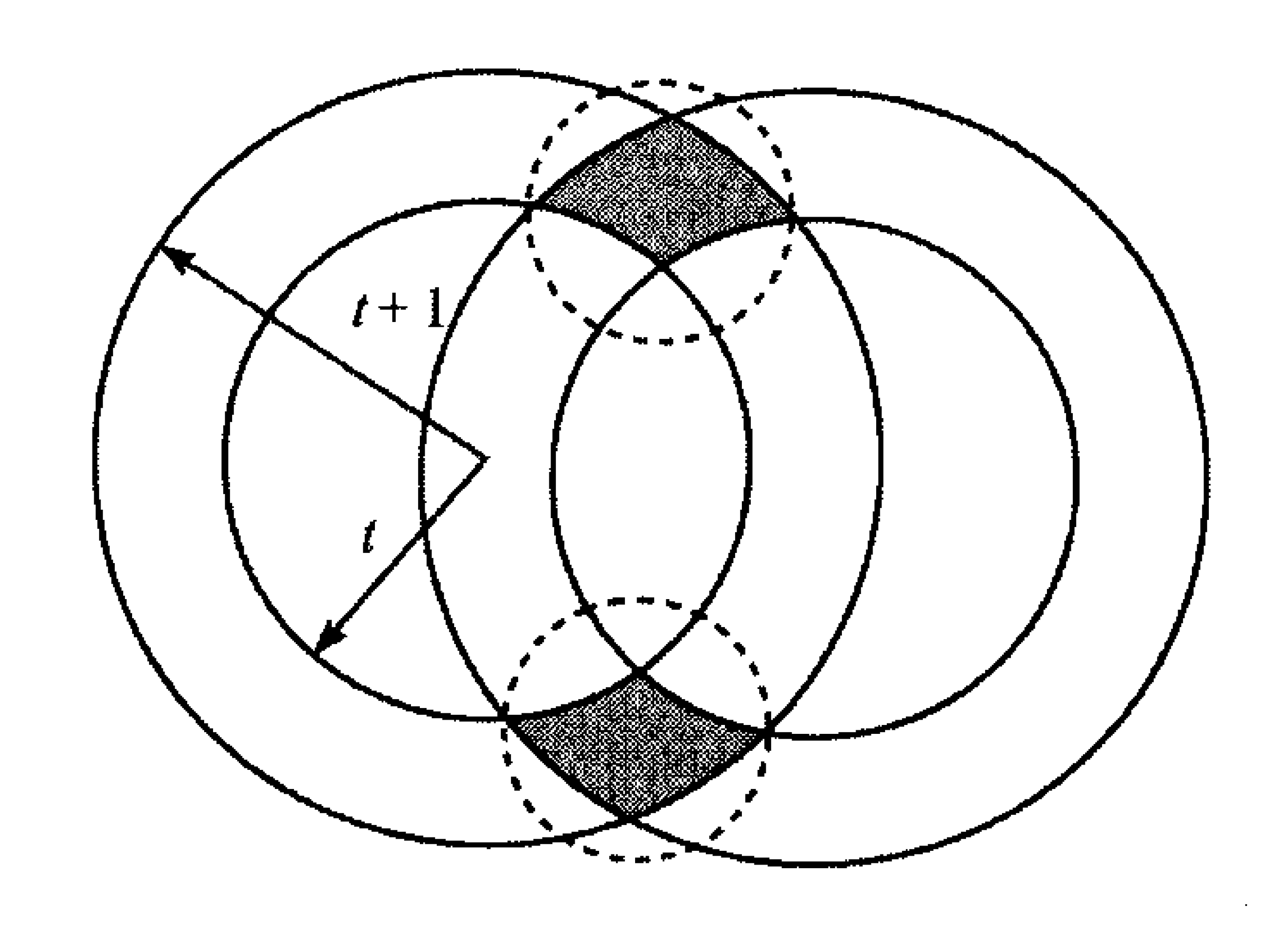


图 10.2 定理 10.5 证明图示

至于下界, 将 n 个点放置在相互距离为 t 的两条竖直线上, 每条竖直线至少含有 $\lfloor n/2\rfloor$ 个点, 且每条竖直线上相继两点间的距离为 1. 若选取 t 充分大, 则易见不同竖直线上任意两点间的距离必介于 t 与 $t+1$ 之间. □

讨论至此, 不妨提一提可用极图理论解决的两个其他问题:

1. 关联问题. 给定平面上 m 个点的集合 $P=\{p_1,\cdots,p_m\}$ 及 n 条直线的集合 $\mathcal{L}=\{\ell_1,\cdots,\ell_n\}$, 设 $\mathcal{I}(P,\mathcal{L})$ 表示两者间的关联数, 即有序对 (i,j) 的个数, 其中

i, j 满足 $p_i \in \ell_j$. 试确定

$$\mathcal{I}(m,n) = \max_{\substack{|P|=m \\ |\mathcal{L}|=n}} \mathcal{I}(P,\mathcal{L}).$$

2. 多个胞腔的复杂度问题. 给定平面上 n 条直线的集合 $\mathcal{L} = \{\ell_1, \cdots, \ell_n\}$, $\mathbb{R}^2 - \bigcup_{i=1}^n \ell_i$ 的连通分支称为该直线配置的胞腔. 每个胞腔 c 的边界由若干线段(可能还有半直线) 构成, 称之为胞腔 c 的边. 对于胞腔的集合 $\mathcal{C} = \{c_1, \cdots, c_m\}$, 令 $\mathcal{K}(\mathcal{C},\mathcal{L})$ 表示 $\mathcal{C}$ 中胞腔的边的总数. 试确定

$$\mathcal{K}(m,n) = \max_{\substack{|\mathcal{C}|=m \\ |\mathcal{L}|=n}} \mathcal{K}(\mathcal{C},\mathcal{L}).$$

引理 10.6 对任何正整数 m, n, 有

$$\mathcal{I}(m,n) \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{K}(m,2n) + m.$$

证明 设 $P = \{p_1, \cdots, p_m\}$, $\mathcal{L} = \{\ell_1, \cdots, \ell_n\}$ 分别为点集与直线集. 若 P 的点不是 $\mathcal{L}$ 中两条或更多条直线的交点, 则该点对 $\mathcal{I}(P,\mathcal{L})$ 的贡献至多为 1, 故此种关联关系的总数至多为 m. 其次, 考虑落在 $\mathcal{L}$ 中至少两条直线上的所有点 p_i. 令

$$\varepsilon = \min_{\substack{p\in P, \ell\in\mathcal{L} \\ p\notin \ell}} \operatorname{dist}(p,\ell),$$

即点 $p \in P$ 与不含 p 的直线 $\ell \in \mathcal{L}$ 的最小距离. 将 $\mathcal{L}$ 中每条直线沿两个方向作距离为 $\varepsilon/3$ 的平移, 得 $2n$ 条直线的集合 $\mathcal{L}'$ (图 10.3). 每个属于 $\mathcal{L}$ 中至少两条直线

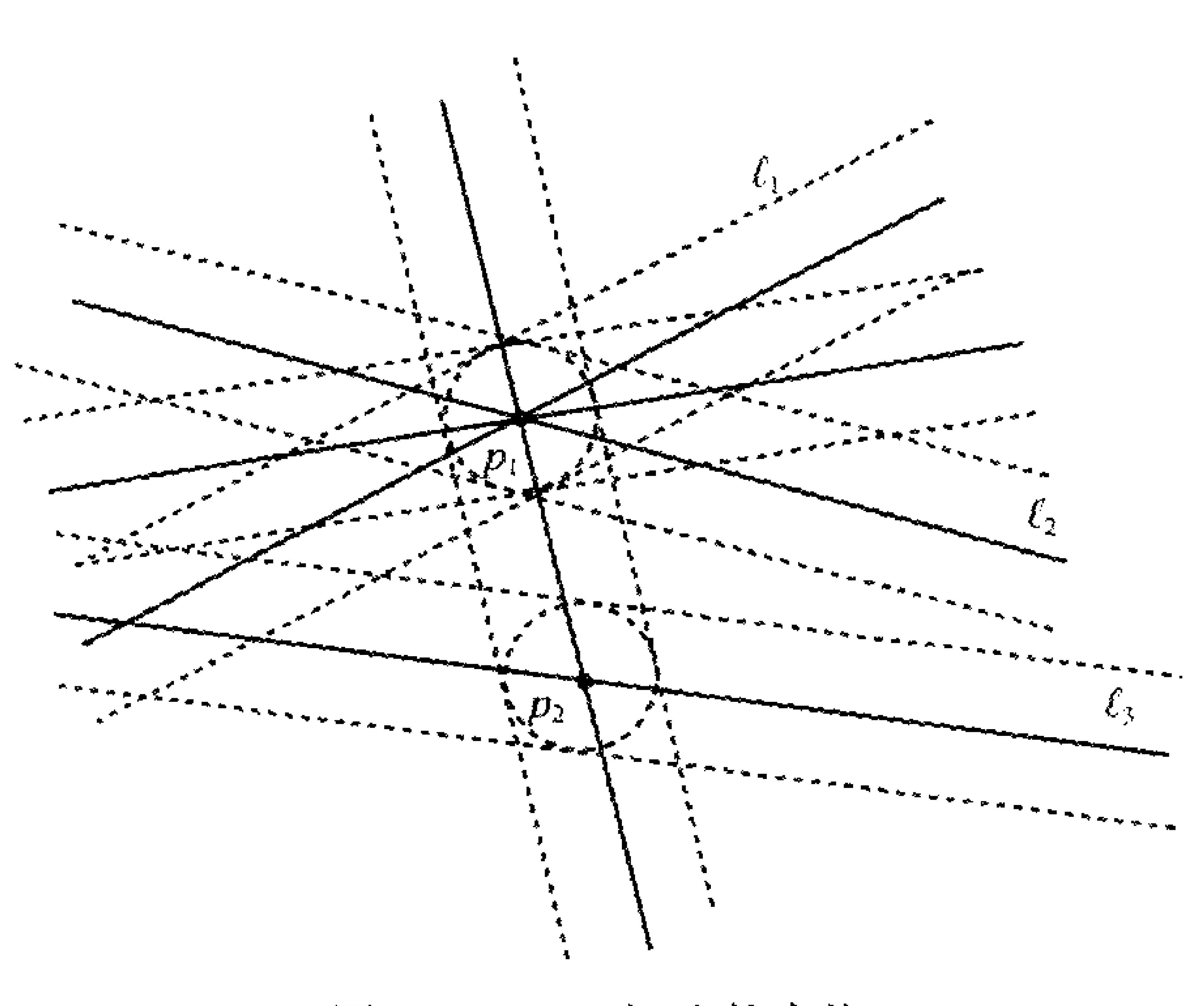


图 10.3 $\mathcal{L}$ 到 $\mathcal{L}'$ 的变换

的点 p_i 必落在 $\mathcal{L}'$ 确定的特定的胞腔 c_i' 中, c_i' 的边数不小于 $\mathcal{L}$ 中与 p_i 关联的直线条数的两倍. 因此, 互异胞腔 c_i' 的边的总数不小于 $2(\mathcal{I}(P,\mathcal{L})-m)$. 等价地, 有 $\mathcal{K}(m,2n)\geqslant 2(\mathcal{I}(m,n)-m)$. □

定理 10.7 (Canham, 1969)　*设 $\mathcal{K}(m,n)$ 表示平面上 n 条直线的配置所确定的 m 个互异胞腔的最大边数, 则对适当的常数 c, 有*

$$\mathcal{K}(m,n)\leqslant c(m\sqrt{n}+n).$$

证明　设 $\mathcal{C}=\{c_1,\cdots,c_m\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中 n 条直线的配置 $\mathcal{L}=\{\ell_1,\cdots,\ell_n\}$ 所确定的胞腔集. 构作顶点部集为 $V_1=\mathcal{C}$ 与 $V_2=\mathcal{L}$ 的二部图 $G_{m,n}$, 其中 $c_i\ell_j\in E(G_{m,n})$, 当且仅当 c_i 的边界含有 ℓ_j 的线段. 显然, $\mathcal{K}(\mathcal{C},\mathcal{L})=|E(G_{m,n})|$. 容易验证, $K_{2,5}\not\subseteq G_{m,n}$, 其第一部集与第二部集分别包含于 V_1, V_2 (见习题 10.5). 应用定理 9.5, 本定理证毕. □

第 11 章将以上论述与若干新方法相结合, 以确定 $\mathcal{I}(m,n)$ 与 $\mathcal{K}(m,n)$ 的大小的精确的阶.

10.2　空间中的单位距离

现在转而讨论高维空间中的单位距离问题.

定理 10.8 (Erdős, 1960)　*设 $f_3(n)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中 n 个点确定的单位距离可能出现的最大次数, 则*

$$c_1 n^{4/3}\log\log n\leqslant f_3(n)\leqslant c_2 n^{5/3},$$

其中, c_1,c_2 为正值常数.

证明　考虑至多 n 个点所成的点集 P, 这些点形成一个大小为 $\lfloor n^{1/3}\rfloor\times\lfloor n^{1/3}\rfloor\times\lfloor n^{1/3}\rfloor$ 的网格,

$$P=\{(i,j,k)\,|\,1\leqslant i,j,k\leqslant\lfloor n^{1/3}\rfloor\}.$$

对任意一对点 $p=(i,j,k),p'=(i',j',k')\in P$,

$$|p-p'|^2=(i-i')^2+(j-j')^2+(k-k')^2$$

为不超过 $3n^{2/3}$ 的正整数. 因此 P 所确定的互异距离的个数至多为 $3n^{2/3}$. 由此可以推知, 对某常数 $c>0$, 存在一个距离, 其出现次数至少为

$$\binom{|P|}{2}\Big/3n^{2/3}\geqslant cn^{4/3}.$$

按比例调整图形大小, 使得此距离为单位距离, 即得 $f_3(n)\geqslant cn^{4/3}$. 利用更精确的数论推理方法, 沿以上思路即可将下界改进为 $c_1n^{4/3}\log\log n$.

为证上界, 固定 $\mathbb{R}^3$ 中一个 n 点集 P. 用边连接 P 中的两点, 当且仅当该两点的距离为 1, 如此构作的单位距离图 G 不包含 $K_{3,3}$ 为子图. 于是, 由推论 9.7 得 $f_3(n) \leqslant c_2 n^{2-1/3}$. □

令人十分惊奇的是, 对 $d \geqslant 4$ 的情形, $f_d(n)$ 的渐近性态却很容易表述.

定理 10.9 (Erdős, 1967a) 设 $d \geqslant 4$, 则 $\mathbb{R}^d$ 中 n 个点确定的单位距离可能出现的最大次数是

$$f_d(n) = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\lfloor d/2 \rfloor} + o(1)\right).$$

证明 下界可由 Lenz (1955) 的以下构造法确立. 设 $C_1, \cdots, C_{\lfloor d/2 \rfloor}$ 是以 $1/\sqrt{2}$ 为半径, 以 ($\mathbb{R}^d$ 的) 原点为中心的圆, 假设支撑这些圆的平面相互正交. 在 C_i 上取 n_i 个点, 其中 $n_i = \lfloor n/\lfloor d/2 \rfloor \rfloor$ 或 $n_i = \lceil n/\lfloor d/2 \rfloor \rceil$, 使得 $\sum_i n_i = n$ (图 10.4). 显然, 属于不同圆 C_i 的任意两点间的距离为 1. 因此, 这个点集确定的单位距离个数不小于 $T_{\lfloor d/2 \rfloor}(n)$ 中的边数, 其中 $T_{\lfloor d/2 \rfloor}(n)$ 是 n 个顶点的平衡完全 $\lfloor d/2 \rfloor$ 部图. 由此可知

$$f_d(n) \geqslant \left|E\big(T_{\lfloor d/2 \rfloor}(n)\big)\right| = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\lfloor d/2 \rfloor} + o(1)\right)$$

(见习题 9.5).

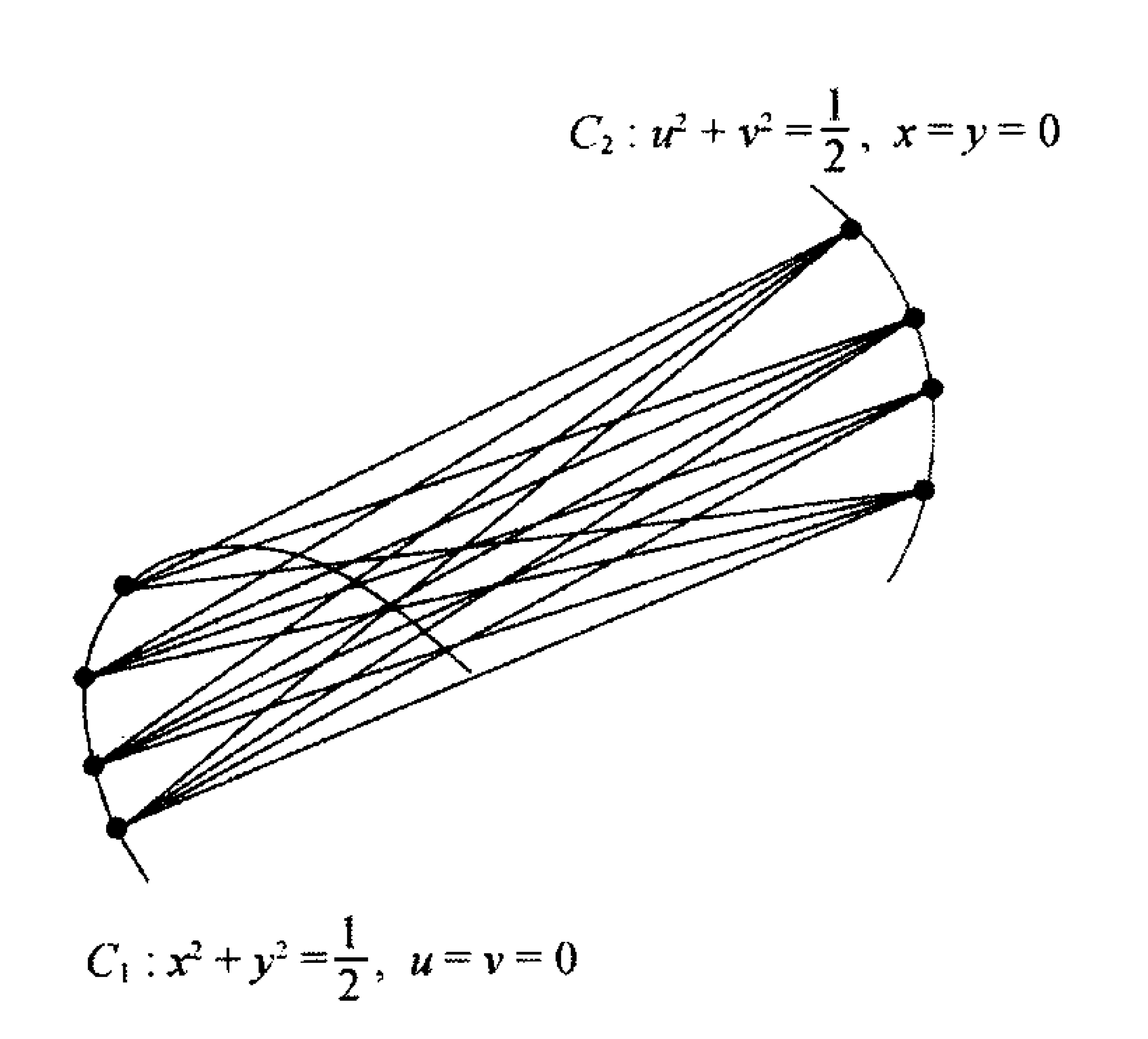


图 10.4 四维空间中的 Lenz 构造法

用反证法证明上界. 设 $P = \{p_1, \cdots, p_n\} \subset \mathbb{R}^d$, G 是以 P 为顶点集的图, 用边连接 p_i, p_j, 当且仅当该两点间的距离为 1. 设 n 充分大, 且对某个 $\varepsilon > 0$, 有

$$|E(G)| \geqslant \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\lfloor d/2 \rfloor} + \varepsilon\right).$$

于是, 由 Erdős-Stone 定理 (定理 9.10), $G \supseteq K_{\underbrace{3,3,\cdots,3}_{\lfloor d/2\rfloor+1}}$, 即 G 包含完全 $(\lfloor d/2\rfloor+1)$ 部图, 其顶点部集 $V_1, V_2, \cdots, V_{\lfloor d/2\rfloor+1}$ 均为三元组.

V_i 中的点不共线, 因为这些点与 V_j $(j \neq i)$ 中任何点等距, 而任何球面不含三个共线的点. 设 Π_i 表示 V_i $(1 \leqslant i \leqslant \lfloor d/2\rfloor+1)$ 的点张成的二维仿射平面. 利用 $i \neq j$ 时 V_i 与 V_j 的点确定的九个距离均为 1 这一事实, 易知 Π_i 与 Π_j 相互正交 (见习题 10.6). 但这样一来, 就推出 $\mathbb{R}^d$ 中存在 $\lfloor d/2\rfloor+1$ 个相互正交的 (二维) 平面, 矛盾. □

10.3 均匀超图

在转而讨论第 9 章中给出的图论方法的下一个应用之前, 先将一些结果推广到 k 均匀超图.

定义 10.10 *k* ***均匀超图*** *H 由一有限顶点集 $V(H)$ 和 $V(H)$ 的 k 元组 (即 k 元子集) 的集合 $E(H)$ 构成. $E(H)$ 中的元素称为 H 的* ***超边*** *(或简称为**边**). 显然, 图可以看成 2 均匀超图. 称 H' 为 H 的* ***子超图***, *如果 $V(H') \subseteq V(H)$ 且 $E(H') \subseteq E(H)$.*

极图理论的基本问题可以推广如下. 给定一个 (所谓的**禁用**) 超图 H', 一个顶点数为 n 的 k 均匀超图若不包含与 H' 同构的子超图, 其可能有的最大超边个数是多少? 遗憾的是, 这方面即便最简单的问题事实上也相当困难 [最近的研究参见文献 (Füredi, 1991a)]. 例如, 设 H' 由一个 4 点集中的所有 3 元组构成. 在其图论定理 (见定理 9.3) 简洁结果的启发下, Turán 猜想在这种情形下顶点数为 n, 不含 H' 的 3 均匀超图的最大边数约为 $\frac{5}{9}\binom{n}{3}$, 下面的超图 H 可使等号成立. 将 $V(H)$ 尽可能平均地划分成三部分 V_0, V_1, V_2. 设一 3 元组属于 $E(H)$, 当且仅当它与所有的 V_i 相交, 或者包含某 V_i 的两个顶点以及 $V_{i+1(\bmod 3)}$ 的一个顶点 (图 10.5). 令

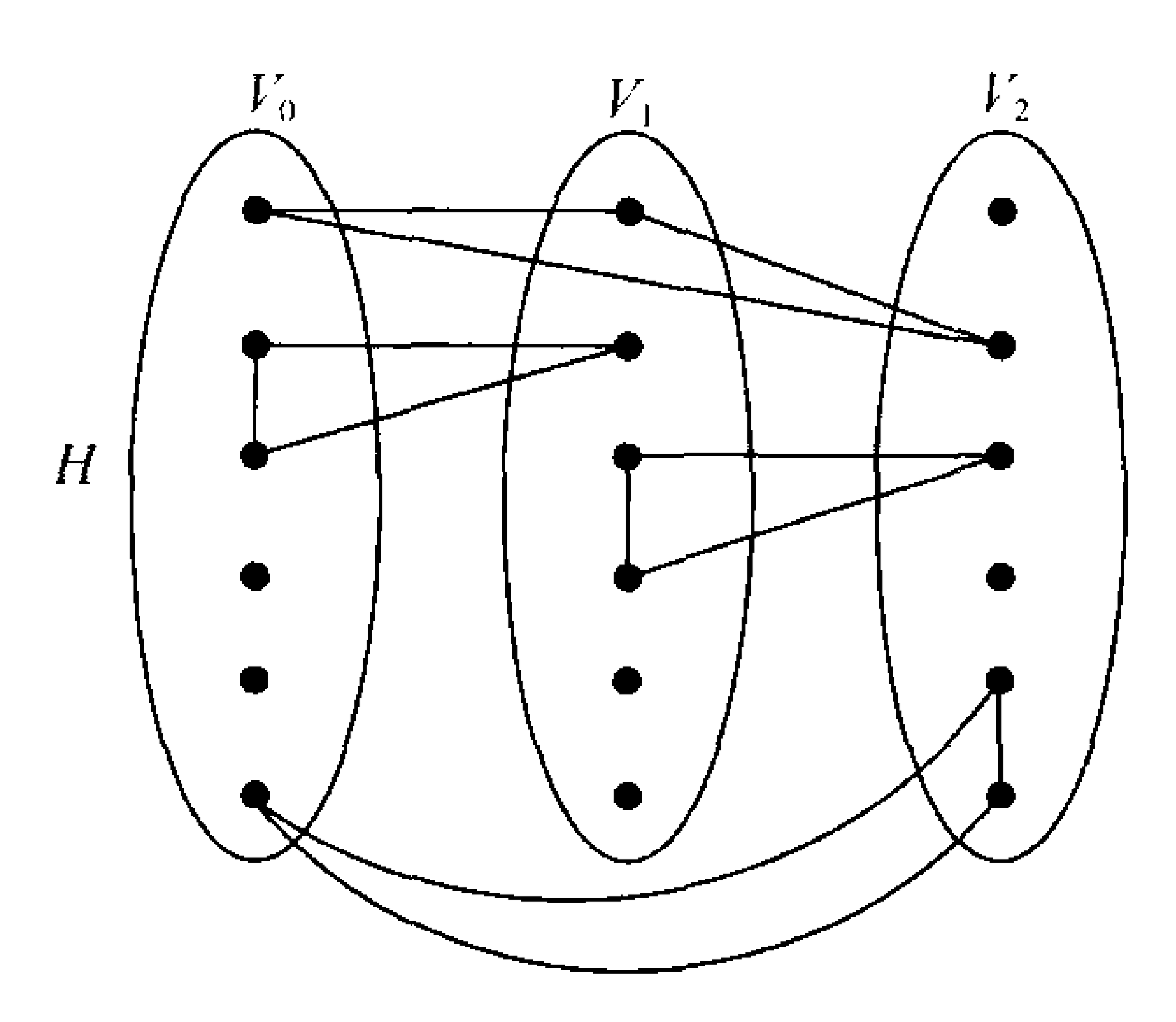


图 10.5　$V(H)$ 中没有 4 元子集包含 $E(H)$ 的 4 个 3 元组

人颇感意外的是, Brown (1983), Todorov (1983) 和 Kostochka (1982) 构造了相当多的不含 H' 的超图, 其顶点数为 n 且有与上面的构造恰好吻合的超边数. 这就表明, 如果 Turán 的猜想正确, 那么其证明会很不容易 (Erdős 提出奖金为 500 美元的悬赏, 征求对此猜想的证明或否定).

然而, 正如 Katona-Nemetz-Siminovits(1964) 指出的那样, 不难给出与均匀超图 Turán问题相关的一些颇有意义的结果.

称图 G 的两两不相邻的顶点的最大个数为 G 的**独立数**, 记为 $\alpha(G)$. 对 G 的补图应用 Turán定理 (定理 9.3) 可得

$$\alpha(G) \geqslant \frac{|V(G)|}{2|E(G)|/|V(G)|+1} = \frac{|V(G)|^2}{2|E(G)|+|V(G)|} \tag{10.1}$$

对每一个图成立. 注意到 $2|E(G)|\ /\ |V(G)|$ 是 G 的顶点的平均度 (见习题 9.6).

给定 k 均匀超图 H, 如果一子集 $A \subseteq V(H)$ 不包含超边, 则称 A 为**独立集**. H 的**独立数** $\alpha(H)$ 即定义为 $V(H)$ 的独立子集大小的最大值.

对 Katona et al.(1964) 的论证加以改进后, Spencer (1972) 将 (10.1) 推广到了 k 均匀超图 (Spencer, 1987, 1990; Erdős Spencer, 1974; Thiele, 1993). 已知的最优界见文献 (de Caen, 1983a, 1983b, 1983c).

定理 10.11 (Spencer, 1972) 设 H 为具有 n 个顶点与 $m \geqslant n/k$ 条边的 k 均匀超图, $\alpha(H)$ 表示 H 的独立数, 则

$$\alpha(H) \geqslant \left(1-\frac{1}{k}\right)\left\lfloor\left(\frac{1}{k}\frac{n^k}{m}\right)^{1/(k-1)}\right\rfloor.$$

证明 H 的每一条超边包含在 $V(H)$ 的 $\binom{n-k}{r-k}$ 个 r 元子集中. 因此, 包含在 $V(H)$ 的随意选出的 r 元子集中的超边的平均 (期望) 个数是

$$\frac{m\binom{n-k}{r-k}}{\binom{n}{r}} \leqslant m\left(\frac{r}{n}\right)^k.$$

设 $0<c<1$ 是一常数, 待稍后确定. 令

$$r = \left\lfloor\left(c\frac{n^k}{m}\right)^{1/(k-1)}\right\rfloor.$$

于是可以选取 H 的 r 元子集 $A \subseteq V(H)$, A 包含 H 的至多 $m(r/n)^k \leqslant cr$ 条超边. 对于包含在 A 中的每一条超边 e, 从 A 中删去 e 的一个顶点. 这样就产生了一个大小至少为 $(1-c)r$ 的独立集 $A' \subseteq A$. 因此, 得到

$$\alpha(H) \geqslant |A'| \geqslant (1-c)\left\lfloor \left(c\frac{n^k}{m}\right)^{1/(k-1)} \right\rfloor .$$

选取 $c = 1/k$, 定理得证. □

在第一步之后, 本来也可选 r 为使得 $m(r/n)^k < 1$ 成立的最大整数, 停止上述论证. 但这样得到的会是一个较弱的界

$$\alpha(H) \geqslant r = \left\lceil \left(\frac{n^k}{m}\right)^{1/k} \right\rceil - 1 .$$

证明第二步用到的巧妙方法通常叫做**删除法**.

运用略有不同的平均法, 可以在 $r = s$ 情形下推广推论 9.7.

设 $K_r^{(k)}$ 表示 k 均匀超图, 其顶点集可划分成 k 个部分 $V(K_r^{(k)}) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$, $|V_i| = r$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 且 $E(K_r^{(k)})$ 是由恰含每个 V_i 中一个点的所有 k 元组构成. 特别地, $K_r^{(2)} = K_{r,r}$, 每个顶点部集中有 r 个顶点的完全二部图.

定理 10.12 (Erdős, 1964c)　*设 $k, r \geqslant 2$ 固定. 则存在整数 $n_0 = n_0(k,r)$, 使得每一个顶点数为 $n \geqslant n_0$ 且超边 (k 元组) 数至少为 $n^{k-1/r^{k-1}}$ 的 k 均匀超图必包含一个同构于 $K_r^{(k)}$ 的子超图.*

证明　对 k 用归纳法. 对于 $k = 2$ 结论成立 (见推论 9.7 和习题 9.17). 假设结论对 k 成立, 往证结论对 $k+1$ 也成立.

设 H 为 $(k+1)$ 均匀超图, 其顶点集为 $V(H) = P$, $|P| = n$, 且假定其超边数 $|E(H)| \geqslant n^{k+1-1/r^k}$.

给定任意 $y \in P$ (任意 k 元组 $X \subseteq P$), 设 $d(y)$ $(D(X))$ 表示 H 中包含 y (X) 的超边数. 对于任意 r 元组 $\{y_1, \cdots, y_r\} \subseteq P$, 令

$$\varphi\Big(\{y_1, \cdots, y_r\}\Big) = \Big|\{X \subseteq P \mid |X| = k, \text{对于所有的} i, \text{ 有} X \cup \{y_i\} \in E(H)\ \}\Big|.$$

同定理 9.5 的证明一样, 将利用下面的事实:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z(z-1)\cdots(z-r+1)}{r!}, & z \geqslant r-1, \\ 0, & z \leqslant r-1 \end{cases}$$

是凸函数.

显然, 如果 n 充分大, 则 φ 的平均值为

$$\frac{\displaystyle\sum_{\{y_1,\cdots,y_r\}\subseteq P} \varphi(\{y_1, \cdots, y_r\})}{\dbinom{n}{r}} = \frac{\displaystyle\sum_{X\subseteq P, |X|=k} \dbinom{D(X)}{r}}{\dbinom{n}{r}}$$

$$\geqslant \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{r}} \cdot f\left(\sum_{X\subseteq P,|X|=k} D(X) \Big/ \binom{n}{k}\right)$$

$$= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{r}} \cdot f\left((k+1)|E(H)| \Big/ \binom{n}{k}\right)$$

$$\geqslant \frac{(n-k+1)^k}{k!n^r}\left(\frac{(k+1)n^{k+1-1/r^k}}{\binom{n}{k}} - r + 1\right)^r$$

$$\geqslant n^{k-1/r^{k-1}}.$$

因此, 可以选取 $y_1, \cdots, y_r$, 使得

$$\varphi(\{y_1, \cdots, y_r\}) \geqslant n^{k-1/r^{k-1}}.$$

由归纳假设, 这就表明在 k 均匀超图 H' 中存在 $K_r^{(k)}$, 其中 H' 的边集

$$E(H') = \left\{X \subseteq P \,\middle|\, |X| = k\,, \text{且对所有的}\, i,\ \text{有} X \cup \{y_i\} \in E(H)\right\}.$$

因此, $H \supseteq K_r^{(k+1)}$. □

还需要引理 9.6 的下面更直接的推广 (见习题 10.7).

引理 10.13 (Erdős, Kleitman, 1968) *任一 k 均匀超图 H 的顶点集能够分解成 k 部分, 使得 H 的含有各部分恰一个点的超边数至少为 $(k!/k^k)|E(H)|$.*

10.4 平面中的近相等距离

本节的目的是推广定理 10.5. 对任意实数 $d_1, \cdots, d_k$, 及任意的最小距离为 1 的 n 点集 $\{p_1, \cdots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$, 欲求点对 p_i, p_j $(i < j)$ 的最大个数, 限定点对中两点的距离与某个 d_l $(1 \leqslant l \leqslant k)$ 近乎相等.

定理 10.14 (Erdős, Makai, Pach, 1993) *对任意自然数 k 及任意 $\varDelta, \varepsilon > 0$, 存在整数 $n_0 = n_0(k, \varDelta, \varepsilon)$ 满足下列条件: 对任意最小距离至少为 1 的 $n \geqslant n_0$ 个点的集合 $P = \{p_1, \cdots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ 及任意实数 $d_1, \cdots, d_k \geqslant 1$, 使得*

$$|p_i - p_j| \in \bigcup_{l=1}^{k} [d_l, d_l + \varDelta]$$

成立的点对 p_i, p_j $(i < j)$ 的个数至多为

$$\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{k+1}+\varepsilon\right).$$

为了证明这一上界是渐近紧的, 令

$$P=\left\{(in^2,j)\mid 0\leqslant i\leqslant k, 1\leqslant j\leqslant \frac{n}{k+1}\right\}.$$

注意到, 对于某值 $1\leqslant l\leqslant k$, x 坐标不同的任意两点的距离近乎等于 ln^2. 因此, 存在至少 $(n^2/2)[1-1/(k+1)]$ 个点对, 它们的距离属于区间 $[d_l, d_l+1]$ $(1\leqslant l\leqslant k)$ 的并.

对 k 用归纳法证明.

当 $k=1$ 时结论成立 (见定理 10.5). 下面假设 $k\geqslant 2$, 且对 $k-1$ 结论正确.

固定一最小距离至少为 1 的点集 $P=\{p_1,\cdots,p_n\}\subseteq\mathbb{R}^2$, 并假设存在数 $d_1,\cdots,d_k\geqslant 1$, 使得满足

$$|p_i-p_j|\in\bigcup_{l=1}^{k}[d_l, d_l+\varDelta]$$

的点对 p_i, p_j $(i<j)$ 的个数大于 $(n^2/2)(1-1/(k+1)+\varepsilon)$. 我们要证明, 由此可推出矛盾, 只要 $\varDelta>1$, $k,\varepsilon>0$, 而且相对于 $\varDelta, k$ 和 ε 而言 n 充分大.

断言 A　如果 n 充分大, 则

$$\min_{1\leqslant l\leqslant k} d_l\geqslant\frac{1}{10^3k^2\varDelta}n.$$

证明　例如, 假设 d_k 小于上面的界. 对任意 p_i, 满足 $|p_i-p_j|\in[d_k, d_k+\varDelta]$ 的点 p_j 的个数至多为 $100\varDelta(d_k+\varDelta)$. 因此, 满足

$$|p_i-p_j|\in\bigcup_{l=1}^{k-1}[d_l, d_l+\varDelta]$$

的点对 p_i, p_j $(i<j)$ 的个数大于

$$\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{k+1}+\varepsilon\right)-\frac{n}{2}100\varDelta(d_k+\varDelta)>\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{k}+\varepsilon\right),$$

与归纳假设矛盾.　□

这一证明的组合论核心在于下面的结果.

断言 B　存在一趋于 ∞ 的函数 $m(n)$, 从而可以选取具有下列性质的不交的 $m(n)$ 元子集 $P_i\subseteq P$ $(1\leqslant i\leqslant k+2)$: 对任意 $1\leqslant i<j\leqslant k+2$, 存在 $1\leqslant l(i,j)\leqslant k$, 使得

$$|p_i-p_j|\in[d_{l(i,j)}, d_{l(i,j)}+\varDelta]$$

对所有 $p_i \in P_i, p_j \in P_j$ 成立.

证明 设 G 表示顶点集为 P 的图, 其中两顶点以边相连, 当且仅当它们的距离属于 $\bigcup_{l=1}^{k}[d_l, d_l+\Delta]$. 由推论 9.18, 我们发现对某 $\varepsilon'>0$ (依赖于 ε 和 k, 但不依赖于 n), G 包含至少 $\varepsilon' n^{k+2}$ 个顶点数为 $k+2$ 的完全子图. 由引理 10.13, $V(G)=P$ 可以划分成 $k+2$ 部分 $P_1^0, \cdots, P_{k+2}^0$, 使得能导出 G 的完全子图的 $(k+2)$ 元组 $(p_1, \cdots, p_{k+2})$, $p_i \in P_i^0\,(1 \leqslant i \leqslant k+2)$ 的个数至少为

$$\frac{(k+2)!}{(k+2)^{k+2}}\varepsilon' n^{k+2} = \varepsilon'' n^{k+2}.$$

对任意这样的 $(k+2)$ 元组 $(p_1, \cdots, p_{k+2})$, 可以选择整数 $1 \leqslant l(i,j) \leqslant k$, $1 \leqslant i < j \leqslant k+2$, 使得 $|p_i - p_j| \in [d_{l(i,j)}, d_{l(i,j)}+\Delta]$. 这里称三角阵

$$\begin{pmatrix} l(1,2) & l(1,3) & \cdots & l(1,k+2) \\ 0 & l(2,3) & \cdots & l(2,k+2) \\ 0 & 0 & \cdots & l(3,k+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l(k+1,k+2) \end{pmatrix}$$

属 $(p_1, \cdots, p_{k+2})$ **类型**. 既然不同类型的个数至多为 $k^{\binom{k+2}{2}}$, 故 G 中存在至少 $\varepsilon'' n^{k+2}/k^{\binom{k+2}{2}} = \varepsilon^* n^{k+2}$ 个完全子图, 它们的顶点集属于同一类型. 由定理 10.12 断言 B 成立. □

下面来分析断言 B 中所描述的点集 P_i 的相对位置. 例如考虑两个集合 P_1 和 P_2, 假设它们之间所有点的距离属于区间 $[d_1, d_1+\Delta]$, 即 $l(1,2)=1$. 对任意 $p, p' \in P_1$, P_2 中所有的元一定落在以 p 和 p' 为中心的两个圆环的交中. 如果 $|p-p'| < 2d_1$, 则这个交集的面积至多为

$$\frac{20 d_1^2 \Delta^2}{|p-p'|\sqrt{(2d_1)^2 - |p-p'|^2}},$$

而且有

$$m(n) = |P_2| \leqslant \frac{50 d_1^2 \Delta^2}{|p-p'|\sqrt{(2d_1)^2 - |p-p'|^2}}.$$

这就表明 $|p-p'| \;/\; d_1$ 接近于 0 或 2. 更确切地说, 如果 n 充分大, 则对任意 $p, p' \in P_1$, 有

$$|p-p'| \in \left[1, \frac{50\Delta^2}{m(n)} d_1\right] \cup \left[\left(2 - \frac{50\Delta^2}{m(n)}\right) d_1,\, 2d_1 + 2\Delta\right].$$

现任取点 $q \in P_2$. P_1 必被完全包含在以 q 为中心的圆环中, 其内外半径分别为 d_1 和 $d_1 + \Delta$. 因此, 如果存在两点 $p, p' \in P_1$ 满足

$$|p - p'| \geqslant \left(2 - \frac{50\Delta^2}{m(n)}\right) d_1 ,$$

那么 P_1 中所有其他的点必落在以 p 和 p' 为圆心, $(50\Delta^2/m(n))d_1$ 为半径的两个圆盘的并中. 在任何情况下, 存在一大小至少为 $m(n)/2$ 的子集 $Q_1 \subseteq P_1$, 其直径

$$\operatorname{diam} Q_1 \leqslant \frac{50\Delta^2}{m(n)} d_1 = o(1) d_1 . \tag{10.2}$$

[按惯例, $o(1)$ 表示 n 的函数, 当 n 趋于无穷时趋于 0.]

重复上述论证即得下面的结果.

断言 C 设 $l(i,j) = l(j,i)$, $i \neq j$ 的定义与断言 B 中的定义相同. 则存在两两不交的子集 $Q_i \subseteq P_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k+2)$, 每一个的大小至少为 $m(n)/2$, 并满足下列条件:

(i) 对任意 $1 \leqslant i \leqslant k+2$,

$$\operatorname{diam} Q_i \leqslant o(1) \min_{j \neq i} d_{l(i,j)};$$

(ii) 存在一条直线 ℓ, 使得 ℓ 与任意直线 $p_i p_j$ $(p_i \in Q_i, p_j \in Q_j,\ i \neq j)$ 的夹角为 $o(1)$.

证明 只须证明 (ii). 固定两个子集 Q_i 和 Q_j $(i \neq j)$. 由 (i),

$$\max(\operatorname{diam} Q_i, \operatorname{diam} Q_j) \leqslant o(1) d_{l(i,j)} ,$$

因此两直线 $p_i p_j$ 和 $p_i' p_j'$ $(p_i, p_i' \in Q_i,\ p_j, p_j' \in Q_j)$ 的夹角为 $o(1)$.

设 q_i 和 q_i' 为 Q_i 中的两个元素, 它们的距离最大. 根据 Q_i 中任意两点的距离至少为 1 这个事实, 得到

$$\frac{\sqrt{m(n)}}{10} \leqslant |q_i - q_i'| .$$

下面只要证明对任意 $p_j \in Q_j$, 直线 $q_i q_i'$ 和 $q_i p_j$ 几乎垂直即可. 事实上, 若令 α 表示角 $q_i' q_i p_j$, 则由余弦定理,

$$\begin{aligned} |\cos\alpha| &= \left| \frac{(|q_i - p_j| - |q_i' - p_j|)(|q_i - p_j| + |q_i' - p_j|) + |q_i - q_i'|^2}{2|q_i - p_j||q_i - q_i'|} \right| \\ &\leqslant \frac{\Delta 2(d_{l(i,j)} + \Delta)}{2d_{l(i,j)}(\sqrt{m(n)}/10)} + \frac{|q_i - q_i'|}{2d_{l(i,j)}} \leqslant o(1). \end{aligned}$$

□

断言 D 设 $3 \leqslant h \leqslant k+2$ 固定, 假定对 $p_1 \in Q_1$, $p_2 \in Q_2$ 有

$$\operatorname{diam}(Q_1 \cup \cdots \cup Q_h) = |p_1 - p_2|,$$

则对任意 $1 \leqslant i \neq j \leqslant h$ 有 $l(i,j) = l(1,2)$, 当且仅当 $\{i,j\} = \{1,2\}$.

证明 反证法, 假设对 $2 \leqslant i \neq j \leqslant h$ 存在两点 $p_i' \in Q_i, p_j' \in Q_j$ 满足

$$|p_i' - p_j'| \in [d_{l(1,2)}, d_{l(1,2)} + \Delta].$$

由断言 A 和断言 C, $Q_2 \cup \cdots \cup Q_h$ 中的所有点落在以 p_1 为心的圆环的一小扇形内 [角度为 $o(1)$], 该圆环的内外半径分别为 $n/(2\times 10^3 k^2 \Delta)$ 和 $|p_1 - p_2|$ (图 10.6). 显然, 这个扇形的直径为 $|u-v|$, 其中 u (v) 是一 (另一) 边界射线与圆环的内 (外) 圆的交点. 令 β 表示角 up_1v. 这样一来, 如果 n 充分大, 就有

$$\begin{aligned}
|p_1 - p_2| - |p_i' - p_j'| &\geqslant |p_1 - p_2| - |u - v| \\
&= |p_1 - v| - |u - v| \\
&= \frac{2|p_1 - u||p_1 - v|\cos\beta - |p_1 - u|^2}{|p_1 - v| + |u - v|} \\
&\geqslant |p_1 - u|\cos\beta - \frac{|p_1 - u|}{2} \\
&\geqslant \frac{n}{10^3 k^2 \Delta}\left(\frac{1}{2} - o(1)\right) > \Delta,
\end{aligned}$$

矛盾. □

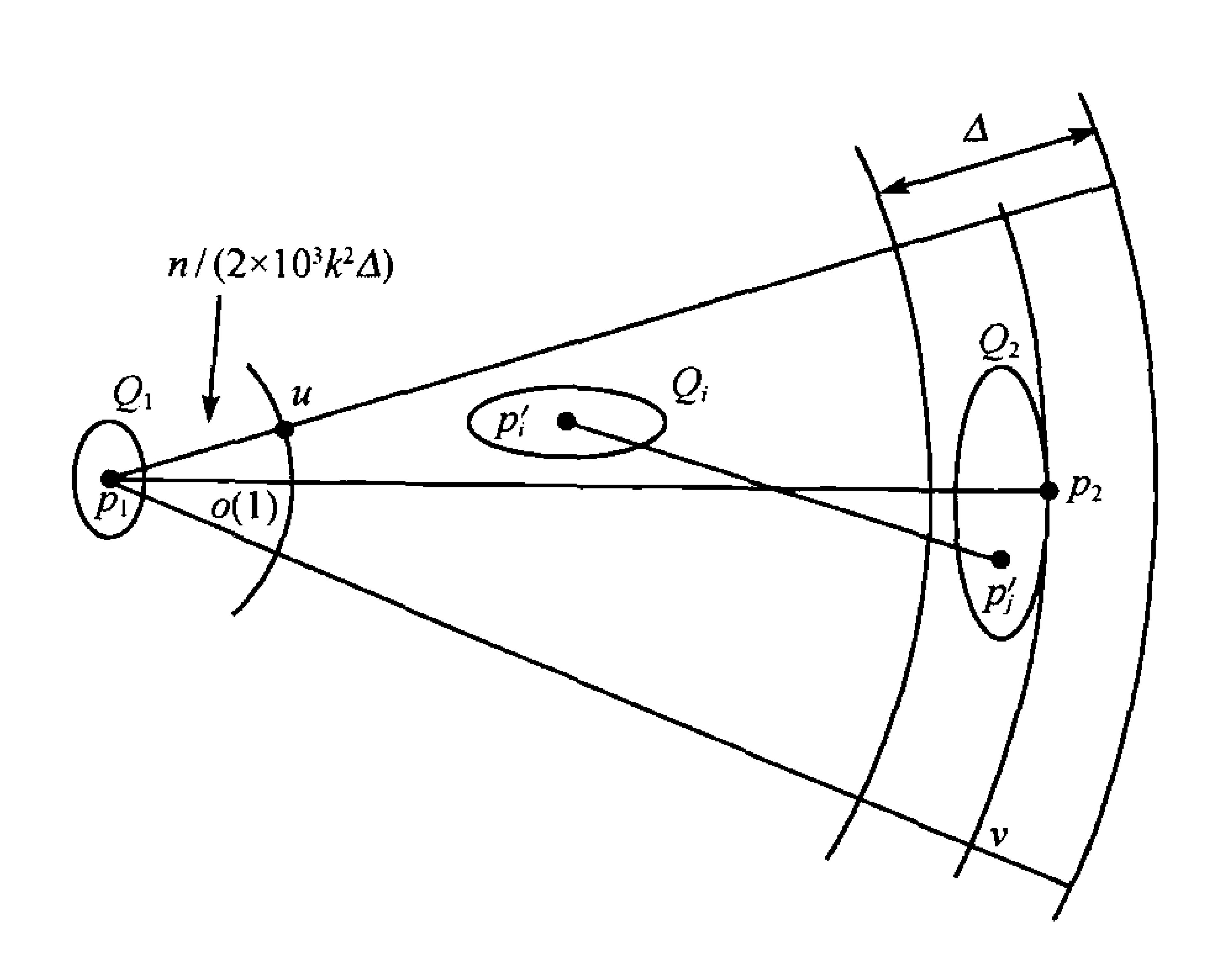


图 10.6 断言 C($j=2$) 图示

现在可以很容易地完成定理 10.14 的证明. 不失一般性, 假设 Q_1 的一点与 Q_{j_1}, $j_1 > 1$, 的一点的距离达到 $Q = Q_1 \cup \cdots \cup Q_{k+2}$ 的直径. 由断言 D, 集合 $Q' = Q_2 \cup \cdots \cup Q_{k+2}$ 确定的所有距离都不属于区间 $[d_{l(1,j_1)}, d_{l(1,j_1)} + \varDelta]$. 假设 Q_2 的一点与 Q_{j_2}, $j_2 > 2$, 的一点的距离达到 Q' 的直径. 再次利用断言 D 即知, 集合 $Q'' = Q_3 \cup \cdots \cup Q_{k+2}$ 确定的所有距离均不属于区间 $[d_{l(2,j_2)}, d_{l(2,j_2)} + \varDelta]$, 其中 $l(2,j_2) \neq l(1,j_1)$. 如此进行下去, 即可断定, 由集合 $Q_{k+1} \cup Q_{k+2}$ 确定的所有距离均不属于

$$\bigcup_{i=1}^{k} [d_{l(i,j_i)}, d_{l(i,j_i)} + \varDelta],$$

其中 $\{l(i,j_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant k\} = \{1, \cdots, k\}$. 换句话说, 不存在满足断言 B 的整数 $l(k+1,k+2)$, 矛盾. 定理 10.14 证毕.

进一步分析上述证明可以看出, 对于适当的常数 $b > 0, m(n) = \lfloor b(\log n)^{1/(k+1)} \rfloor$ 时断言 B 成立, 而且如果 $\varDelta = \varDelta(n)$ 是 n 的一个满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varDelta(n)}{\sqrt{m(n)}} = 0$$

的缓慢增长的函数, 则整个证明过程即可通过 [(10.2) 式用到这个条件].

注意到, 上面的证明中实际上没有用到下述事实: P_i 与 P_j $(i < j)$ 之间**所有的**距离属于区间 $[d_{l(i,j)}, d_{l(i,j)} + \varDelta]$. 只要**许多**距离有此性质, 且有许多较大的子集 $P_i \subseteq P$ $(1 \leqslant i \leqslant k+2)$ 满足这一较弱的条件就足够了. 事实上, 这些集合的大小可以选为 $m(n) = \lfloor b^* n \rfloor$, 且对于某些 $c, c^* > 0$, 定理 10.14 对任何函数

$$\varDelta(n) \leqslant c\sqrt{n} \leqslant c^* \sqrt{m(n)}$$

成立. 这个较强结果的证明用到 Szemerédi正则性引理 (定理 9.16)和引理 9.17, 留给读者 (见习题 10.10).

Pach, Radoičić, Vondrák(2006a, 2006b) 也利用 Szemerédi 正则性引理推导出高维空间中一些与定理 10.5 类似的结果.

10.5　集合的小子集所确定的互异距离

给定一有限集 $P \subset \mathbb{R}^d$, 设 $\varDelta(P)$ 表示 P 确定的互异距离数. 下面的问题是 Erdős, Purdy(1971) 提出的. 试确定具有下列性质的最大数 $h_d(k) = h$: 任意 n 点集 $P \subset \mathbb{R}^d$ 的几乎所有的 k 元子集确定至少 h 个互异距离, 即对于一固定 k, 当 n 趋于无穷时

$$\min_{\substack{|P| \subset \mathbb{R}^d \\ |P|=n}} \frac{|\{P_k \subseteq P \mid |P_k| = k, \text{且}\ \varDelta(P_k) \geqslant h\}|}{\binom{n}{k}} \longrightarrow 1.$$

不难看出 $h_1(k)=h_2(k)=\binom{k}{2}$, 即平面集的几乎所有的 k 元组处于"一般位置"(见习题 10.8).

前已指出, $T_s(n)$ 表示顶点数为 n 的平衡完全 s 部图,

$$|E(T_s(n))|=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{s}\Big)(n^2-t^2)+\binom{t}{2},$$

其中 t 是 s 整除 n 的余数 (见定理 9.3 和习题 9.5). $T_s(n)$ 的顶点被分成 s 个大小为 $\lfloor n/s\rfloor$ 或 $\lceil n/s\rceil$ 的几乎相等的部集.

定理 10.15 (Avis, Erdős, Pach, 1991) 令 $n\to\infty$, $k,d\geqslant 3$ 固定. 设最大数 $h_d(k)=h$ 具有如下性质: $\mathbb{R}^d$ 中任意 n 点集的几乎所有 k 元子集确定至少 h 个互异距离, 则 $h_d(k)$ 可以表示成

$$h_d(k)=\binom{k}{2}-|E(T_s(k))|+\begin{cases}\lfloor k/2\rfloor, & d=3,\\ \lfloor k/s\rfloor+1, & d>3\text{ 是奇数},\\ 1, & d\text{ 是偶数},\end{cases}$$

其中 $s=\lceil d/2\rceil$.

证明 $h_d(k)$ 的上界可由下面的构造得到, 此构造与 d 为偶数时 Lenz 的例子一致.

如果 d 是偶数, 则对任意给定的较大的值 n, 将 n 个点尽可能均匀地分配到 $s=d/2$ 个相互正交且半径和圆心都相同的圆上, 使得每一个圆包含或 $\lfloor n/s\rfloor$ 个点或 $\lceil n/s\rceil$ 个点. 容易看出, 此集的所有 $\binom{n}{k}$ 个 k 元组的一个固定的正比例部分也尽可能均匀地分布在 s 个圆上. 而每一个这样的 k 元组 P_k 确定

$$\varDelta(P_k)\leqslant\binom{k}{2}-|E(T_s(k))|+1$$

个互异距离.

如果 d 是奇数, 则将 n 个点尽可能均匀地分配到 $s-1=\lfloor d/2\rfloor$ 个相互正交且半径和圆心都相同的圆以及过圆心垂直这些圆的直线上 (图 10.7). 所有 k 元组 P_k 的一个正比例部分满足下列两个条件:

1. P_k 被尽可能均匀地分布在所作直线和 $s-1$ 个圆上;
2. 所作直线包含 P_k 的 $\lfloor k/s\rfloor$ 个点.

显然, 对任意这样的 k 元组 P_k, 有

$$\varDelta(P_k)\leqslant\binom{k}{2}-|E(T_s(k))|+\lfloor k/s\rfloor+\begin{cases}0, & d=3,\\ 1, & d\geqslant 5.\end{cases}$$

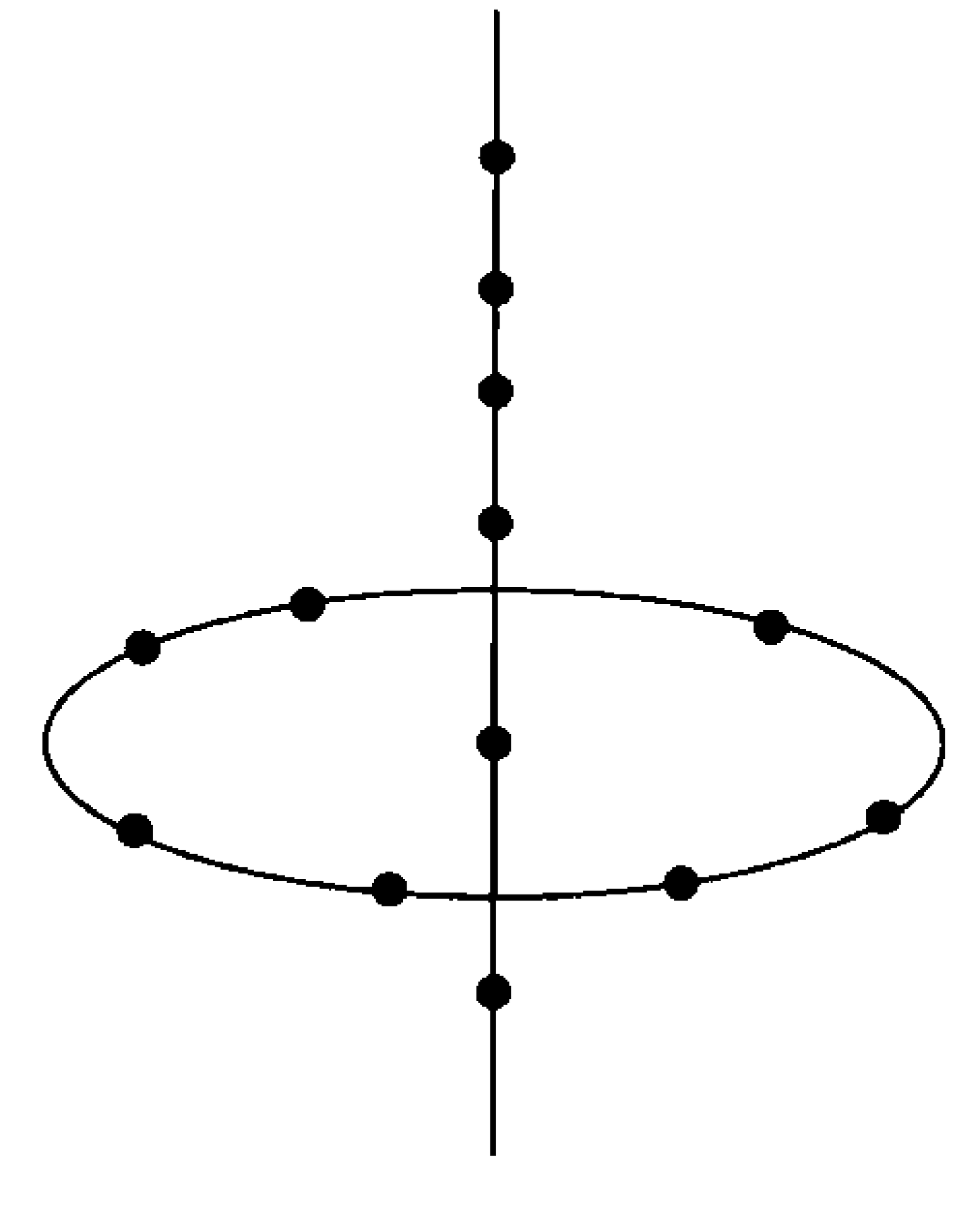


图 10.7　$h_3(k)$ 的下界

用反证法来确立下界. 证明的思想与前一节相同. 令 $d,k \geqslant 3$ 固定. 不考虑平凡情形, 设 $k \geqslant s$. 假定结论不成立, 即存在一正数 ε, 使得对无限多的 n 值, 可找到一 n 点集 $P \subset \mathbb{R}^d$, P 的至少 εn^k 个 k 元组确定至多 h^* 个互异距离, 其中 h^* 小于定理中给定的界.

设 H 表示这些 k 元组的集合. 即 H 是一 k 均匀超图, $|V(H)| = |P| = n$, $|E(H)| = \varepsilon n^k$. 由引理 10.13, 可以将 $V(H) = P$ 划分成 k 个不交部分 $V_1, \cdots, V_k$, 使得至少 $(k!/k^k)|E(H)| \geqslant \varepsilon' n^k$ 条超边与每个 V_i 交于恰好一个点. 令 H' 表示由这些超边构成的 H 的子超图.

给定两条超边 $E=\{p_1, \cdots, p_k\}$, $E'=\{p_1', \cdots, p_k'\} \in E(H')$, 其中 $p_i, p_i' \in V_i$, 如果对于所有的 i,j,g,h, 有

$$|p_i - p_j| = |p_g - p_h| \iff |p_i' - p_j'| = |p_g' - p_h'|,$$

则称它们属于相同的 **类型**. 显然不同类型的个数至多为 $\binom{k}{2}^{\binom{k}{2}}$, 因此存在超图 $H^* \subseteq H'$ 满足

$$|E(H^*)| \geqslant \frac{\varepsilon'}{\binom{k}{2}^{\binom{k}{2}}} n^k = \varepsilon^* n^k,$$

使得 H^* 的任意两条超边属于同一类型.

如果 n 充分大, 则可以利用定理 10.12 推导出 $H^* \supseteq K_3^{(k)}$. 设 $T_1 \subseteq V_1, \cdots, T_k \subseteq V_k$ 表示 $K_3^{(k)}$ 的顶点部集, 对所有的 i, 有 $|T_i| = 3$. 显然, 对任意 $p_i \in T_i$ 有 $\Delta(\{p_1, \cdots, p_k\}) \leqslant h^*$. 但按下一个引理有 $\Delta(\{p_1, \cdots, p_k\}) > h^*$, 矛盾. □

引理 10.16　设 $T_1, \cdots, T_k (k \geqslant 2)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的点构成的三元组, 对 $p_i \in T_i$ $(i = 1, \cdots, k)$ 的每一选择, $\{p_1, \cdots, p_k\}$ 属于同一类型. 则 $\Delta(\{p_1, \cdots, p_k\})$ 不依赖于 $p_i \in T_i$ 的选择. 令 $\Delta(T_1, \cdots, T_k) = \Delta(\{p_1, \cdots, p_k\})$, 有

$$\Delta(T_1, \cdots, T_k) \geqslant \binom{k}{2} - |E(T_s(k))| + \begin{cases} \lfloor k/2 \rfloor, & d = 3, \\ \lfloor k/s \rfloor + 1, & d > 3 \text{ 是奇数}, \\ 1, & d \text{ 是偶数}, \end{cases}$$

其中 $s = \lceil d/2 \rceil$.

证明　对 k 用归纳法证明. 对于 $k \leqslant s - 1$, 无须证明. 设 $k \geqslant s$, 且对所有 $k' < k$ 引理成立.

按如下方式定义一个顶点集为 $V(G)=\{T_1,\cdots,T_k\}$ 的边着色图 G. 选取一点 $p_i\in T_i$, $1\leqslant i\leqslant k$. 设 $T_iT_j\in E(G)$, 当且仅当存在 $\{g,h\}\neq\{i,j\}$, 使得

$$|p_i-p_j|=|p_g-p_h| \tag{10.3}$$

(注意这种情形下 T_gT_h 也是 G 的边). 此外, 令两条边 $T_iT_j,T_gT_h\in E(G)$ 的着色相同, 当且仅当 (10.3) 成立. 根据假设, 上述定义与代表 T_i 的点 p_i 的选取无关. 于是有

$$\Delta(T_1,\cdots,T_k)=\binom{k}{2}-|E(G)|+(G \text{ 的边着色数}).$$

如果顶点 $T_i\in V(G)$ 的 3 个点共线, 则称 T_i 为**线性的**, 否则, 即 T_i 的 3 点确定一个圆 C_i 时, 称 T_i 为**圆形的**.

设 T_iT_j 和 T_gT_h 是 G 的具有同一颜色的两条边. 容易验证 (见习题 10.6),

(i) 如果 i,j,g,h 互异, 则 T_i 和 T_j 是圆形的, 且落在正交的 2 平面中;

(ii) 如果 i,j,g 互异且 $h=j$, 则 T_i,T_g 是圆形的, 且由 T_j 张成的 2 平面或直线与由 T_i 和 T_g 张成的 2 平面正交.

这就表明 G 具有下面的重要性质:

(1) $G\not\supseteq K_{s+1}$;

(2) 如果 d 是奇数, 则 G 不包含同构于 K_s 的子图, 其中 K_s 的所有顶点为圆形的;

(3) 如果 T_i 是线性的, 则具有给定颜色的所有边或者均与 T_i 关联, 或者均不与 T_i 关联.

现在已可证明引理.

如果 d 是偶数, 则由 (1) 可以利用 Turán 定理 (见定理 9.3) 推导出 $|E(G)|\leqslant|E(T_s(k))|$. 因此,

$$\begin{aligned}\Delta(T_1,\cdots,T_k)&=\binom{k}{2}-|E(G)|+(G \text{ 的边着色数})\\&\geqslant\binom{k}{2}-|E(T_s(k))|+1,\end{aligned}$$

于是引理成立.

类似地, 如果 $d\geqslant 5$ 是奇数且 $G\not\supseteq K_s$, 则

$$\begin{aligned}\Delta(T_1,\cdots,T_k)&\geqslant\binom{k}{2}-|E(T_{s-1}(k))|+1\\&\geqslant\binom{k}{2}-|E(T_s(k))|+\left\lfloor\frac{k}{s}\right\rfloor+1,\end{aligned}$$

结论成立 (见习题 10.9).

最后, 假设 d 是奇数, 且设 $T_1, \cdots, T_s$ 导出 G 的一完全子图. 由 (2), 可以假设 T_1 是一线性顶点. 则由 (3), 存在一种颜色, 如红色, 使得所有的红边与 T_1 关联. 如果 $k=s$, 则引理成立. 如果 $k=s+1$, 则

$$\Delta(T_1, \cdots, T_{s+1}) \geqslant \Delta(T_2, \cdots, T_{s+1})+1,$$

由归纳假设即得引理.

设 $k \geqslant s+2$. 由于 $G \nsupseteq K_{s+1}$, $G-\{T_1, \cdots, T_s\}$ 的 $k-s \geqslant 2$ 个顶点中的每一个必与至少一个 T_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, 不相邻.

设 G' 表示上面所描述的与三元组族 $\{T_{s+1}, \cdots, T_k\}$ 相关的边着色图. 记 G 的补图为 $\bar{G}$, 有

$$\begin{aligned}\binom{k}{2}-|E(G)| &= |E(\bar{G})| \\ &\geqslant |E(\bar{G}')|+k-s \\ &= \binom{k-s}{2}-|E(G')|+k-s,\end{aligned}$$

$$(G \text{ 的边着色数}) \geqslant (G' \text{ 的边着色数})+1 .$$

因此, 对 $\Delta(T_{s+1}, \cdots, T_k)$ 用归纳假设, 得到

$$\begin{aligned}\Delta(T_1, \cdots, T_k) &= \binom{k}{2}-|E(G)|+(\ G \text{ 的边着色数}) \\ &\geqslant \binom{k-s}{2}-|E(G')|+k-s+(G' \text{ 的边着色数})+1 \\ &= \Delta(T_{s+1}, \cdots, T_k)+k-s+1 \\ &\geqslant \binom{k-s}{2}-|E(T_s(k-s))|+k-s+1 \\ &\quad +\begin{cases}\left\lfloor \dfrac{(k-2)}{2} \right\rfloor, & d=3, \\ \left\lfloor \dfrac{(k-s)}{s} \right\rfloor+1, & d \geqslant 5 \text{ 是奇数}\end{cases} \\ &= \binom{k}{2}-|E(T_s(k))|+\begin{cases}\left\lfloor \dfrac{k}{2} \right\rfloor, & d=3, \\ \left\lfloor \dfrac{k}{s} \right\rfloor+1, & d \geqslant 5 \text{ 是奇数}.\end{cases}\end{aligned}$$

引理证毕, 从而定理也证毕. □

习 题

10.1 (i) 证明不可能从 $\mathbb{R}^d$ 中选取超过 $d+1$ 个点, 使得这些点中任意两点的距离均为 1;

(ii) 设 $d, k \geqslant 2$ 固定. 能否从 $\mathbb{R}^d$ 中选取任意多个点, 使得它们确定至多 k 个互异距离?

10.2 (Anning, Erdős, 1945; Erdős, 1945; Müller, 1953)

(i) 设 P 为平面上无限多个点构成的集合, P 中的点确定的所有互异距离均为整数. 证明 P 中的所有点共线;

(ii) 试求平面中无限多个不全在同一直线上的点构成的集合, 使得它们所确定的所有距离均为有理数;

(iii) 证明对任意 $n \geqslant 3$, 存在平面中不全在同一直线上的 n 个点, 这 n 个点确定的所有距离均为整数.

10.3 证明一条直线上的 n 个点所确定的单位距离至多出现 $n-1$ 次; 恰好出现 $n-1$ 次, 当且仅当这些点在数轴上构成一长为 n 公差为 1 的等差数列.

10.4 (Erdős, Makai et al., 1991) 给定 $t>0$, 以及 $\mathbb{R}^d$ 中最小距离至少为 1 的 n 个点 $p_1, \cdots, p_n$. 则如果 n 充分大, 距离在 t 和 $t+1$ 之间的点对 p_i, p_j, $i<j$, 的个数不超过 $|E(T_d(n))|$. 而且, 对所有的 n 和 $t>t_0(n)$ 此界可达. [$T_d(n)$ 表示 n 个顶点的平衡完全 d 部图.]

10.5 给定平面中 n 条直线 $\ell_1, \cdots, \ell_n$ 构成的集合, $\mathbb{R}^2 - \bigcup_{i=1}^{n} \ell_i$ 的连通分支叫做胞腔. 证明: 对任意一对胞腔 c, c', 存在至多 4 条直线 ℓ_i, 使得 c 和 c' 的边界上各包含 ℓ_i 的一部分.

10.6 证明: 如果 $\{p_1, p_2, p_3\}$, $\{q_1, q_2, q_3\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的两个三元组, 对所有的 $1 \leqslant i, j \leqslant 3$ 有 $|p_i - q_j| = 1$, 则 p_i $(i=1,2,3)$ 导出一个圆 C, q_j $(j=1,2,3)$ 导出一个圆 C', 使得包含 C 和 C' 的仿射 2 平面正交.

10.7 (Erdős, 1964c) 证明任意 k 均匀超图 H 的顶点集可以分解成 k 部分, 使得 H 的恰好包含每一部分各一个点的 k 元组的个数至少为 $(k!/k^k)|E(H)|$.

10.8 (i) 证明平面中 n 点集确定的等腰三角形的个数为 $o(n^3)$;

(ii) 设 k 固定, $n \to \infty$. 证明平面中的任意 n 点集的几乎所有的 k 元子集均处于一般位置, 意即 k 元子集中的点确定的 $\binom{k}{2}$ 个距离是互异的.

10.9 设 $T_s(k)$ 表示 k 个顶点的平衡完全 s 部图. 证明对任意正整数 k, s, 有

$$|E(T_s(k))| \geqslant |E(T_{s-1}(k))| + \lfloor k/s \rfloor .$$

10.10 (Erdős, Makai et al., 1993) 证明: 对任意正整数 k 及任意 $\varepsilon > 0$, 存在具

有下列性质的 $n_0 = n_0(k, \varepsilon)$, $c = c(k, \varepsilon) > 0$: 对平面中的任意 n 点集 $(n \geqslant n_0)$, 任意 $d_1, \cdots, d_k \geqslant 1$, 及某个值 l, 距离在 d_l 与 $d_l + c\sqrt{n}$ 之间的点对的个数至多为

$$\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{k+1} + \varepsilon\right).$$

10.11　由推论 9.18, 定理 10.12 和引理 10.13 推导 Erdős-Stone 定理 (见定理 9.10).

第 11 章　直线的配置

19 世纪, Sylvester (1893) 在《教育时报》(*Educational Times*) 上提出如下问题:"证明不可能在平面上安排有限个点, 使得每一条过其中两点的直线都过第三个点, 除非这些点全在同一直线上". 这一问题长期未得到解决, 直到 1933 年由 Erdős 独立提出, 随后很快由 Gallai 解决 [其他相关解法和推广参见文献 (Erdős, 1943, 1982; Melchior, 1940; Coxeter, 1948, 1969; Dirac, 1951; Kelly et al., 1958; Csima et al., 1993, 1995)]. 几十年前, Erdős 和 Gallai 开始提出一些甚至欧几里德也会理解和欣赏的问题, 他们激发了人们对几何学中一些最初等的概念的重新关注. 欧氏平面和射影平面中点与直线之间的关联关系作为组合论研究的对象焕发了新的生机. Gallai 定理以一种新的代数风格丰富了组合数学, 对组合设计理论的发展作出了许多贡献.

注意到在 Fano 平面$PG(2,2)$ 中, 如图 9.4 所示, 每条连接两点的直线都过第三点. 因此, 由 Gallai 定理可知, 不可能仅仅用直线重新画出该图形. 类似地, 任何有限射影平面 PG $(2,p)$,$(p>2)$ 不可能嵌入欧氏平面 [$PG(2,p)$ 的定义可参见定理 9.8 的证明]. 有限射影平面与欧氏平面的组合构造之间有着显著差别. 例如, 阶为 p 的有限射影平面含 $n=p^2+p+1$ 个点和 n 条直线, 其中每条直线含 $p+1\geqslant\sqrt{n}$ 个点. 另一方面, 由 Szemerédi, Trotter (1983a) 的著名定理可知, 给定欧氏平面上的一个 n 点集, 含至少 $\sqrt{n}$ 个点的直线条数不能超过 $c\sqrt{n}$, 其中 c 是一个适当的常数. 事实上, Szemerédi, Trotter (1983b) 设法证明了 Erdős的一个强得多的猜想, 按这一猜想, 平面中 m 个点与 n 条直线之间的最大关联数至多为 $c(m^{2/3}n^{2/3}+m+n)$, 其中 c 是某个固定常数. 此外, 这一结果除常数值外是紧的.

本章将阐述证明上述定理及许多相关结果的一个相当一般和简要明确的方法. Clarkson, Edelsbrunner, Guibas, Sharir, Welzl(1990), Clarkson (1987) 及 Clarkson, Shor (1989) 深化了这些结果. 他们的思路是利用一些简单的概率方法 (或者说有些巧妙的构造性方法) 得出一个满足某些符合论证需要的简单条件的平面胞腔分解. 然后可分别在每个胞腔中应用前面几章讨论过的图论工具, 确立希望得到的结果. 本章旨在通过 Szemerédi-Trotter 定理(推论 11.8) 的一个简单证明来说明这一方法.

11.1　直线配置的剖分

首先, 回顾前面几章的一些定义, 然后引入几个新的定义.

设 $\mathcal{L}=\{\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_n\}$ 是平面中 n 条直线的集合. 由它们确定的**配置** $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 是指一个平面胞腔复形, 配置的 **顶点** 是这些直线的交点, 配置的**边** (1 维胞腔) 是直线的不含顶点的最大连通部分, 配置的**面** (2 维胞腔, 或简称**胞腔**) 是 $\mathbb{R}^2-\bigcup_{i=1}^{n}\ell_i$ 的连通分支 (图 11.1). 在 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 中界定一个面 c 的边数常称为 c 的**复杂度**.

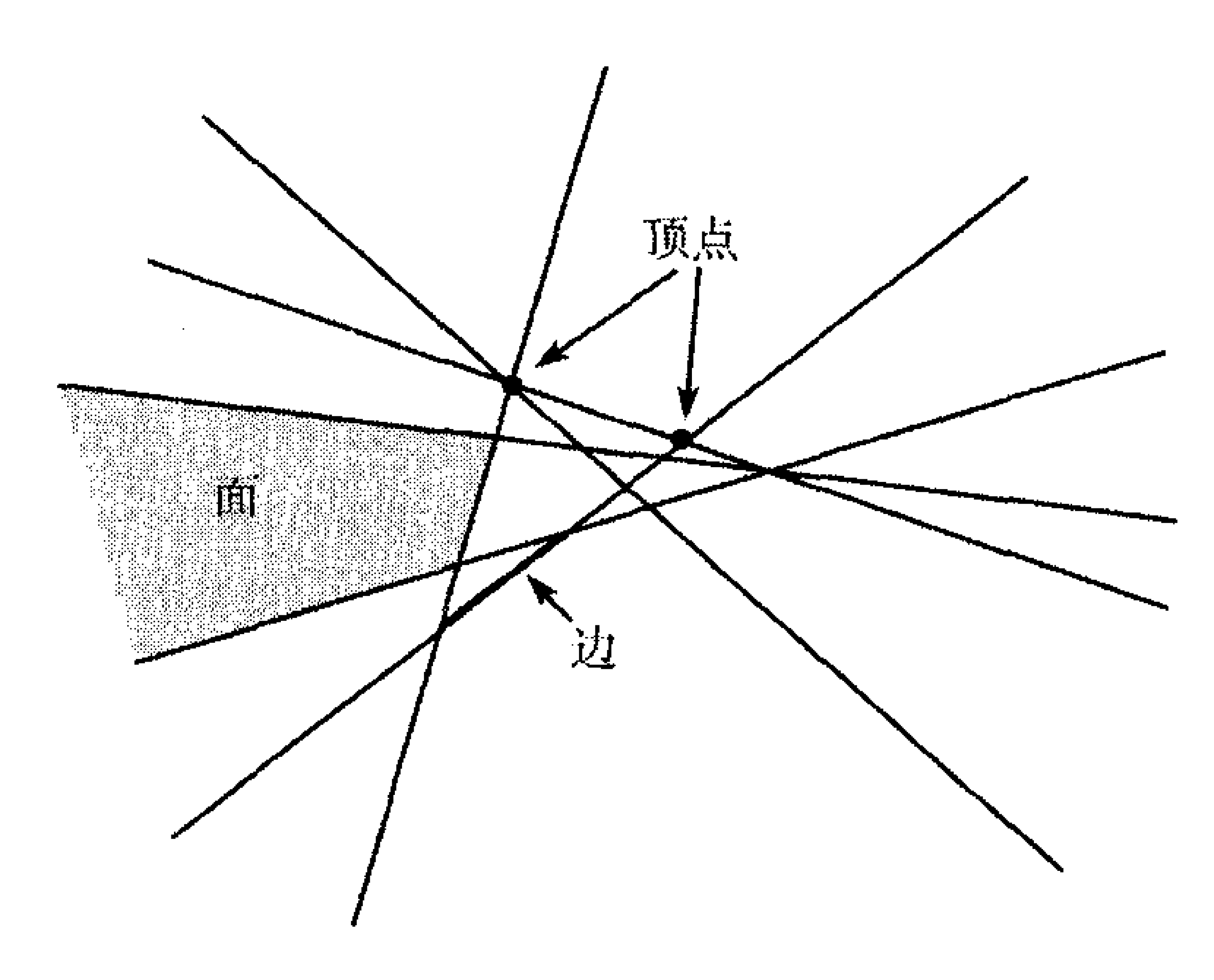


图 11.1　直线的配置

给定一个 m 点集 $P=\{p_1,\cdots,p_m\}$, 设 $\mathcal{I}(P,\mathcal{L})$ 表示使得 $p_i\in\ell_j$ 的对 (i,j) 的个数. 设

$$\mathcal{I}(m,n)=\max_{\substack{|P|=m\\|\mathcal{L}|=n}}\mathcal{I}(P,\mathcal{L}),$$

即平面中 m 个点与 n 条直线之间的最大关联个数. 类似地, 如果 $\mathcal{C}=\{c_1,\cdots,c_m\}$ 是 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 中 2 维胞腔 (面) 的集合, 那么设 $\mathcal{K}(\mathcal{C},\mathcal{L})$表示界定 $\mathcal{C}$ 的 2 维面的边的总数, 记

$$\mathcal{K}(m,n)=\max_{\substack{|\mathcal{C}|=m\\|\mathcal{L}|=n}}\mathcal{K}(\mathcal{C},\mathcal{L}).$$

我们已经知道 (见引理 10.6),

$$\mathcal{I}(m,n)\leqslant\frac{1}{2}\mathcal{K}(m,2n)+m.$$

因此, 要想给出 $\mathcal{I}(m,n)$ 一个好的上界, 只须估计 $\mathcal{K}(m,n)$ 即可.

若在 $\mathcal{L}$ 中无两条直线平行且无三条直线共点, 则称直线的配置 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 是**简单的**. n 条直线的一个简单配置有 $\binom{n}{2}$ 个顶点, n^2 条边和 $\binom{n}{2}+n+1$ 个面, 其中一些边和面是无界的. 如果要求 $\mathcal{K}(m,n)$ 的上界, 可以仅考虑简单配置. 因此, 本章以下 (除特别声明外) 假定所有的配置都是简单的, 且 $\mathcal{L}$ 中没有直线是水平或竖直的. 下面的结果在文献中通常称为直线的 **分区定理**.

引理 11.1 (Chazelle et al., 1985; Edelsbrunner, O'Rourke et al., 1986) 给定平面上 n 条直线的集合 $\mathcal{L}$ 和另外一条直线 ℓ, 在 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 中与 ℓ 相交的所有面所含边的总数至多为 $6n$.

证明 不妨假设 ℓ 是水平的且不经过 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 的任何顶点.

首先, 确定与 ℓ 相交的所有面 f 的上半部分即位于 ℓ 上方的边的总数. 这样一个面的上部边界由两条凸的边链 (**左** 链和 **右** 链) 及 ℓ 的一部分构成. 如果面 f 的上半部分是有界的, 那么左链和右链相交于 f 的最上方的顶点; 否则, 这些链的最后 (最上方) 的边是半直线 (图 11.2). 属于左 (右) 链的边, 除了最上方的边之外, 称为 f 的 **左侧** (**右侧**) **边**.

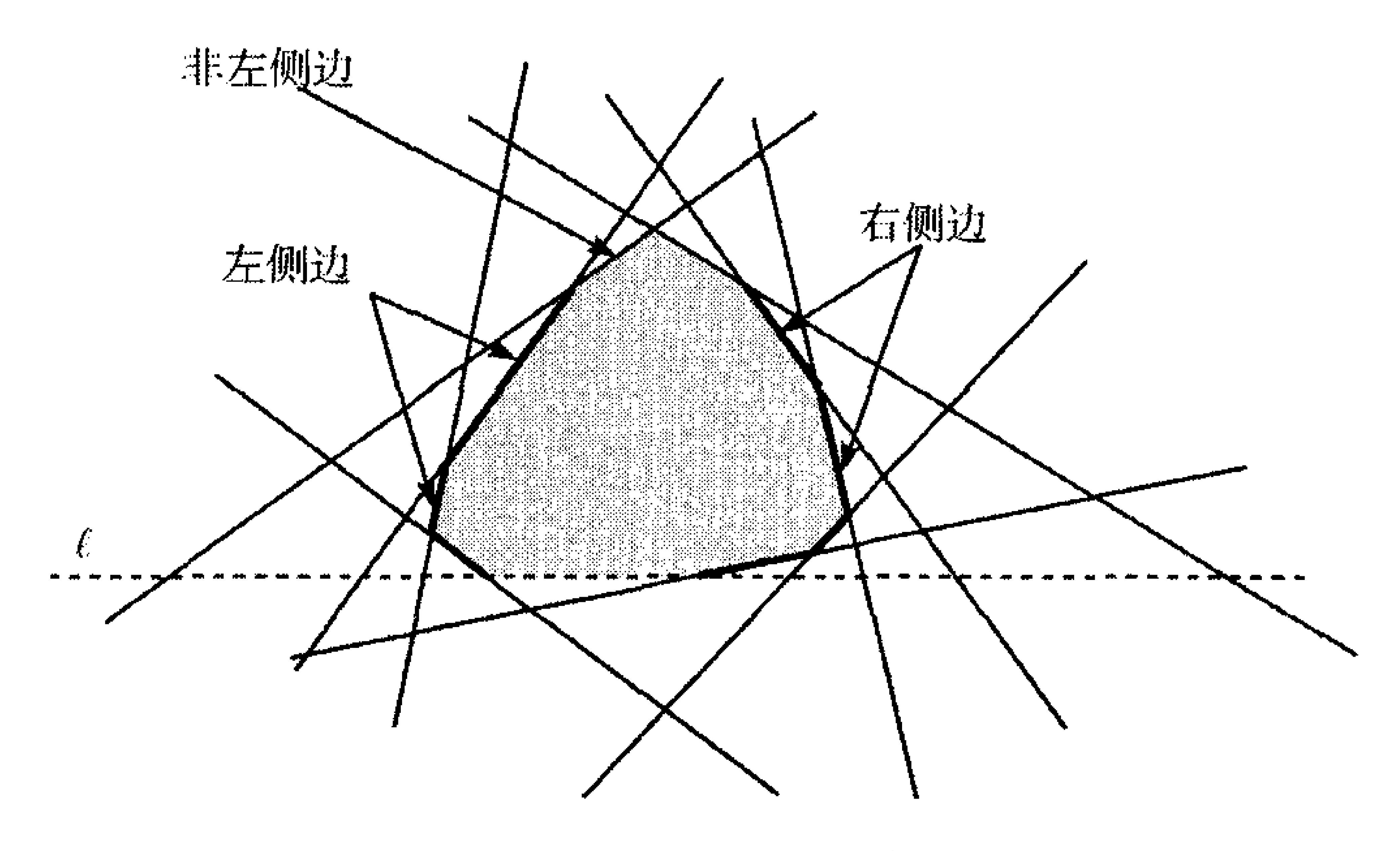


图 11.2 一个面的左侧边与右侧边

断定每条直线 $\ell_i \in \mathcal{L}$ 至多含一条左侧边. 若否, 假设 ℓ_i 含两条边 e_1 和 e_2, 它们分别是 f_1 和 f_2 的左侧边, 其中 e_2 在 e_1 之上. 因此支撑 f_1 的左链最上方边所在的直线 ℓ_j 穿过 f_2, 这与 f_2 是 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 的面矛盾. 故与 ℓ 相交的面的上部的左侧边 (右侧边) 总数至多为 n. 考虑到链的最上方的边, 与 ℓ 相交的面的上部边的总数至多为 $4n$. 对这些面的下部可作同样讨论. 由于与 ℓ 相交的边被计数两次, 所以与 ℓ 相交面中边的总数至多为 $8n - 2n = 6n$. □

通过更详细的计数讨论 Bern et al.(1991) 证得上述引理中的界可以改进为 $5.5n$, 且除了一个常数因子外此界是紧的, 如图 11.3 所示.

下面证明, 给定 m 个点和 n 条直线, 平面可以被划分成固定个数的梯形, 使得与一个梯形相交的直线的平均条数很小, 这是 Clarkson et al.(1990) 证明 Szemerédi-Trotter 定理 (本章开始提到) 的关键步骤之一.

定理 11.2 (Clarkson et al., 1990) 给定一个 m 点集 P, 一个处于一般位置的 n 条直线的集合 $\mathcal{L}$, 一个整数 $4 < r < n$ 和一个实数 $0 < \alpha \leqslant 1$, 则可将平面划分成 $s \leqslant 3r^2$ 个具有下述性质的 (不必有界) 梯形 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_s$. 如果 m_i 和 n_i 分别

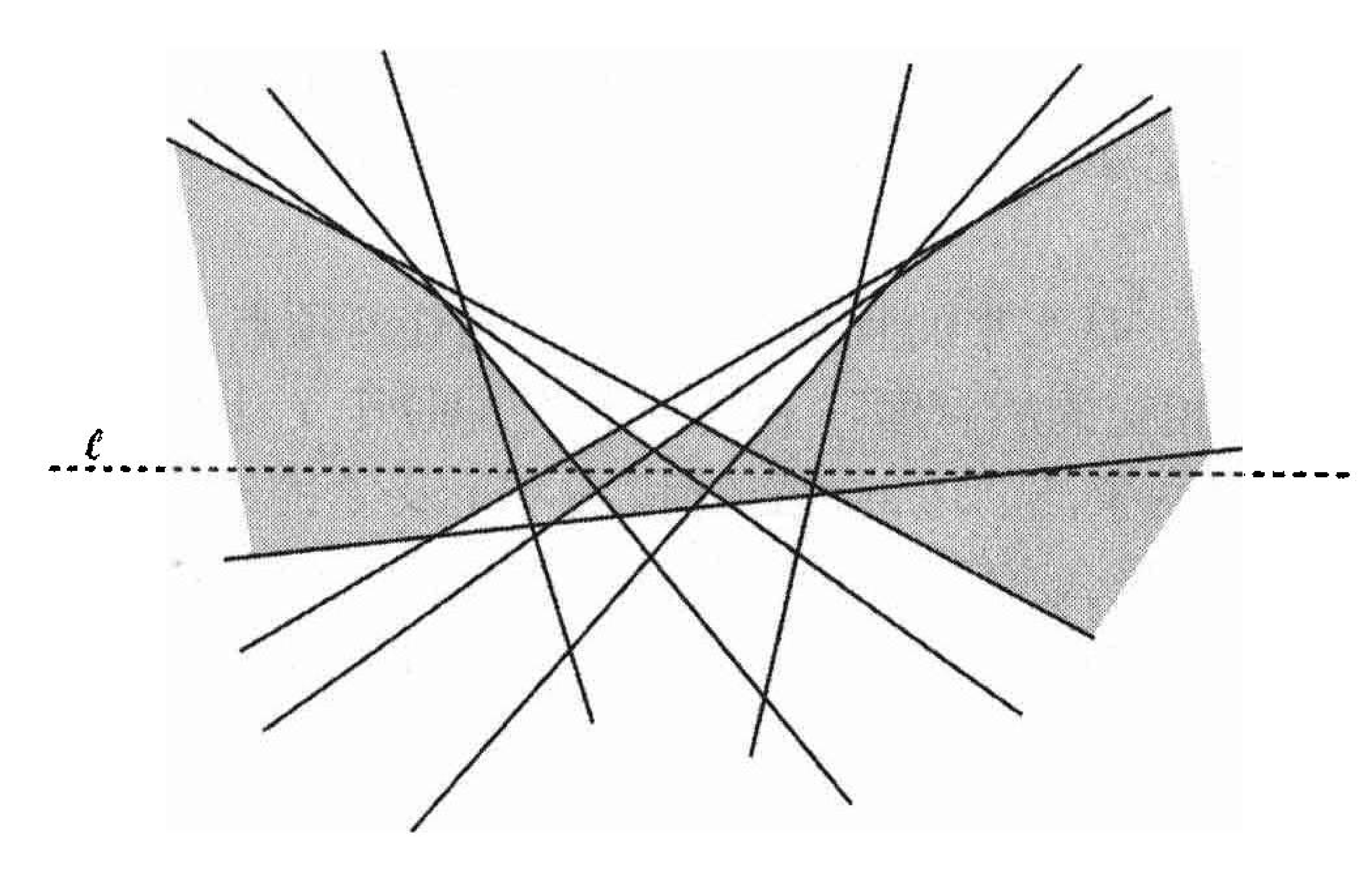


图 11.3 引理 11.1 中下界的构造

表示 $P\cap\Delta_i$ 中点的个数及 $\mathcal{L}$ 中与 Δ_i 的内部相交的直线条数, 那么

(i) $\sum_{i=1}^{s} n_i \leqslant c_1 nr$;

(ii) $\sum_{i=1}^{s} m_i n_i^{\alpha} \leqslant c_2 m(n/r)^{\alpha}$,

其中 c_1 和 c_2 是正值常数.

现给出上面定理的两种不同证明.

定理 11.2 的第一个证明(Clarkson et al., 1990) 设 $\mathcal{R}$ 是平面中任一处于一般位置的 r 条直线的集合, 即 $\mathcal{R}$ 中无两线平行, 无三线共点, 且无两交点有相同的 x 坐标. 经过 $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ 的每个顶点向两个方向画竖直直线, 直到遇到 $\mathcal{R}$ 的另外一条直线为止, 这样将配置 $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ 的面剖分成梯形. 这些梯形的个数是

$$\binom{r}{2}+r+1+r(r-1)<3r^2,$$

其中某些梯形是退化的, 即梯形的某些边是点或射线. 用 $\mathcal{A}^*(\mathcal{R})$ 表示这个新的 (梯形的) 平面图形 (图 11.4).

对 $\mathcal{A}^*(\mathcal{R})$ 的每个面 Δ, 令 $r_\Delta\leqslant 4$ 表示子集 $\mathcal{R}'\subseteq\mathcal{R}$ 的大小, 这里 $\mathcal{R}'$ 表示 $\mathcal{R}$ 的使得 Δ 也是 $\mathcal{A}^*(\mathcal{R}')$ 的一个面的最小子集. 称 Δ 由 r_Δ 条直线所确定.

以下设 $\mathcal{R}$ 是随机选取的 $\mathcal{L}$ 的一个 r 元子集, 其中所有 $\binom{n}{r}$ 个可能的选取是等可能的. 设 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_s$ $(s<3r^2)$ 表示 $\mathcal{A}^*(\mathcal{R})$ 的面, m_i 和 n_i $(1\leqslant i\leqslant s)$ 的含义如定理所述 (只是它们现在都是随机变量).

为证明 (i), 注意到每条直线 $\ell\in\mathcal{L}-\mathcal{R}$ 恰好与 $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ 中 $r+1$ 个面的内部相交, 且 $\mathcal{R}$ 的每个面至多可以剖分成与其边数一样多的梯形. 因此, 由引理 11.1 推出每条直线 $\ell\in\mathcal{L}-\mathcal{R}$ 至多与 $6r$ 个梯形相交. 这就表明 $\sum_{i=1}^{s} n_i\leqslant 6r(n-r)$.

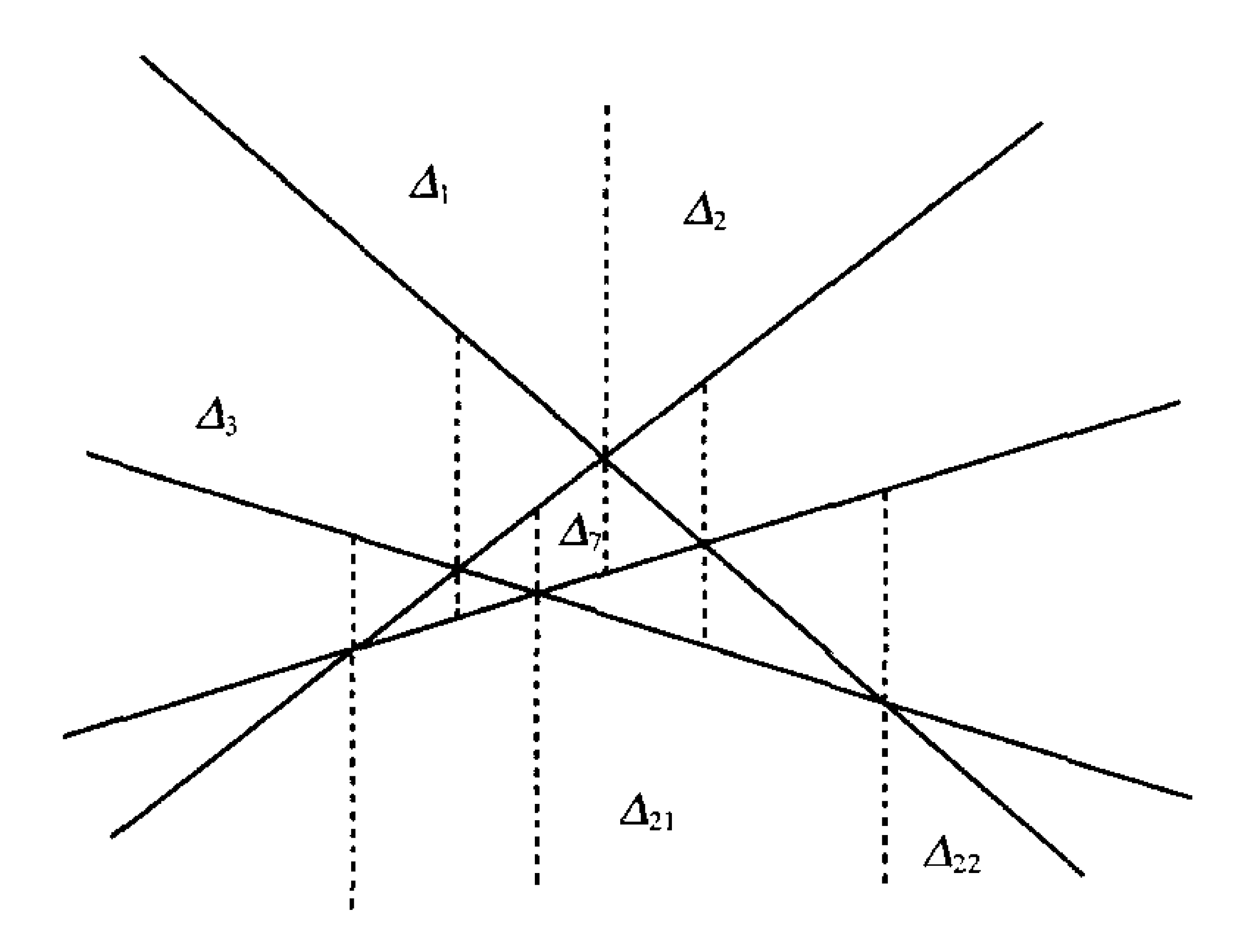


图 11.4 直线配置的梯形剖分

为了证明 (ii), 只须证明对 $\mathcal{R}$ 的所有可能选取, $\sum m_i n_i^{\alpha}$ 的**期望值**至多为 $c_2 m\left(\dfrac{n}{r}\right)^{\alpha}$. 如果 q_j 表示与 $\mathcal{A}^*(\mathcal{R})$ 中含 $p_j \in P$ 的 (唯一确定的) 梯形的内部相交的 $\mathcal{L}$ 的直线的条数, 那么

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{s} m_i n_i^{\alpha}\right] &= E\left[\sum_{j=1}^{m} q_j^{\alpha}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{m} E[q_j^{\alpha}] \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{m} (E[q_j])^{\alpha} \end{aligned}$$

(见习题 11.5). 因此, 又只须证明对每个 j, $E[q_j] \leqslant c_3 n/r$.

在证明的其余部分, 设 j 是固定的, $\Delta_{\mathcal{R}}$ 表示 $\mathcal{A}^*(\mathcal{R})$ 中含 p_j 的梯形.

设 $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ 表示由满足 $|\mathcal{R}_\Delta| = r_\Delta \leqslant 4$ 的子集 $\mathcal{R}_\Delta \subset \mathcal{L}$ 所确定的含 p_j 的所有梯形构成的集合. 给定一个梯形 $\Delta \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$, 设 n_Δ 表示 $\mathcal{L}$ 中与 Δ 相交的直线的条数, 且设 Pr_Δ 是满足 $\Delta_{\mathcal{R}} = \Delta$ 的概率, 则

$$E[q_j] = \sum_{\Delta \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}} n_\Delta Pr_\Delta.$$

因为任一 r 元子集 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$ 是以相同概率选取的, 所以 Pr_Δ 等于满足 $\Delta_{\mathcal{R}} = \Delta$ 的子集 $\mathcal{R}$ 的个数除以 $\dbinom{n}{r}$. 另一方面, 显然, $\Delta_{\mathcal{R}} = \Delta$ 当且仅当

1. $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{R}_\Delta$;
2. $\mathcal{R}$ 的任何直线不与 Δ 的内部相交.

因此

$$Pr_\Delta = \binom{n - n_\Delta - r_\Delta}{r - r_\Delta} \bigg/ \binom{n}{r}.$$

但

$$\binom{n-n_\Delta-r_\Delta}{r-r_\Delta} \leqslant \frac{n}{r-4}\binom{n-n_\Delta-r_\Delta}{r-r_\Delta-1},$$

从而

$$E[q_j] \leqslant \frac{n}{r-4}\sum_{\Delta\in\mathcal{D}_\mathcal{L}} n_\Delta\binom{n-n_\Delta-r_\Delta}{r-r_\Delta-1}\bigg/\binom{n}{r}.$$

然而, 上式中的和式不超过 4 (见习题 11.6). 故有

$$E\left[\sum_{i=1}^{s} m_i n_i^\alpha\right] \leqslant m\cdot\max_{1\leqslant j\leqslant m}(E[q_j])^\alpha \leqslant m\left(\frac{4n}{r-4}\right)^\alpha. \qquad \square$$

为了给出定理 11.2 的一个构造性证明 (不用随机方法), 必须对直线配置边集的精细结构作一分析.

定义 11.3　设 $\mathcal{L}$ 是平面中处于一般位置的 n 条直线的集合, p 是任意一点. 若以 p 为起点指向 y 轴正方向的开射线与 $\ell\in\mathcal{L}$ 相交, 则称 ℓ 在 p 的上方. p 的**位级**是指 $\mathcal{L}$ 中位于 p 的上方但不经过 p 的直线的条数. 显然, 属于配置 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 的同一条 (开) 边的所有点的位级是相同的. 在 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 中考虑所有点的位级是 k 的边, 所有这种边的并的闭包称为 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 的 k **位级线**(图 11.5). 因此, $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 的 k 位级线是从半直线开始到半直线终止的 x 单调的折线形链 $(0\leqslant k<n)$. 术语**位级线**指的就是某个 k 位级线, $k\geqslant 0$. 在一条位级线 λ 中边的条数记为 $|\lambda|$, 且称之为该位级线的**长度**.

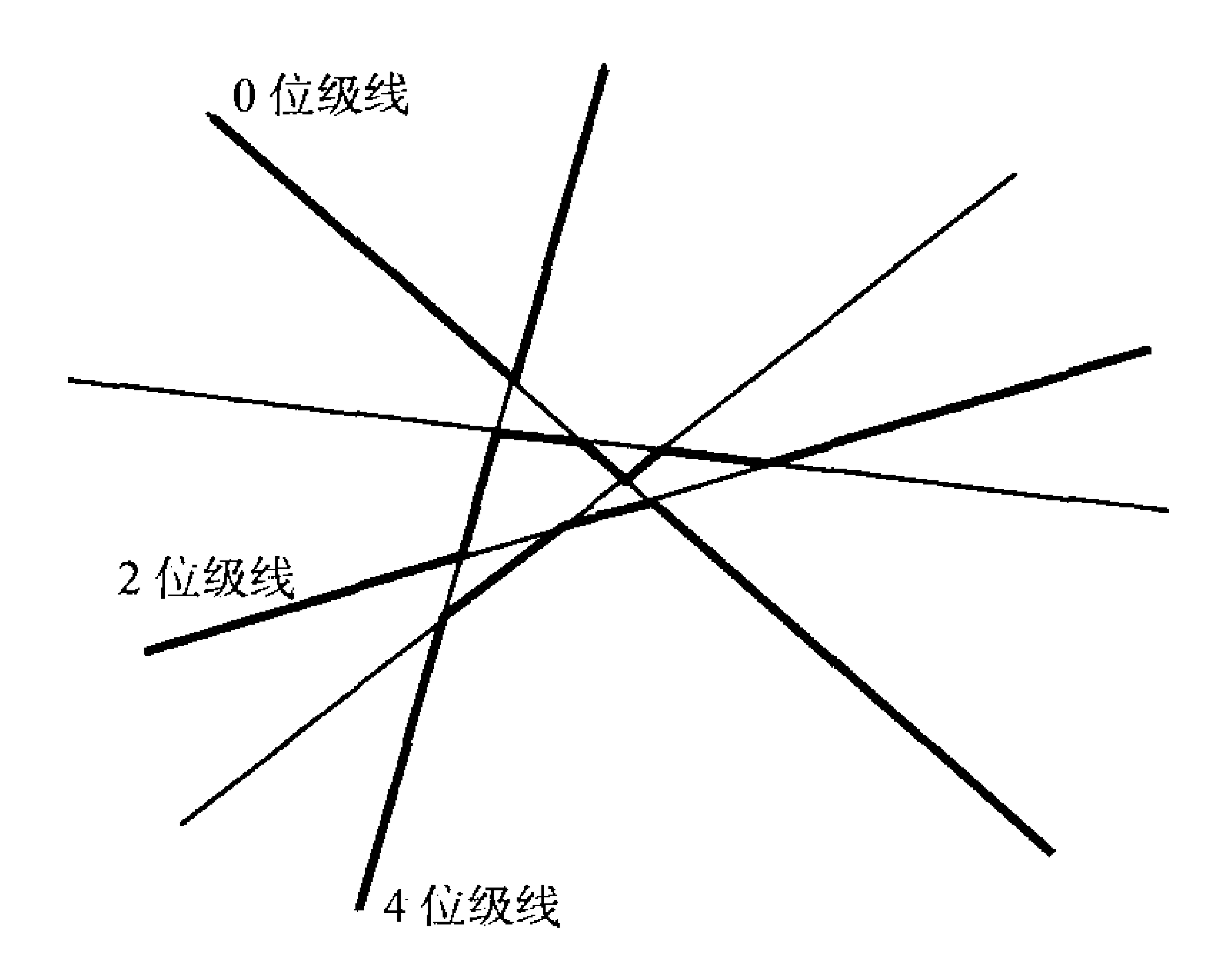


图 11.5　5 条直线配置中的位级线

下面两个引理中, 将表述位级线的两个简单性质, 它们有助于定理 11.2 的一个构造性证明.

引理 11.4　设 $\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots,\Lambda_u$ 是 n 条直线的配置中位级线的不交集合. 如果每个 Λ_i 至少包含 v 条位级线, 那么可以选取一条位级线 $\lambda_i\in\Lambda_i(1\leqslant i\leqslant u)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{u}|\lambda_i| \leqslant \frac{n^2}{v}.$$

证明 设 λ_i 是 Λ_i 中最短的位级线. 由于任意两条位级线没有公共边, 所以

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_i}|\lambda| \geqslant v|\lambda_i|.$$

又因为处于一般位置的 n 条直线的配置中存在 n^2 条边, 所以

$$n^2 \geqslant \sum_{i=1}^{u}\sum_{\lambda\in\Lambda_i}|\lambda| \geqslant v\sum_{i=1}^{u}|\lambda_i|. \qquad \square$$

下面的引理 (其证明留作习题) 表明, 如果要在一条位级线中选取一条所谓“捷径”, 我们会发现所得折线链与原来的不会有太大差别.

引理 11.5 (Edelsbrunner, Welzl, 1986c) 设 $q_0, q_1, \cdots, q_t$ 是 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 中 k 位级线的顶点, 按出现先后顺序排列, $d \geqslant 2$ 是整数. 设 $\Pi(k,d)$ 表示用 k 位级线的起始射线和终止射线加长的折线路 $q_0\, q_d\, q_{2d} \cdots q_{\lfloor t/d\rfloor d}\, q_t$, 则

(i) $\Pi(k,d)$ 的任一边的内部至多与 $\mathcal{L}$ 的 $d-2$ 条直线相交;

(ii) $\Pi(k,d)$ 位于 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 的 $(k-\lfloor d/2\rfloor)$ 位级线和 $(k+\lfloor d/2\rfloor+1)$ 位级线之间 (见习题 11.7).

定理 11.2 的第二个证明 我们将通过三个步骤把平面划分成 $s \leqslant 3r^2$ 个梯形 $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$. 令 $d = \lceil n/r\rceil$.

步骤 1: 将 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 的位级线划分成大小为 d 的组, 即对每个 i $(1 \leqslant i \leqslant n/d)$, 令 Λ_i 表示由满足 $(i-1)d \leqslant k < id$ 的所有 k 位级线构成的集合. 假设 k_i 位级线是 Λ_i 中最短的位级线. 由引理 11.4 可知, 所有 k_i 位级线 $(1 \leqslant i \leqslant n/d)$ 长度的和至多为 n^2/d.

步骤 2: 对每个**偶数** i $(1 \leqslant i \leqslant n/d)$, 如在引理 11.5 中描述的那样, 设法从 k_i 位级线中选取一条“捷径”, 得到一条无界的折线路 $\Pi(k_i,d)$. 根据引理 11.5(ii), 路 $\Pi(k_2,d), \Pi(k_4,d), \cdots$ 是两两不交的. 而且很显然, 对所有的偶数 i, $1 \leqslant i \leqslant n/d$, $\Pi(k_i,d)$ 顶点总数至多为 $\dfrac{n^2}{d^2}+\dfrac{n}{2d}$.

步骤 3: 经过每个 $\Pi(k_i,d)$ 的每个顶点向两个方向画竖直线段 (或射线), 直到所画线段或射线遇到 $\Pi(k_{i-2},d)$ 或 $\Pi(k_{i+2},d)$ $(1 \leqslant i \leqslant n/d$, i 是偶数). 这样平面至多划分成

$$2\left(\frac{n^2}{d^2}+\frac{n}{2d}\right)+\frac{n}{2d} \leqslant 2r^2+\frac{3}{2}r \leqslant 3r^2$$

个 (广义的) 梯形 $\Delta_1, \cdots, \Delta_s$.

由引理 11.5(i) 可知, $\Pi(k_i, d)$ 的任一边的内部至多与 $\mathcal{L}$ 的 $d-2$ 条直线相交. 另一方面, 由前述构造和引理 11.5(ii) 知, 一个梯形的任一竖直边至多与

$$(3d-1) + \left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1\right) + 2 \leqslant \frac{7}{2}d + 2$$

条直线相交. 因此, 每个梯形 Δ_j 的内部至多与 $\mathcal{L}$ 的

$$2\left(\frac{7}{2}d + 2\right) + 2(d-2) = 9d = 9\lceil n/r \rceil$$

条直线相交, 从而定理 11.2 得证.

事实上, 我们已经得到了一个更强的结论.

定理 11.6 (Chazelle, Friedman, 1990; Matoušek, 1990)　*给定任一处于一般位置的 n 条直线的集合 $\mathcal{L}$ 和任一正整数 $r < n$, 平面可划分成 $s \leqslant 3r^2$ 个 (不必有界) 梯形 $\Delta_1, \cdots, \Delta_s$, 使得每个梯形的内部至多与 $\mathcal{L}$ 的 cn/r 条直线相交, 其中 c 是某一适当的常数.*

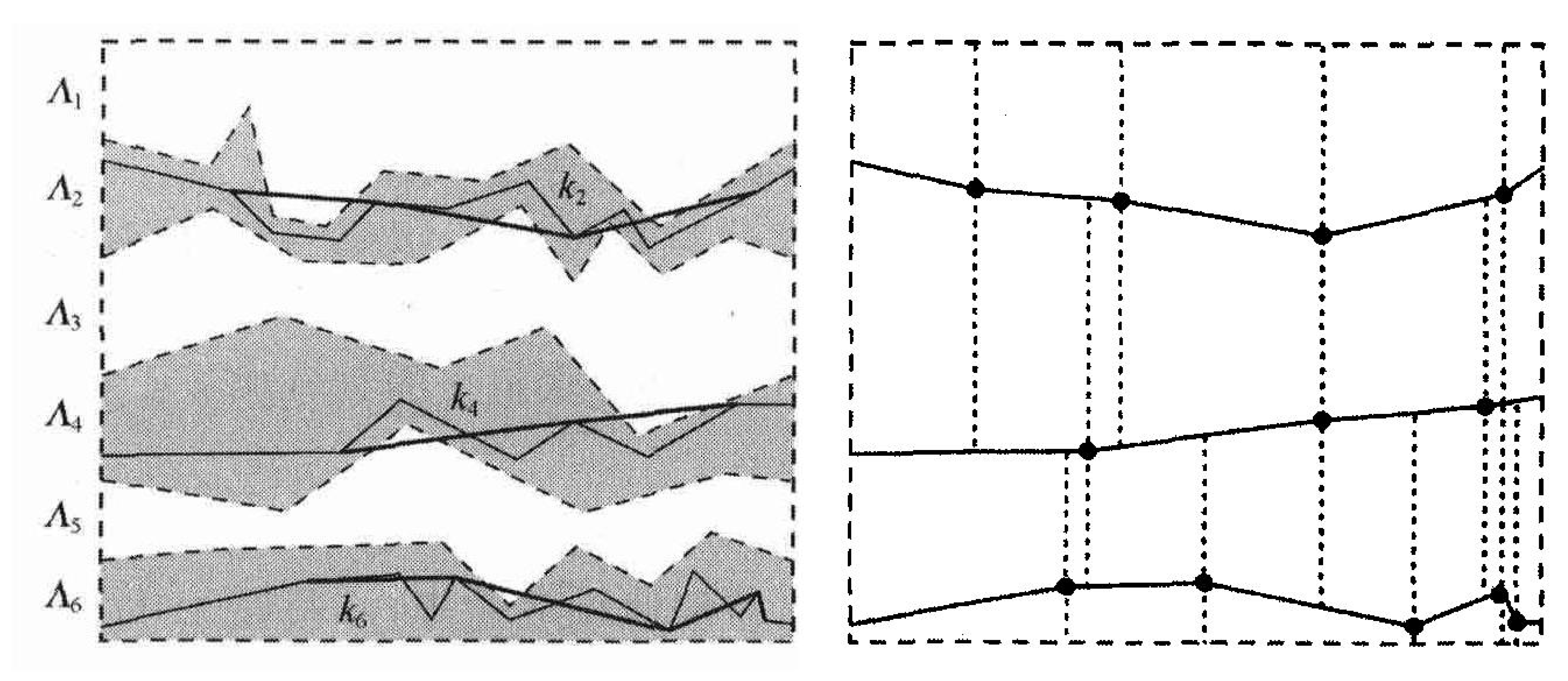


图 11.6　构造梯形 ($r = 6, d = 3$): (a) 步骤 1, 2; (b) 步骤 3

11.2　胞腔集的复杂度

现在即可证明本章的主要定理.

定理 11.7 (Clarkson et al., 1990)　*设 $\mathcal{K}(m,n)$ 表示平面上 n 条直线的配置中 m 个互异面的边的最大总数, 则存在常数 $c' > 0$, 使得*

$$\mathcal{K}(m,n) \leqslant c'(m^{2/3}n^{2/3} + n).$$

证明　设 $\mathcal{C} = \{f^1, \cdots, f^m\}$ 表示平面上 n 条直线的简单配置 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 中 m 个互异胞腔 (面) 的集合. 对每个 $1 \leqslant j \leqslant m$, 选取一点 $p^j \in f^j$, 使得过 p^j 的竖直直线不含配置 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 的任何顶点. 令 $P = \{p^1, p^2, \cdots, p^m\}$.

将平面划分成 $s \leqslant 3r^2$ 个具有定理 11.2 中所述性质的梯形 $\Delta_1, \cdots, \Delta_s$, 其中整数 $r > 4$ 稍后确定.

设 $\mathcal{L}_i \subseteq \mathcal{L}$ 表示与 Δ_i 的内部相交的直线集, $P_i = P \cap \Delta_i$. 令 $n_i = |\mathcal{L}_i|, m_i = |P_i|$.

如果 $p^j \in \Delta_i$, 设 f_i^j 表示 $\mathcal{A}(\mathcal{L}_i)$ 中包含 p^j 的面. 如果 f_i^j 完全位于 Δ_i 的内部, 那么 $f_i^j = f^j$. 否则, 由于 f^j 可有位于 Δ_i 外部的一些边, f_i^j 的边数可以比 f^j 的少. 但每个这种类型的边由有限条线段构成, 使得每条线段是 $\mathcal{A}(\mathcal{L}_k) \cap \Delta_k$ 的某个面的一条边 (对某 $k \neq i$), 至少与 Δ_k 的一条边关联. 根据引理 11.1, 这些边的总数至多为

$$\sum_{k=1}^{s} 4(6n_k) + \sum_{k=1}^{s} 2(n_k + 1),$$

其中第二项是位于一梯形 Δ_k 的某非竖直边上的边数的上界估计. 定理 11.2 (i) 表明, 对某适当的常数 c_1', 上述表达式不可能超过 $c_1' rn$.

因此, 有下面的递推关系:

$$\mathcal{K}(m, n) \leqslant \sum_{i=1}^{s} \mathcal{K}(m_i, n_i) + c_1' rn,$$

其中$\sum_{i=1}^{s} m_i = m$, m_i, n_i 满足定理 11.2 的条件 (i) 和 (ii). 利用 Canham 定理 (见定理 10.7) 和定理 11.2 (对 $\alpha = 1/2$) 可推得

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(m, n) &\leqslant c \sum_{i=1}^{s} (m_i \sqrt{n_i} + n_i) + c_1' rn \\ &\leqslant c c_2 m \sqrt{\frac{n}{r}} + (c c_1 + c_1') rn .\end{aligned}$$

选取 $r = \min\left\{\left\lceil m^{2/3}/n^{1/3} \right\rceil, n\right\}$ 即得结论. □

根据引理 10.6, 由定理 11.7 可直接推得本章开始提及的 Szemerédi-Trotter 定理.

推论 11.8 (Szemerédi-Trotter, 1983b) *设 $\mathcal{I}(m, n)$ 表示平面上 m 个点与 n 条直线之间的最大关联数, 则存在常数 $c > 0$, 使得*

$$\mathcal{I}(m, n) \leqslant c(m^{2/3} n^{2/3} + m + n) .$$

这个结果的紧性可由下述 Erdős 构造 (Edelsbrunner, 1987) 得到.

定理 11.9 *存在常数 $c' > 0$ 具有下述性质: 对任意一对正整数 m 和 n, 可以找到平面上 m 个点和 n 条直线, 使得它们之间的关联数至少为 $c'(m^{2/3} n^{2/3} + m + n)$.*

证明　用很简单的构造即可说明 $\mathcal{I}(m,n) \geqslant \max\{m,n\}$. 因此, 只须证明对某 $c' > 0$, 有 $\mathcal{I}(m,n) \geqslant c'm^{2/3}n^{2/3}$.

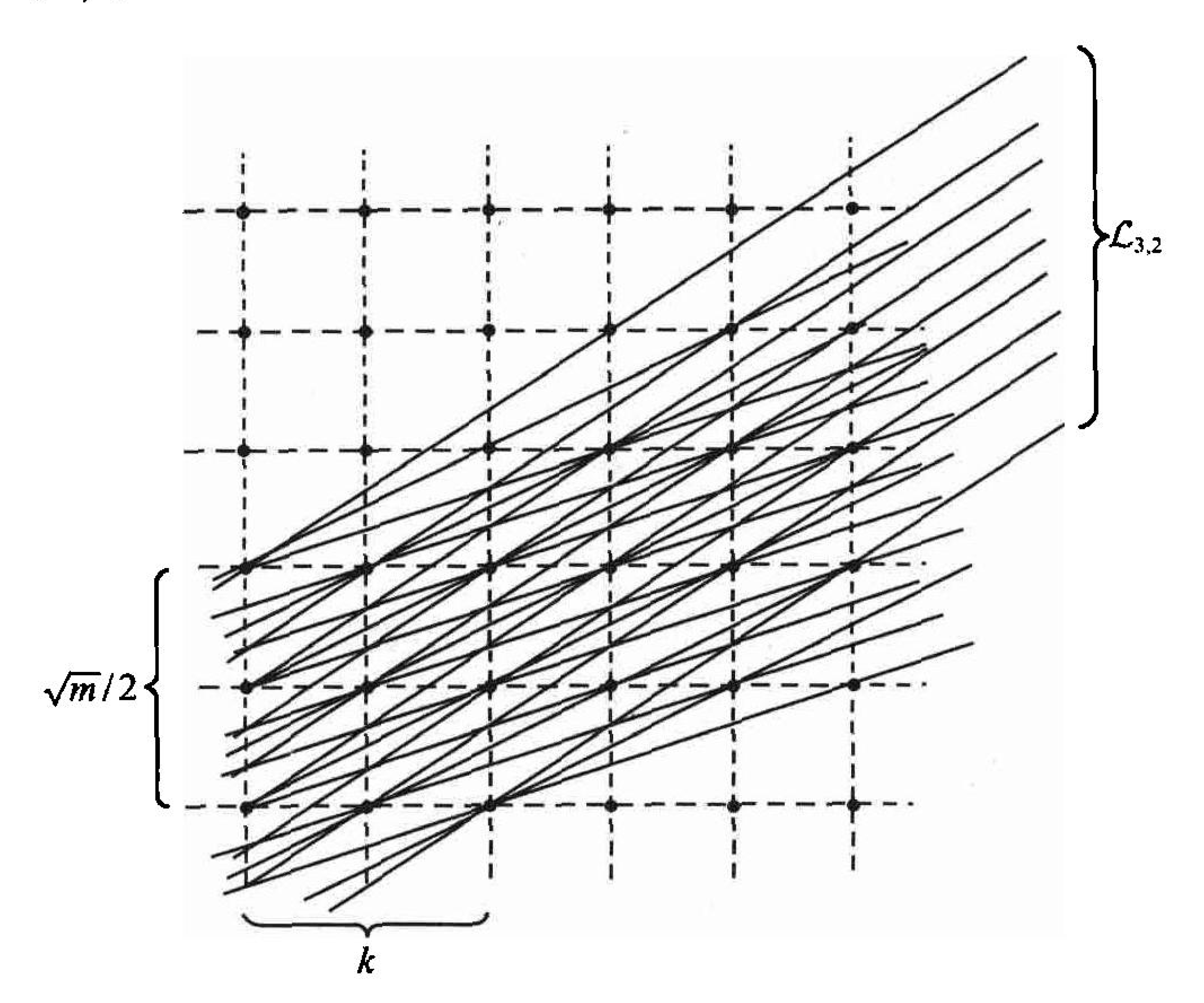


图 11.7　定理 11.9 证明的相关构造

为简单起见, 忽略上整数, 下整数的算符. 也就是说, 假设在构造过程中出现的所有数都是可整除的整数.

设 P 是整数网格的一个大小为 $\sqrt{m} \times \sqrt{m}$ 的部分, 即

$$P = \{\,(i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant \sqrt{m},\ 1 \leqslant j \leqslant \sqrt{m}\,\}.$$

设 $k = (cn/\sqrt{m})^{1/3}$, 其中 c 是一个正值常数 (待确定). 对给定的满足 $1 \leqslant s < r \leqslant k$ 的互质数对 (r,s), 定义 $r\sqrt{m}/2$ 条直线的集合 $\mathcal{L}_{r,s}$ 如下:

$$\mathcal{L}_{r,s} = \left\{ y - j = \frac{s}{r}(x-i) \mid 1 \leqslant j \leqslant \frac{\sqrt{m}}{2}, 1 \leqslant i \leqslant r \right\},$$

即 $\mathcal{L}_{r,s}$ 由经过 (i,j) 和 $(i+r, j+s)$ $\left(1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant \dfrac{\sqrt{m}}{2}\right)$ 的所有直线构成. 设

$$\mathcal{L} = \bigcup_{\substack{\gcd(r,s)=1 \\ 1 \leqslant s < r \leqslant k}} \mathcal{L}_{r,s},$$

由假设 $\gcd(r,s) = 1$ 和 $1 \leqslant i \leqslant r$ 可知, $\mathcal{L}$ 的所有直线是互异的, 即

$$|\mathcal{L}| = \left(\sum_{r=1}^{k} r\phi(r)\right) \frac{\sqrt{m}}{2} \leqslant c^* k^3 \frac{\sqrt{m}}{2}$$

$$\leqslant c^*\left(\frac{cn}{\sqrt{m}}\right)\frac{\sqrt{m}}{2}\leqslant n,$$

只要 $c\leqslant 2/c^*$, 其中 ϕ是 Euler 函数, 定义为

$$\phi(r)=|\{\,s\mid 1\leqslant s\leqslant r \text{ 且 } \gcd(r,s)=1\,\}|,$$

这里用到了习题 11.8(ii) 中陈述的事实.

另一方面, 注意到直线 $y-j=s/r(x-i)$ 通过网格 (从第 i 列开始) 的每个第 r 列的一点. 因此, P 的点和 $\mathcal{L}$ 的线之间的关联总数至少是

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\gcd(r,s)=1\\1\leqslant s<r\leqslant k}}|\mathcal{L}_{r,s}|\frac{\sqrt{m}}{r}&=\sum_{r=1}^{k}r\phi(r)\frac{\sqrt{m}}{2}\frac{\sqrt{m}}{r}\\&\geqslant\frac{m}{2}\tilde{c}k^2\\&=\frac{\tilde{c}c^{2/3}}{2}m^{2/3}n^{2/3},\end{aligned}$$

从而定理证毕 (见习题 11.8(i)). □

不难修改本章的证明, 求得 m 个点和 n 个圆之间的关联数的如下上界.

定理 11.10 (Clarkson et al., 1990) *存在常数 $c>0$, 使得*

(i) *m 个点与 n 个单位圆之间的最大关联数至多为 $c(m^{2/3}n^{2/3}+m+n)$;*

(ii) *m 个点与 n 个圆 (不必半径相同) 之间的最大关联数至多为 $c(m^{3/5}n^{4/5}+m+n)$.*

定理 11.10(ii) 已由 Aronov 和 Sharir (2002) 作了改进, 另见 Agarwal 等 (2004). 目前已知, 对任一 $\varepsilon>0$, 平面中 m 个点与 n 个圆之间的最大关联数至多为 $m^{2/3}n^{2/3}+m^{6/11+\varepsilon}n^{9/11}+m+n$ 的常数倍.

推论 11.11 (Spencer, Szemerédi, Trotter, 1984) *设 $f_2(n)$ 表示平面上 n 个点中单位距离出现的最大次数, 则存在适当常数 $c>0$, 使得*

$$f_2(n)\leqslant cn^{4/3}.$$

证明 对平面上任一 n 点集 P 以及以 P 的点为圆心的单位圆集, 令 $m=n$, 应用定理 11.10(i). 注意到 P 中距离为 1 的点对在点和圆的关联关系中计数两次, 结论即得证明. □

这个结果比定理 10.2 给出的上界要好得多, 但它与定理 10.4 中证明的下界 $n^{1+c/\log\log n}$ 仍相去甚远. 人们猜想定理 10.4 中的这个界是渐近紧的.

上述证明技巧以及 Székely (1997) 与 Pach, Tardos (2006) 关于推论 11.11 的更"现代"的证明也蕴含某些更强的结果. 按平面中定义的任一度量, 单位圆盘 (规范

体)是严格凸的 (即它的边界不含线段), n 个点确定的单位距离的最大个数至多为 $n^{4/3}$ 的常数倍. 值得注意的是在这种推广下, 这个界是最佳可能的. 对 Brass 的一种想法作详细研究后, Valtr 在平面上定义了一个具有所需性质的度量. 根据这一度量, 对某个常数 $c>0$, n 个点中出现的单位距离的个数可以大于 $cn^{4/3}$.

设 C 是平面中由两条抛物线 $y=1-x^2$ 和 $y=-1+x^2$ $(x\in[-1,+1])$ 包围的中心对称凸体. 令 $\|\cdot\|_C$ 表示平面中的 Minkowski 范数, 其规范体是 C. 考虑由所有点 $\left(\frac{i}{k},\frac{j}{k^2}\right)$ 组成的集合 P, 其中 i 和 j 是整数, 满足 $|i|<k$ 和 $|j|<k^2$. 显然 P 中关于这一 Minkowski 范数的单位距离点对的个数至少为 $kn>n^{4/3}/4$.

习　题

11.1 (Sylvester, 1893; Gallai, 1944)　设 $\mathcal{L}$ 是平面上 n 条直线的集合, 其中无两条平行, 且 n 条直线不交于同一点. 属于 $\mathcal{L}$ 的恰好两条直线的点称为**寻常交叉点**.

(i) 证明 $\mathcal{L}$ 中的直线至少确定一个寻常交叉点;

(ii) 证明 $\mathcal{L}$ 的交点个数至少为 n.

11.2　设 $\mathcal{L}$ 是平面中 n 条直线的集合, 其中任意两直线不平行, n 条直线不交于同一点,

(i) (Kelly, Moser, 1958) 证明寻常交叉点数至少为 $3n/7$ [见图 11.8(i), 有 3 个寻常交叉点的 7 条直线的配置];

(ii)* (Csima, Sawyer, 1993, 1995) 证明对 $n>7$, 上述界可以改进为 $6n/13$ (图 11.8(ii)).

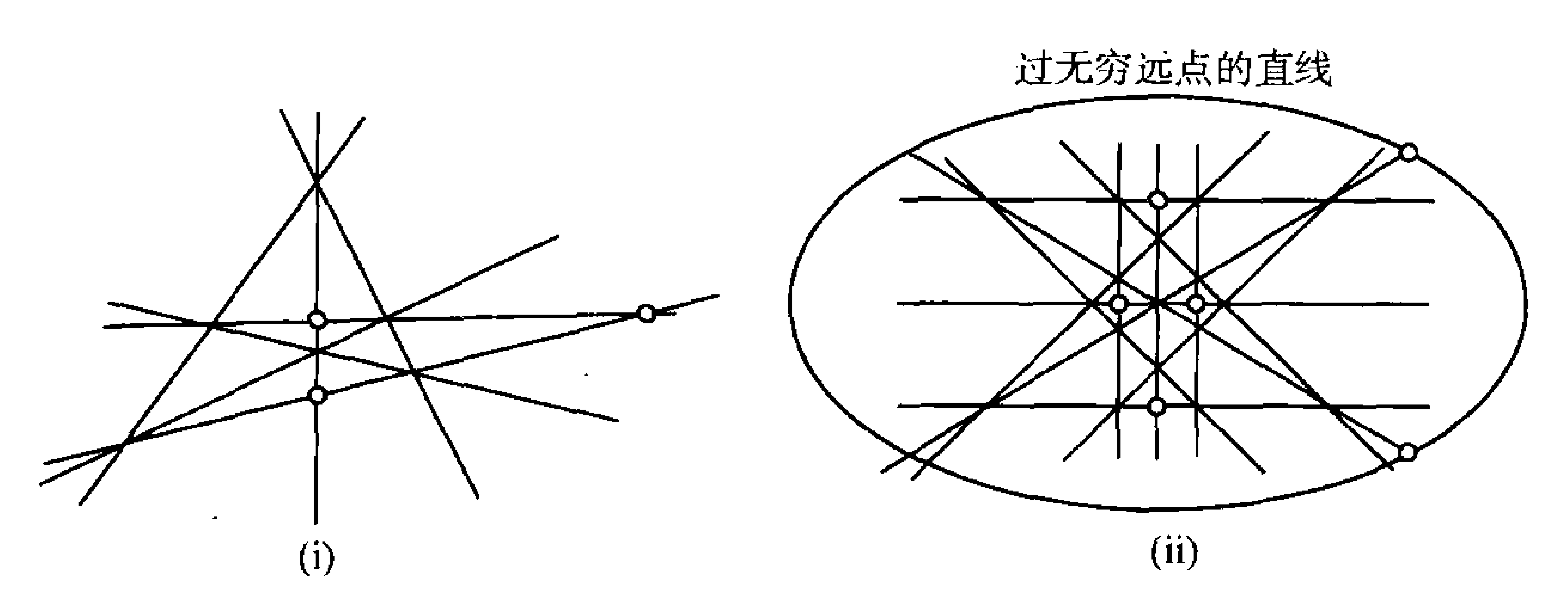


图 11.8　有 3 个寻常交叉点的 7 条直线的配置 (i), 有 6 个寻常交叉点的 13 条直线的配置 (ii)

11.3 (Bern et al., 1991)　设 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 是平面中 n 条直线的配置, C 是凸 k 边形. 证明多边形 $C\cap f$ 的边的总数至多为 $12n+k^2$, 其中 f 取遍 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 中所有与 C 的边界相交的面.

11.4　给定一个 n 条直线的配置, 证明

$$\sum_{f\in\mathcal{A}(\mathcal{L})}|f|^2\leqslant cn^2,$$

其中 $|f|$ 表示 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 的面 f 的边数, $c>0$ 是一个适当的常数.

11.5　设 q 是取非负值的随机变量, $0<\alpha<1$, 证明 q^α 的期望值

$$E[q^\alpha]\leqslant(E[q])^\alpha.$$

11.6　采用定理 11.2 的第一个证明中的记法, 证明

$$\sum_{\Delta\in\mathcal{D}_\mathcal{L}}n_\Delta\binom{n-n_\Delta-r_\Delta}{r-r_\Delta-1}\Big/\binom{n}{r}\leqslant 4.$$

11.7 (Edelsbrunner, Welzl, 1986c)　设 $q_0,q_1,\cdots,q_t$ 是 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 中 k 位级线的顶点, $d\geqslant 2$ 是自然数. 在 k 位级线中用直线段替换 $q_{(i-1)d}$ 与 q_{id} $(1\leqslant i\leqslant\lfloor t/d\rfloor)$ 之间的边及 $q_{\lfloor t/d\rfloor d}$ 与 q_t 之间的边, 所得无限折线路用 $\Pi(k,d)$ 表示. 证明

(i) $\Pi(k,d)$ 的任意一条边的内部至多与 $\mathcal{L}$ 的 $d-2$ 条直线相交;

(ii) $\Pi(k,d)$ 位于 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 的 $(k-\lfloor d/2\rfloor)$ 位级线和 $(k+\lfloor d/2\rfloor+1)$ 位级线之间.

11.8　设 ϕ 表示 Euler 函数, 即

$$\phi(r)=|\{\,s\mid 1\leqslant s\leqslant r\text{ 且 }\gcd(r,s)=1\,\}|.$$

证明存在正常数 c^* 和 $\tilde{c}$, 使得

(i) $\tilde{c}k^2\leqslant\sum_{r=1}^{k}\phi(r)\leqslant c^*k^2$;

(ii) $\tilde{c}k^3\leqslant\sum_{r=1}^{k}r\phi(r)\leqslant c^*k^3$;

(iii) $\tilde{c}\log k\leqslant\sum_{r=1}^{k}\dfrac{\phi(r)}{r^2}\leqslant c^*\log k$.

11.9　将定理 11.2 的第一个证明推广到直线的非简单配置, 即配置中某些直线可以平行, 两条以上的直线可交于一点.

11.10　设 $\mathcal{L}=\{\ell_1,\cdots,\ell_n\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中 n 条直线的集合, $w_i\geqslant 0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 是赋予 ℓ_i 的“权”, $r\leqslant n$ 为整数. 证明可将平面划分成 $s\leqslant r^2$ 个梯形 $\Delta_1,\cdots,\Delta_s$, 使得对每个 Δ_i, 与它的内部相交的直线的权的总和至多为 $c\sum_{i=1}^{n}w_i/r$, 其中 c 是某一适当的常数.

11.11 (Alon, Győri, 1986; Clarkson, Shor, 1989)　设 $\mathcal{L}$ 是平面中 n 条直线的集合, $0\leqslant k<n$ 是一个整数. 设 $H_k(\mathcal{L})$ 表示 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 的 k 位级线中的顶点数, 令

$$H_{\leqslant k}(n)=\max_{|\mathcal{L}|=n}\sum_{j=0}^{k}H_j(\mathcal{L}),$$

证明 $H_{\leqslant k}(n)\leqslant cnk$, 其中 c 是一个适当的常数.

11.12 (Aronov et al., 1993) 设 $\mathcal{L}$ 是平面中处于一般位置的 n 条直线的集合. 对直线的每个三元组, 考虑内切于三元组围成的三角形的开圆盘. 证明恰好与 $k(0 \leqslant k \leqslant n-3)$ 条直线相交的这种圆盘的个数为 $\binom{n-k-1}{2}$.

11.13 (Szemerédi, Trotter, 1983b) 给定平面中一个 n 点集和一个整数 $k > 2$, 证明包含至少 k 个点的互异直线的条数至多为 $c(n^2/k^3 + n/k)$. 证明除了常数 c 的值外, 这个结果是紧的.

11.14* (Szemerédi, Trotter, 1983b; Beck, 1983a) 给定平面中一个不共线的 n 点集 P, 证明存在一点 $p \in P$, p 落在至少 cn 条连接 p 和 P 中其他点的互异直线上, 其中 $c > 0$ 是某一适当的常数.

11.15 (Bárány et al., 1995) 给定 $\mathbb{R}^d$ 中由 n 个超平面组成的一个配置, 若一个胞腔有 n 个刻面(即该胞腔包含每个超平面的一部分), 则称它是**丰富的**.

(i) 证明平面中 $n \geqslant 5$ 条直线的任何配置至多有一个丰富的胞腔;

(ii) 证明对 $d \geqslant 3$, 丰富胞腔的个数至多为

$$\binom{n}{d-2} + Cn^{d-3},$$

其中 $C = C(d)$ 是依赖于 d 的某一常数. 另证明对充分大的 n, 这个界是渐近紧的.

第 12 章　关联数上下界的应用

关于距离分布的 Erdős 问题 (第 10 章引言中曾引述) 有着多方面的推广. 例如, 给定一个 n 点集 P, 可以尝试寻求 P 中满足某些特殊条件的 k 元组的个数的上界 ($k \geqslant 2$). 特别地, 对 $k=2$, 可以探讨使得直线 p_1p_2 将点集 $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $|P|=n$, 平分为点数 (大体) 相等的两部分的点对 $p_1, p_2 \in P$ 的最大个数 [参见文献 (Lovász, 1971; Erdős et al., 1973; Pach et al., 1992; Bárány et al., 1990; Aronov et al., 1991; Dey et al., 1993) 等]. 对 $k=3$, 我们也许希望得到具有相同面积的三角形 $p_1p_2p_3$ ($p_1, p_2, p_3 \in P$) 的个数的上界; 这里的条件 "具有相同面积" 可以是 "具有相同周长", 还可以是 "内部包含 P 中给定个数的其他点". Erdős 和 Purdy (1971, 1975, 1976, 1995) 提出了许多这样的问题. 本章利用 Szemerédi-Trotter 定理 (推论 11.8) 解决一部分这类问题. 对许多其他的应用, 须要利用, 在某些情形下还须要推广第 11 章给出的 Clarkson 等 (1990) 的强有力的证明技巧. 特别地, 将部分解决第 10 章开头提到的 Erdős 的第二个问题: 空间中由 n 个点确定的互异距离的最小个数是多少?

12.1　平面中的重复角

下述定理是推论 11.8 的一个简单结果.

定理 12.1 (Erdős, Purdy, 1971)　*给定平面中任一 n 点集 P, 则存在常数 $c>0$, 使得 P 中张成单位面积三角形的三元组的个数至多为 $cn^{7/3}$.*

证明　固定一点 $p \in P$. 对每个点 $q \in P-\{p\}$, 设 ℓ_q 和 ℓ_q' 表示平行于 pq 且与 pq 的距离均为 $2/|p-q|$ 的直线. 显然, pqr 确定一个单位面积的三角形当且仅当 $r \in \ell_q \cup \ell_q'$. 因此, 由点 p 和 P 中其他两点张成的单位面积三角形的个数是 $2(n-1)$ 条直线 ℓ_q, ℓ_q' ($q \in P-\{p\}$) 与 $P-\{p\}$ 中的点之间关联数的一半. 然而, 由推论 11.8 可知, 该数至多为 $cn^{4/3}$. 对每个点 $p \in P$, 重复同样的讨论即得结论. □

下述结论的证明 (与上述证明十分类似) 留作习题 (见习题 12.2).

定理 12.2　*给定平面中任一 n 点集 P, 则存在常数 $c>0$, 使得 P 中张成等腰三角形的三元组的个数至多为 $cn^{7/3}$.*

用同样方法可以证明, 在平面中确定同一个角 α 的三元组的最大个数是 $cn^{7/3}$. 然而, 这一结果可改进如下:

定理 12.3 (Pach, Sharir, 1992)　给定任一角 $0<\alpha<\pi$, 必存在常数 $c>0$, 使得在平面上 n 个点中, 确定同一角 α 的有序三元组的个数至多为 $cn^2\log n$, 而且除了 c 的值外, 对无穷多个 α 这个界是最佳可能的.

证明　为了利用直角坐标系, 仅对特殊情形 $\alpha=\pi/2$ 证明上界. 一般情形类似可证.

设 P 是平面中一 n 点集. 首先求由 P 的三点张成的且有两边与坐标轴平行的直角三角形的个数. 对任一 $p\in P$, 设 $h(p)$ 和 $v(p)$ 分别表示过点 p 的水平直线和竖直直线. 设 $h_1,h_2,\cdots,h_k$ 和 $v_1,v_2,\cdots,v_l$ 分别表示包含 P 中至少一个点的水平直线和竖直直线. 令

$$a_i=|h_i\cap P|,\quad b_j=|v_j\cap P|.$$

显然, 处于与轴平行位置且直角在点 p 处的三角形个数为 $(|h(p)\cap P|-1)(|v(p)\cap P|-1)$. 因此, 合要求的直角三角形的总数至多为

$$\sum_{h_i\cap v_j\in P}a_ib_j,$$

这里只含 P 的仅仅一个点的直线 h_i 和 v_j 可忽略不计. 将上述和式分成如下三部分:

$$\underbrace{\sum_{\substack{h_i\cap v_j\in P\\ a_i>\sqrt{n}}}a_ib_j}_{\sigma_1}+\underbrace{\sum_{\substack{h_i\cap v_j\in P\\ a_i\leqslant\sqrt{n}<b_j}}a_ib_j}_{\sigma_2}+\underbrace{\sum_{\substack{h_i\cap v_j\in P\\ a_i,b_j\leqslant\sqrt{n}}}a_ib_j}_{\sigma_3}.$$

因此

$$\sigma_1=\sum_{a_i>\sqrt{n}}a_i\Bigg(\sum_{h_i\cap v_j\in P}b_j\Bigg)\leqslant n\sum_{a_i>\sqrt{n}}a_i,$$

$$\sigma_2\leqslant\sum_{b_j>\sqrt{n}}b_j\Bigg(\sum_{h_i\cap v_j\in P}a_i\Bigg)\leqslant n\sum_{b_j>\sqrt{n}}b_j,$$

$$\sigma_3\leqslant\Bigg(\sum_{\substack{h_i\cap v_j\in P\\ a_i\leqslant\sqrt{n}}}a_i^2\Bigg)^{1/2}\Bigg(\sum_{\substack{h_i\cap v_j\in P\\ b_j\leqslant\sqrt{n}}}b_j^2\Bigg)^{1/2}=\Bigg(\sum_{a_i\leqslant\sqrt{n}}a_i^3\Bigg)^{1/2}\Bigg(\sum_{b_j\leqslant\sqrt{n}}b_j^3\Bigg)^{1/2},$$

其中最后一个不等式由 Cauchy-Schwarz 不等式推得.

绕原点将直角坐标系旋转角度 φ, 使得至少存在一个与轴平行的直角三角形. 对所有这样的角 $0\leqslant\varphi<\pi$, 重复上述分析即知, 由 P 张成的直角三角形的总数 N 满足

$$N\leqslant\sum_{\varphi}\left[\Bigg(\sum_{a_i^\varphi\leqslant\sqrt{n}}(a_i^\varphi)^3\Bigg)^{1/2}\Bigg(\sum_{b_j^\varphi\leqslant\sqrt{n}}(b_j^\varphi)^3\Bigg)^{1/2}+n\Bigg(\sum_{a_i^\varphi>\sqrt{n}}a_i^\varphi+\sum_{b_j^\varphi>\sqrt{n}}b_j^\varphi\Bigg)\right],$$

其中, a_i^φ (b_j^φ) 表示过 P 中至少两个点且方向角为 φ ($\varphi+\pi/2$) 的第 i 条 (j 条) 直线上 P 的点的个数.

设 $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{L}_{\geqslant k}$ 和 $\mathcal{L}_{\leqslant k}$ 分别表示过 P 中 k 个, 至少 k 个和至多 k 个 (但至少 2 个) 点的直线集. 再次利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$\begin{aligned} N &\leqslant \Big(\sum_{\varphi}\sum_{a_i^\varphi\leqslant\sqrt{n}}(a_i^\varphi)^3\Big)^{1/2}\Big(\sum_{\varphi}\sum_{b_j^\varphi\leqslant\sqrt{n}}(b_j^\varphi)^3\Big)^{1/2}+n\Big(\sum_{\varphi}\sum_{a_i^\varphi>\sqrt{n}}a_i^\varphi+\sum_{\varphi}\sum_{b_j^\varphi>\sqrt{n}}b_j^\varphi\Big)\\ &\leqslant \sum_{\ell\in\mathcal{L}_{\leqslant\sqrt{n}}}|\ell\cap P|^3+2n\sum_{\ell\in\mathcal{L}_{\geqslant\sqrt{n}}}|\ell\cap P|. \end{aligned}$$

设 $c_k=|\mathcal{L}_k|$, $C_k=|\mathcal{L}_{\geqslant k}|$, 则 $c_k=C_k-C_{k+1}$. 因此

$$\begin{aligned} N &\leqslant \sum_{2\leqslant k\leqslant\sqrt{n}}k^3c_k+2n\sum_{k\geqslant\sqrt{n}}kc_k\\ &= \sum_{2\leqslant k\leqslant\sqrt{n}}k^3(C_k-C_{k+1})+2n\sum_{k\geqslant\sqrt{n}}k(C_k-C_{k+1})\\ &\leqslant \sum_{2\leqslant k\leqslant\sqrt{n}}3k^2C_k+2n\left(\lceil\sqrt{n}\rceil C_{\lceil\sqrt{n}\rceil}+\sum_{k>\sqrt{n}}C_k\right). \end{aligned}$$

由习题 11.13 (Szemerédi-Trotter 定理, 即推论 11.8 的等价形式) 可知, 对某一适当常数 c, 有

$$C_k\leqslant c\cdot\max\left\{\frac{n^2}{k^3},\frac{n}{k}\right\}.$$

因此

$$\begin{aligned} N &\leqslant \sum_{2\leqslant k\leqslant\sqrt{n}}3k^2\frac{cn^2}{k^3}+2n\left(\lceil\sqrt{n}\rceil\frac{cn}{\lceil\sqrt{n}\rceil}+\sum_{k>\sqrt{n}}\frac{cn}{k}\right)\\ &\leqslant 3cn^2\sum_{2\leqslant k\leqslant\sqrt{n}}\frac{1}{k}+2cn^2+2cn^2\sum_{k>\sqrt{n}}\frac{1}{k}\\ &\leqslant 3cn^2\log n, \end{aligned}$$

上界得证.

下面确定下界. 设 $0<\alpha<\pi$ 具有如下性质: 对整数 a, b, m 有 $\tan\alpha=a\sqrt{m}/b$, 其中 $b>0$, $m>0$ 不是平方数 (但允许 $m=1$). 对任一充分大的 n, 构造一个 n 点集 P, 使得至少 $c_\alpha n^2\log n$ 个三元组能确定角 α ($c_\alpha>0$).

令 $d_\alpha=2\max\{|a|m,b\}$, 不妨假设对某正整数 k, 有 $n=(4k+1)^2$. 设 P 是形式为 $(i,j\sqrt{m})$ 的所有“格点”构成的集合, 其中 $-2k\leqslant i,j\leqslant 2k$.

为了得到确定角 α 的所有 P 的有序三元组个数的下界, 设 p 和 q 是互素的整数, $0 < p \leqslant q \leqslant k$, 考虑从原点 $\mathbf{0} = (0,0)$ 到 $(p, q\sqrt{m})$ 的射线 ρ. 显然, ρ 至少包含 P 中异于原点的

$$\left\lfloor \frac{k}{\max\{p,q\}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{q} \right\rfloor$$

个点. 设 ρ' 表示从原点 $\mathbf{0}$ 到另外一点 $(p', q'\sqrt{m})$ 的射线, 其中 p' 和 q' 互素, 且 $-k \leqslant p', q' \leqslant k$. 显然, ρ' 可以通过 ρ 按逆时针方向旋转角度 α 得到, 当且仅当

$$\frac{\dfrac{q'\sqrt{m}}{p'} - \dfrac{q\sqrt{m}}{p}}{1 + \dfrac{q'\sqrt{m}}{p'}\dfrac{q\sqrt{m}}{p}} = \tan\alpha = \frac{a\sqrt{m}}{b},$$

即

$$\frac{p'}{q'} = \frac{pb - qam}{qb + pa}.$$

如果这一等式成立, 那么

1. 在 ρ' 上至少存在 P 的

$$\left\lfloor \frac{k}{\max\{pb - qam, qb + pa\}} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{k}{2\max\{p,q\}\max\{|a|m, b\}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{qd_\alpha} \right\rfloor$$

个点;

2. 对所有的 $x \in (\rho \cap P) - \{\mathbf{0}\}$, $x' \in (\rho' \cap P) - \{\mathbf{0}\}$, 角 $x\mathbf{0}x'$ 等于 α.

对从任一“格点” $(i, j\sqrt{m}), -k \leqslant i, j \leqslant k$, 出发的射线可重复进行完全相同的讨论. 因此确定角 α 的三元组数至少为

$$(2k+1)^2 \sum_{q \leqslant k} \lfloor k/q \rfloor \left\lfloor \frac{k}{qd_\alpha} \right\rfloor \phi(q) \geqslant \frac{n^2}{100 d_\alpha} \sum_{q \leqslant k/d_\alpha} \frac{\phi(q)}{q^2},$$

其中 $\phi(q)$ 表示 Euler 函数. 因此, 利用习题 11.8(iii) 可推得, 至少有 $(\tilde{c}/200d_\alpha)n^2 \log n$ 个三元组能确定角 α. □

定理 12.1 和定理 12.2 中的界已由 Dumitrescu et al.(2008) 与 Pach, Tardos(2002) 稍作改进.

12.2　无重复距离的子集

Erdős (1950) 指出, 从任一平面无限点集中可选取无限个点, 使得它们确定的所有距离是互异的. Avis et al.(1991) 对有限点集确立了类似的结论, 该结论已由 Thiele (1993) 稍作改进.

定理 12.4 (Thiele) *存在一个具有如下性质的常数 $c>0$: 任一平面 n 点集至少含 $cn^{2/9}$ 个点, 使得由这些点确定的所有距离都是互异的.*

证明 设 P 是平面上一个固定的 n 点集. 如果一个 4 元子集 $Q\subseteq P$ 所确定的 6 个距离都是互异的, 那么称 Q 是**正则的**. 否则, 称 Q 是**奇异的**.

存在两种不同类型的奇异四元组. 若 Q 有三个点形成等腰三角形, 则称 Q 是 1 型的, 若 Q 由满足 $|q_1-q_2|=|q_3-q_4|$ 的两个不交的对 $\{q_1,q_2\}$ 和 $\{q_3,q_4\}$ 组成, 则称 Q 是 2 型的. 注意某些奇异四元组可以同时属于两种类型.

设 H 是一个顶点集为 $V(H)=P$, 边为 P 的奇异四元组的 4 均匀超图, 即 $E(H)=E_1\cup E_2$, 其中 E_i 表示由所有 i 型 $(i=1,2)$ 奇异四元组构成的集合. 由定理 12.2 可知, 对一适当的常数 $c_1>0$, 有

$$|E_1|\leqslant c_1n^{10/3}.$$

设 $\{d_1,\cdots,d_r\}$ 是由 P 确定的所有互异距离的集合, m_i 表示 d_i 的重数, 即满足 $|p-q|=d_i$ 的对 $\{p,q\}\subseteq P$ 的个数. 显然,

$$\sum_{i=1}^{r}m_i=\binom{n}{2},$$

由推论 11.11 可知, 对每个 i, 有 $m_i\leqslant c_2n^{4/3}$. 因此, 对某个常数 $c_3>0$, 有

$$\begin{aligned}|E_2|&\leqslant\sum_{i=1}^{r}\binom{m_i}{2}\\&\leqslant\frac{\binom{n}{2}}{c_2n^{4/3}}\binom{c_2n^{4/3}}{2}\\&\leqslant c_3n^{10/3}.\end{aligned}$$

注意 H 的**独立数** $\alpha(H)$ 指的是 $V(H)$ 的不含 $E(H)$ 的元素的最大子集中元素的个数. 定理 10.11 表明, 对 $|E(H)|\geqslant n$, 有

$$\begin{aligned}\alpha(H)&\geqslant c_4\left(\frac{n^4}{|E(H)|}\right)^{1/3}\geqslant c_4\left(\frac{n^4}{|E_1|+|E_2|}\right)^{1/3}\\&\geqslant c_4\left[\frac{n^4}{(c_1+c_3)n^{10/3}}\right]^{1/3}=cn^{2/9}.\end{aligned}$$

而这就表明 P 有一个大小至少为 $cn^{2/9}$ 的子集, 它的所有四元组都是正则的. □

根据 Lefmann, Thiele(1995) 的一个最近结果, 定理 12.4 中的界可改进为 $cn^{1/4}$. 然而, 这个界很有可能可进一步改进为大约 $n^{1/3}$ (Erdős, Guy, 1970).

适当修改上述方法可证得下述相关结果, 证明留给读者 (见习题 12.3).

定理 12.5 (Zhang, 1993) *存在一个常数 $c > 0$, 使得对每个正整数 n, 可从 $\lfloor\sqrt{n}\rfloor \times \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ 网格*

$$S_n = \{(i,j) \mid 0 \leqslant i,j < \lfloor\sqrt{n}\rfloor \text{ 是整数}\}$$

中选取 $m = \lfloor c(n/\log n)^{1/3}\rfloor$ 个点, 这些点确定的 $\binom{m}{2}$ 条直线具有不同的斜率.

12.3 有界自由度曲线族

下面陈述 Szemerédi-Trotter 定理 (即推论 11.8) 和 Clarkson 等定理 (即定理 11.10) 两者的一个共同推广, 该推广有着若干很有意义的结果. 我们只概述定理的证明步骤, 因为这一证明是第 11 章证明方法的颇为直接的推广.

设 Γ 是 xy 平面上由 d 个实参数确定的曲线族. 假设存在一个整数 s, 使得

(a) 曲线对 x, y, 及参数的相依关系是代数的, 次数至多为 s;

(b) Γ 中任意两条不同曲线的交点不超过 s 个;

(c) 任给平面上 d 个点, Γ 中至多有 s 条曲线经过所有这些点,

则称 Γ 是**自由度为 d 的正则曲线族**. 例如, 所有圆 (单位圆) 构成的曲线族的自由度是 3 (2).

定理 12.6 (Pach, Sharir, 1992, 1998) *设 Γ 是自由度为 d 的正则曲线族, 则存在常数 $c = c_\Gamma$, 使得 m 个点与 Γ 中 n 条曲线之间的关联总数至多为 $c\left(m^{\frac{d}{2d-1}}n^{\frac{2d-2}{2d-1}} + m + n\right)$.*

证明 (梗概) 设 $\mathcal{I}_\Gamma(m,n)$ 表示 m 个点与 Γ 中 n 条曲线之间的最大关联数.

步骤 1: 由定理 9.5, 直接得到一个较弱的界

$$\mathcal{I}_\Gamma(m,n) \leqslant c'(mn^{\frac{d-1}{d}} + n).$$

步骤 2: 设 P 和 $\Gamma' \subseteq \Gamma$ 分别表示一个含 m 个点的固定集合和一个含 n 条曲线的固定集族. 随机选取一个 r 元子集 $\mathcal{R} \subseteq \Gamma'$. 若一曲线自交于点 p, 或在点 p 有一条竖直切线, 则称点 p 是曲线的**临界点**. 在 $\mathcal{R}$ 中过一对曲线的每个交点及每个临界点向两个方向画竖直直线, 直到所画竖直直线遇到 $\mathcal{R}$ 的其他元素的另一部分, 这样就将配置 $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ 的胞腔划分成类似梯形的区域 $\Delta_1, \cdots, \Delta_s (s \leqslant c''r^2)$. 设 m_i 和 n_i 分别表示 Δ_i 内部 (或左边的竖直边上) 点的个数及 Γ' 中与 Δ_i 的内部相交的曲线条数. 由类似于定理 11.2 的证明可得

$$E\left[\sum_{i=1}^{s} n_i\right] < \tilde{c}nr,$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{s} m_i n_i^{\frac{d-1}{d}}\right] < \tilde{c}m\left(\frac{n}{r}\right)^{\frac{d-1}{d}}.$$

因此, 对 $\mathcal{R}$ 的某个选取, 有

$$\sum_{i=1}^{s} n_i \leqslant 2\tilde{c}nr\,,$$

$$\sum_{i=1}^{s} m_i n_i^{\frac{d-1}{d}} \leqslant 2\tilde{c}m\left(\frac{n}{r}\right)^{\frac{d-1}{d}}\,.$$

步骤 3: 注意涉及在某“梯形”的“上”或“下”边界上的点的最大关联数至多为 $\bar{c}nr+m$ (因为 $\Gamma'-\mathcal{R}$ 的每条曲线与 $\mathcal{R}$ 的任一元素仅有固定个交点). 因此

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\Gamma(m,n) &\leqslant \sum_{i=1}^{s}\mathcal{I}_\Gamma(m_i,n_i)+\bar{c}nr+m\\ &\leqslant c'\sum_{i=1}^{s}(m_i n_i^{\frac{d-1}{d}}+n_i)+\bar{c}nr+m\\ &\leqslant 2c'\tilde{c}\left(m\left(\frac{n}{r}\right)^{\frac{d-1}{d}}+nr\right)+\bar{c}nr+m\,.\end{aligned}$$

如果 $(c'm/c)^d \leqslant n$, 从步骤 1 所得的界可知定理成立. 否则, 选取 $r=\min\{\lceil (m^d/n)^{1/(2d-1)}\rceil, n\} \geqslant 10$, 定理得证. □

下面仅提出定理 12.6 (见习题 12.4) 的一个直接推论.

推论 12.7 (Pach, Sharir, 1992) *存在常数 $c>0$, 使得任一平面 n 点集至多有 $cn^{7/3}$ 个三元组可确定单位周长的三角形.*

事实上, 再稍作一些努力, 即可由定理 12.6 推出, 平面中 n 个点确定的单位周长的三角形的最大个数为 $O(n^{16/7})$, 参见文献 (Pach, Sharir, 2004).

12.4 球面上的重复距离

给定单位球面 $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上的 n 点集 P 及实数 $0<\alpha<2$, 设 $h(P,\alpha)$ 表示满足 $|p-q|=\alpha$ 的点对 $p,q\in P$ 的个数. 令

$$h(n,\alpha)=\max_{\substack{P\subset\mathbb{S}^2\\|P|=n}} h(P,\alpha).$$

推论 12.8 (Erdős, Hickerson, Pach, 1989; Clarkson et al., 1990) *存在常数 $c>0$, 使得*

$$h(n,\alpha)<cn^{4/3}.$$

此外, 这个界对 $\alpha=\sqrt{2}$ 是渐近紧的.

证明 绕球面上的每个点画半径为 α 的圆. 经过球极平面投射后, 这些圆的象形成平面中自由度为 2 的正则曲线 (圆) 族, 从而由定理 12.6 可得推论中的第一

个结论.

为了证明对某 $c'>0$, 有 $h(n,\sqrt{2})>c'n^{4/3}$, 回顾定理 11.9. 该定理表明可以在平面 $z=-1$ 中选取一个 $\lfloor n/2\rfloor$ 点集 P 和一个含 $\lceil n/2\rceil$ 条直线的集族 $\mathcal{L}$, 使得这些点和直线之间的关联个数至少为 $c'n^{4/3}$. 对任一点 $p\in P$, 设 $\boldsymbol{u}_p$ 表示从原点 $\mathbf{0}=(0,0,0)$ 出发指向 p 的单位向量. 对任意 $\ell\in\mathcal{L}$, 设 $\boldsymbol{v}_\ell$ 表示从 $\mathbf{0}$ 出发垂直于经过 ℓ 和 $\mathbf{0}$ 的平面的单位向量. 设 u_p 和 v_ℓ 分别表示 $\boldsymbol{u}_p$ 和 $\boldsymbol{v}_\ell$ 的端点. 显然,

$$|u_p-v_\ell|=\sqrt{2}\iff \boldsymbol{u}_p\perp\boldsymbol{v}_\ell\iff p\in\ell.$$

因此, $P^*=\{u_p\mid p\in P\}\cup\{v_\ell\mid \ell\in\mathcal{L}\}$ 是以 $\mathbf{0}$ 为中心的单位球面上使得 $h(P^*,\sqrt{2})\geqslant c'n^{4/3}$ 的 n 点集. □

然而, 对 $\alpha\neq\sqrt{2}$, 仅有 $h(n,\alpha)$ 的一个弱得多的下界.

n 的**叠对数**是指 2 的最短指数"塔"的高度, 它的值至少是 n, 也就是说, n 的叠对数定义为满足

$$n\leqslant 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\Big\}\,k\text{次}$$

的最小整数 k.

定理 12.9 (Erdős, Hickerson, Pach, 1989) *设 $h(n,\alpha)$ 表示单位球面上 n 个点确定的距离 α 可能出现的最大次数, 则存在常数 $c>0$, 使得对任一 $\alpha>0$ 和任一正整数 n, 有*

$$h(n,\alpha)>cn\log^* n,$$

*其中 $\log^*$ 表示***叠对数函数**.

证明 设 S_0 是 $\mathbb{S}^2$ 的赤道, S_ε 是绕 S_0 的宽度为 ε 的如下定义的"带", 对 $\varepsilon\geqslant 0$,

$$S_\varepsilon=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\text{ 且 }|z|\leqslant\varepsilon\}.$$

设 $0<\alpha<2$ 是一固定数. 选取一个很小的常数 $\varepsilon>0$, 使得

$$2\sqrt{1-\varepsilon^2}>\alpha,$$

即界定带 S_ε 的两个圆的直径大于 α.

下面以递推方式构造一个 n_k 点集, 其中每个点到其他至少 k 个点的距离为 α.

基础: 对 $k=1$, 令 $n_1=2$, 在赤道上取两个距离为 α 的点.

假设: 假设已对某 k 构造了一个适当的 n_k 点集 $P=\{p_1,p_2,\cdots,p_{n_k}\}$, 使得每个 p_i 到其他至少 k 个点的距离为 α. 假设所有点在一个宽度为 $\varepsilon_k<\varepsilon$ 的窄带上, 即 $P\subset S_{\varepsilon_k}$.

归纳步骤: 经过 n_k 步构造一个 n_{k+1} 点集 P^* 如下: 设 u 和 v 是球面上的两个对径点, 对某充分小的 $\delta>0$, u 到北极 $(0,0,1)$ 的距离为 δ.

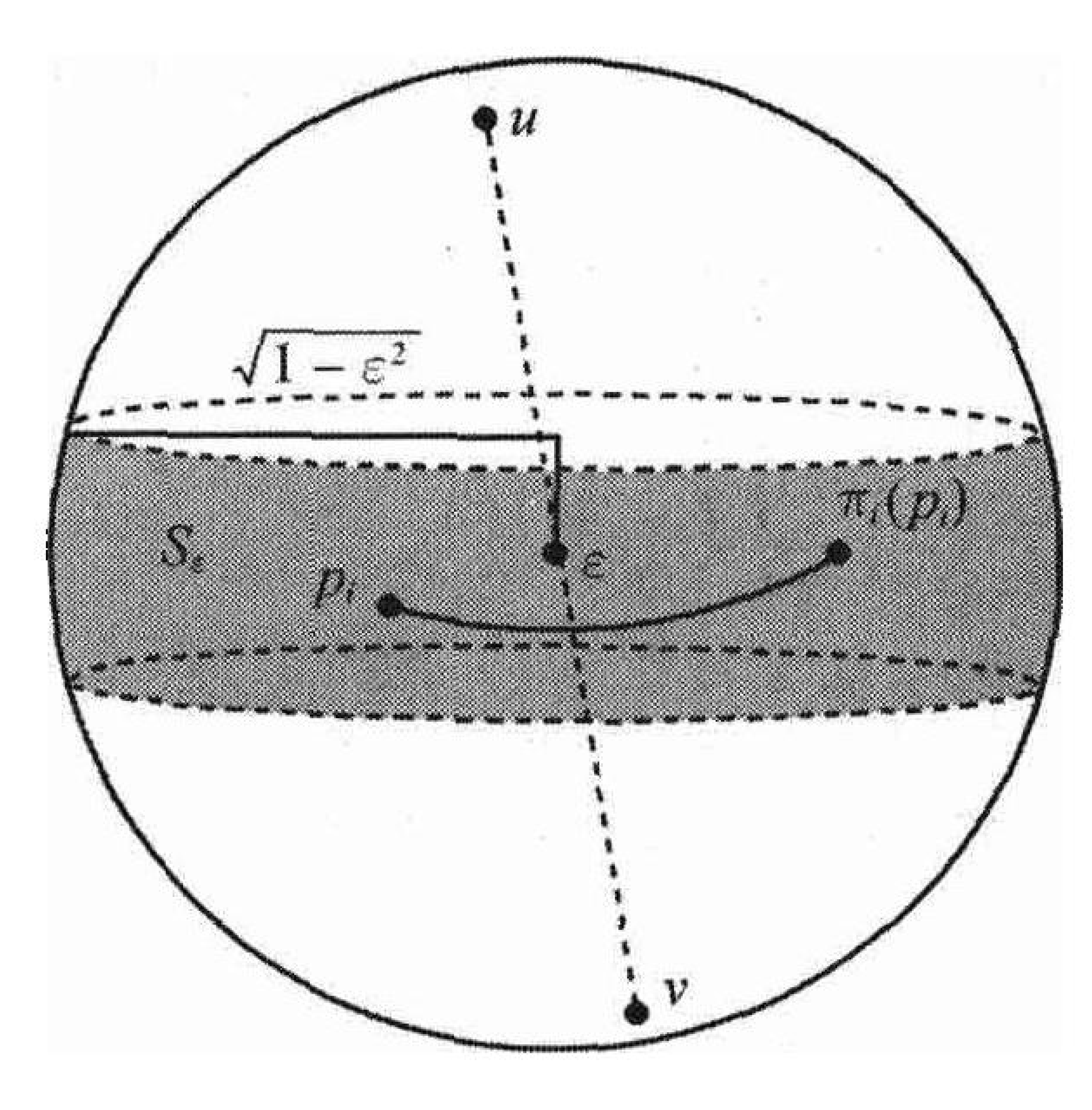


图 12.1 带 S_ε

设 $P^{(0)}=P$. 假设对某 $1\leqslant i\leqslant n_k$ 已构造 $P^{(0)},P^{(1)},\cdots,P^{(i-1)}$, 定义 $P^{(i)}$ 如下：绕轴 uv 旋转 $\mathbb{S}^2$, 使得 $p_i\in P$ 达到一个新的位置 p_i' 且 $|p_i-p_i'|=\alpha$. (如果 δ 充分小, 那么这样的旋转是可行的.) 更准确地说, 设 π_i 为等距映射, 使得

$$\pi_i(u)=u,\pi_i(v)=v \text{ 且 } |p_i-\pi_i(p_i)|=\alpha.$$

令

$$P^{(i)}=\pi_i\Big(P^{(0)}\cup P^{(1)}\cup\cdots\cup P^{(i-1)}\Big),$$

最后, 令

$$P^*=P^{(0)}\cup P^{(1)}\cup\cdots\cup P^{(n_k)},$$

如果 u,v (以及 δ) 选择适当, 那么下述条件均得到满足

(a) 以上条件是正确的, 即所有的 π_i 均存在;

(b) 集合 $P^{(0)},P^{(1)},\cdots,P^{(n_k)}$ 是两两不交的;

(c) 存在 $\varepsilon_{k+1}<\varepsilon$, 使得 $P^*\subseteq S_{\varepsilon_{k+1}}$.

由 (b) 可知, 对 $1\leqslant i\leqslant n_k$, $|P^{(i)}|=2^{i-1}|P^{(0)}|$, 这表明

$$|P^*|=n_{k+1}=n_k\cdot 2^{n_k}. \tag{12.1}$$

现在证明对每个 $p_i\in P^*$, 存在 $k+1$ 个不同的点, 这些点到点 p_i 的距离均为 α. 对某适当的子集 $I\subset\{1,2,\cdots,n_k\}$ 和 $p_j\in P$, 每个 $q\in P^*$ 可以写成

$$q=\Big(\prod_{i\in I}\pi_i\Big)p_j.$$

由归纳假设, P 的至少 k 个点 $p_{j_1},\cdots,p_{j_k}$ 到 p_j 的距离为 α. 因此, 点

$$q_{j_t}=\Big(\prod_{i\in I}\pi_i\Big)p_{j_t},\quad 1\leqslant t\leqslant k$$

到 q 的距离为 α. 而且由于 π_j 移动 p_j 的距离是 α, 所以点

$$q' = \begin{cases} \left(\prod_{i\in I-\{j\}} \pi_i\right)p_j, & j\in I, \\ \left(\prod_{i\in I\cup\{j\}} \pi_i\right)p_j, & j\notin I \end{cases}$$

到 q 的距离也是 α. 此外, 所有的 q_{j_t} 和 q' 是互异的. 因此, 至少存在 $k+1$ 个到 q 的距离为 α 的点. 最后, 条件 (c) 表明 P^* 的所有点位于带 S_ε 上, 即对 $k+1$ 归纳假设成立.

由递推公式 (12.1) 推知, 对某 $c>0$ 有 $k\geqslant c\log^* n_k$, 且上述构造可以扩展到 n 的任何值. □

定理 12.9 中的界已由 Swanepoel, Valtr (2004) 改进到 $cn\sqrt{\log n}$.

至此已能着手改进定理 10.9, 即估计 $f_d(n)$ 的误差项, 这里 $f_d(n)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ $(d\geqslant 4)$ 中 n 个点确定的单位距离可能出现的最大次数.

定理 12.10 (Erdős, Pach, 1990)　设 $d\geqslant 4$, $f_d(n)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中 n 个点确定的单位距离可能出现的最大次数, 则

$$f_d(n)=\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{\lfloor d/2\rfloor}\right)+\begin{cases} n-O(d), & d \text{ 是偶数}, \\ \Theta(n^{4/3}), & d \text{ 是奇数}. \end{cases}$$

[对每个充分大的 n, $O(f(n))$ 表示满足 $g(n)\leqslant cf(n)$ 的函数 $g(n)$, $\Theta(f(n))$ 表示满足 $c_1f(n)<h(n)<c_2f(n)$ 的函数 $h(n)$, 其中 c,c_1,c_2 是正的常数.]

证明　如果 $d\geqslant 4$ 是偶数, 那么显然可以调整 (定理 10.9 证明中所描述的)Lenz 的构造, 使得除了位于圆 C_i 上的至多两个点外, 对所有点存在其他两个点到其距离为 1. 因此

$$\begin{aligned} f_d(n) &\geqslant |E(T_{d/2}(n))|+n-\frac{d}{2} \\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{d/2}\right)(n^2-s^2)+\binom{s}{2}+n-\frac{d}{2} \\ &=\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{d/2}\right)+n+\frac{s^2}{d}-\frac{s}{2}-\frac{d}{2}, \end{aligned}$$

其中 s 是 n 被 $d/2$ 除后的余数. 当 $s=d/4$ 时, 上式取得最小值. 因此,

$$f_d(n)\geqslant\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{d/2}\right)+n-\frac{9}{16}d.$$

如果 $d\geqslant 5$ 是奇数, 那么我们可以选取 $\lfloor d/2\rfloor-1$ 个圆和一个半径为 $1/\sqrt{2}$ 的球面, 使得它们的中心都在原点, 且它们导出相互正交的子空间. 在每个圆和球面

上选取 $\lfloor n/\lfloor d/2\rfloor\rfloor$ 个点. 由推论 12.8 的第二个论断知, 可在球面上选点, 使得这些点至少确定 $c\left(\lfloor n/\lfloor d/2\rfloor\rfloor\right)^{4/3}=c_d n^{4/3}$ 个单位距离. 因此, 在这种情形下,

$$\begin{aligned} f_d(n) &\geqslant |E(T_{\lfloor d/2\rfloor}(n))|+c_d n^{4/3} \\ &\geqslant \frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{\lfloor d/2\rfloor}\right)+c_d n^{4/3}+O(d). \end{aligned}$$

至于上界, 首先假设 d 是偶数, n 很大, 且 P 是 $\mathbb{R}^d$ 中至少有 $|E(T_{\lfloor d/2\rfloor}(n))|+n$ 个单位距离点对的 n 点集. 应用习题 9.18 可推得, 存在满足 $|P_0|=1$ 和 $|P_i|=3$ $(1\leqslant i\leqslant \lfloor d/2\rfloor)$ 的子集 $P_0,P_1,\cdots,P_{\lfloor d/2\rfloor}\subset P$, 使得属于不同 P_i 的任意两点间的距离为 1. 但此时由习题 10.6 可知, 由 $P_1,\cdots,P_{\lfloor d/2\rfloor}$ 导出的二维平面一定是相互正交的, 且 P_0 的仅有的一个点必在与这些平面垂直的直线上. 这一矛盾完成了 d 是偶数情形时上界的证明. d 为奇数的情形, 证明较为复杂, 有兴趣的读者可参阅文献 (Erdős, Pach, 1990). □

对任意 n, Brass (1997) 确定了 $f_4(n)$ 的精确值. 事实表明, 这一精确值总是 $\lfloor n^2/4\rfloor+n$ 或 $\lfloor n^2/4\rfloor+n-1$. 当 n 充分大时, Swanepoel (2008) 最近成功地将这一结果推广到所有偶数维的情形.

12.5 点确定的互异距离

第 10 章开头部分曾引述, 1946 年 Erdős 发表在《美国数学月刊》上的著名论文提出的第二个问题是: $\mathbb{R}^d$ 中 n 个点确定的互异距离的最小个数 $g_d(n)$ 是多少? 在本章最后部分应用 Clarkson 等 (1990) 的定理 (即定理 11.2 与 11.10) 对上述问题给出部分回答.

显然,

$$f_d(n)\cdot g_d(n)\geqslant \binom{n}{2}. \tag{12.2}$$

特别地, 由推论 11.11 立即可得, 对某常数 $c>0$ 有 $g_2(n)\geqslant cn^{2/3}$. 这一结果早在发现推论 11.11 之前已由 Moser (1952) 给出, 随后由 Chung (1984) 和 Beck (1983a) 作了改进. 事实上, Beck 证明了一个更强的结果, 即对任意 $\varepsilon>0$, 平面上任一 n 点集 P, $n\geqslant n_0(\varepsilon)$, 都含一个点, 该点可实现至少 $n^{58/81-\varepsilon}$ 个互异距离.

推论 12.11 (Clarkson et al., 1990) *存在如下常数 $c>0$: 给定平面中任一 n 点集 P, 总可以选取一点 $p\in P$, 使得由 p 到 P 中其他点的互异距离的个数至少为 $cn^{3/4}$.*

证明 对任一点 $p\in P$, 设 $g_P(p)$ 表示由 p 出发的互异距离的个数, 即

$$g_P(p)=|\{\,|p-q|\mid p\neq q\in P\,\}|.$$

令

$$G_P = \sum_{p \in P} g_P(p),$$

对每对 $p, q \in P$, 以 p 和 q 为圆心画半径为 $|p-q|$ 的圆. 显然, 互异圆的总个数为 G_P. 由定理 11.10(ii) 可知, 这些圆与 P 中的点之间的关联数至多为 $c'((G_P)^{4/5}n^{3/5} + G_P + n)$. 另一方面, P 的每个点恰好在 $n-1$ 个圆上. 因此,

$$c'\left((G_P)^{4/5}n^{3/5} + G_P + n\right) \geqslant n(n-1),$$

从而对某常数 $c > 0$, 有

$$G_P \geqslant cn^{7/4}.$$

故存在一点 $p \in P$ 满足 $g_P(p) \geqslant cn^{3/4}$. □

Chung, Szemerédi, Trotter(1992) 证得, 对某常数 $c > 0$ 有 $g_2(n) \geqslant n^{4/5}/\log^c n$. Székely (1997) 设法去掉了这个公式中的对数因子. Solymosi, Cs. T. Tóth (2001) 将这一问题转化为加性数论问题, 并将下界改进到 $cn^{6/7}$, 取得了实质性突破. 按同样的方法, Katz, Tardos (2004) 证得 n 充分大时, $g_2(n) \geqslant n^{0.864}$, 而且任一平面 n 点集中存在一点, 从这一点出发至少有 $n^{0.864}$ 个互异距离. 这是这一方向的最强的结果.

在这个领域中最具挑战性的未解决问题之一是确定 $g_2(n)$ 的下述上界是否渐近紧.

定理 12.12 (Erdős, 1946)　设 $g_2(n)$ 表示平面上 n 个点确定的互异距离的最小个数, 则

$$g_2(n) \leqslant \frac{cn}{\sqrt{\log n}},$$

整数网格的大小为 $\lceil\sqrt{n}\rceil \times \lceil\sqrt{n}\rceil$ 的部分中的点可确定 $\dfrac{cn}{\sqrt{\log n}}$ 个互异距离.

对 $d = 3$, Clarkson 等 (1990) 已证 $f_3(n) \leqslant n^{3/2}\beta(n)$, 其中 $\beta(n) = 2^{c\alpha^2(n)}$, $\alpha(n)$ 是 Ackermann 函数的反函数 (增长极慢). 因此, 由 (12.2) 可得 $g_3(n) \geqslant n^{1/2}/2^{c'\alpha^2(n)}$.

对较大的 d, 有如下结果.

定理 12.13 (Erdős, 1946)　设 $g_d(n)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 2)$ 中 n 个点确定的互异距离的最小个数, 则存在适当的常数 c_d 和 c'_d, 使得对所有的 n, 有

$$c_d n^{3/(3d-2)} \leqslant g_d(n) \leqslant c'_d n^{2/d}.$$

证明　为简单起见, 设 $n^{1/d}$ 为整数, 且 P 是 $\mathbb{R}^d$ 中整数网格的大小为 $\underbrace{n^{1/d} \times n^{1/d} \times \cdots \times n^{1/d}}_{d\text{ 次}}$ 的部分中格点的集合. 因为 P 中任意两点间距离的形式

为 $\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots x_d^2}$, 其中每个 $0\leqslant x_i<n^{1/d}$ 是整数, 所以至多存在 $dn^{2/d}$ 个互异的距离. 因此, $g_d(n)\leqslant c'_d n^{2/d}$.

下面证明下界. 设 $g'_d(n)$ 表示 d 维球面 $\mathbb{S}^d\subseteq\mathbb{R}^{d+1}$ $(d\geqslant 2)$ 上 n 个点确定的互异距离的最小个数. 我们将证明下面更强的结果:

$$g_d(n)\geqslant c_d n^{3/(3d-2)},\quad g'_d(n)\geqslant c''_d n^{3/(3d-2)}.$$

注意到由推论 12.11 的证明可得 $g'_2(n)\geqslant c_2n^{3/4}$, 即对 $d=2$, 结论成立.

假设已验证对 $d-1$ 结论成立, 欲证对 d 结论成立. 为了验证第一个不等式, 注意到如果点集 P $(|P|=n)$ 有一个元素 p_i 满足

$$g_P(p_i)\leqslant n^{3/(3d-2)},$$

那么存在一个中心在 p_i 的 $(d-1)$ 维球面, 该球面至少含

$$\frac{n-1}{n^{3/(3d-2)}}\geqslant\frac{1}{2}n^{1-\frac{3}{3d-2}}$$

个点. 由归纳假设可知, P 确定的互异距离的个数至少为

$$c''_{d-1}\left(\frac{1}{2}n^{1-\frac{3}{3d-2}}\right)^{\frac{3}{3(d-1)-2}}\geqslant\frac{c''_{d-1}}{2}n^{3/(3d-2)}.$$

第二个不等式的证明完全相同. □

从 Clarkson 等的 3 维界开始归纳, 可以进一步将定理 12.13 中的下界大致改进到 $n^{1/(d-1)}$. 已知的最优下界归功于 Solymosi, Vu (2004, 2007), 他们证得, 对每个 $d\geqslant 2$ 有 $g_d(2)\geqslant c(n^{\frac{2}{d}-\frac{2}{d(d+2)}})$, 其中 $c>0$ 是一常数. 对 d 的较大值, 这个下界与定理 12.13 中的上界异乎寻常地接近.

习　题

12.1 (Erdős, Purdy, 1971)　给出平面 n 点集确定的单位面积三角形的最大个数的下界.

12.2　证明对任一平面 n 点集, 可确定等腰三角形的三元组的个数是 $O(n^{7/3})$.

12.3 (Zhang, 1993)

(i) 存在常数 $c>0$, 使得对每个正整数 n, 均可从大小为 $\lfloor\sqrt{n}\rfloor\times\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ 的网格

$$S_n=\{(i,j)\mid 0\leqslant i,j<\lfloor\sqrt{n}\rfloor\text{ 是整数}\}$$

中选取 $m=\lfloor c(n/\log n)^{1/3}\rfloor$ 个点, 这些点确定的所有 $\binom{m}{2}$ 条直线有不同的斜率;

(ii) (Erdős, Graham et al., 1992) 证明不可能从网格 S_n 中选取多于 $c'n^{2/5}$ 个点, 使得由这些点确定的所有直线有不同的斜率.

12.4 (Pach, Sharir, 1992)　证明对任一平面 n 点集,

(i) 确定单位周长三角形的三元组的最大个数为 $O(n^{7/3})$;

(ii) 确定内切圆半径为 1 的三角形的三元组的最大个数为 $O(n^{7/3})$.

12.5 (Elekes, Erdős, 1994; Pach)　$\mathbb{R}^d$ 中的两个集合称为**位似的**, 如果它们彼此相似且处于平行位置.

(i) 证明任一 n 点集 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 至多有 $n^{1+1/d}$ 个 $(d+1)$ 元组可确定两两位似的单纯形;

(ii) 证明上述界是渐近紧的.

12.6 (Elekes, Erdős, 1994)　证明存在 $c > 0$, 使得对任何三角形 T 和 $n \geqslant 3$, 在 $\mathbb{R}^2$ 中存在一个至少含 cn^2 个三元组的 n 点集, 该点集导出一个与 T 相似的三角形.

12.7 (Elekes, Erdős, 1994)　设 α 是一个超越数, $T = \{0, 1, 2, \alpha\}$. 证明对任一 $\varepsilon > 0$ 和充分大的 n, 存在直线上的 n 点集至少包含 $n^{2-\varepsilon}$ 个 T 的相似拷贝.

12.8 (Erdős, Füredi, 1993; Alon)　证明对每个 $\varepsilon > 0$, 存在具有如下性质的 $C = C(\varepsilon) > 0$: 设 P 是半径为 n 的圆盘内的 Cn 个点的集合, 其中任意两点间的距离至少为 1. 则对任一 α $(0 \leqslant \alpha < \pi)$, 可找到点 $p, q, r \in P$, 使得 $|\beta - \alpha| \leqslant \varepsilon$, 其中 β 表示 $\angle pqr$.

12.9　(i) (Croft, 1967; Conway et al., 1979)　证明在 $\mathbb{R}^3$ 中 n 点集的三元组可导出一个固定角 α 的最大次数为 $o(n^3)$;

(ii) (Purdy, 1988) 构造一个 n 点集 $P \subset \mathbb{R}^4$, 使得至少有 cn^3 个三元组确定角 $\pi/2$.

12.10　两个不交的紧集 C 和 D 之间的距离定义为 $\min\limits_{c \in C, d \in D} |c-d|$. 设 $\{C_1, \cdots, C_n\}$ 是平面上一凸体的两两不交的平移构成的集族. 证明至多存在 $cn^{4/3}$ 对 C_i, C_j, 它们相互之间的距离是 1.

12.11 (Chung, 1989)　设 $f_3(n)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中 n 个点确定的单位距离可出现的最大次数. 证明中不得应用定理 12.13 之前引述的 Clarkson 等 (1990) 的结果. 证明对某适当的常数 c, 有

$$f_3(n) < cn^{11/7}.$$

12.12 (Elekes)　证明对每个 $\varepsilon > 0$, 存在一个有如下性质的常数 $C = C(\varepsilon)$: n 点集 $P \subset \mathbb{R}$ 的两两相似的 $\lfloor \varepsilon n \rfloor$ 元子集的个数不能超过 Cn.

第 13 章　再论重复距离

前几章 (特别是第 10 章) 给出了有关 d 维欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 中 n 个点确定的距离分布的一些结果. 提出了 $f_d(n)$ 的估计问题, 即 $\mathbb{R}^d$ 中 n 个点中同一距离可能出现的最大次数问题, 找到了研究这些问题的一些极为有效的方法, 但即使在平面情形 $(d = 2)$ 也远未得到令人满意的答案. 尽管如此, 如果对点集附加一些**特殊条件** (例如, 它们处于凸位置, 或者一般位置等), 或者如果关心的是一些**特殊距离** (例如, 最大距离或最小距离) 可能重复出现的最大次数, 那么类似的问题通常会变得容易一些. 本章的目的就是给出一些这样的结果, 但即使在这一范围内未解决的问题也要比已解决的问题多得多.

13.1　处于凸位置的点集

给定平面上的 n 点集 $P = \{p_1, \cdots, p_n\}$, 如果 P 的 n 个点构成一凸 n 边形的顶点集, 则称 P 处于**凸位置**. 按惯例, 设 $f(P)$ 表示使 p_i 与 p_j 的距离 $|p_i - p_j|$ 等于 1 的点对 (p_i, p_j) 的个数, 其中 $i < j$. 进而设

$$f^{\text{conv}}(n) = \max_P f(P),$$

其中的最大值取遍所有处于凸位置的 n 点集.

Erdős, L. Moser (1970) [又参见文献 (Erdős, 1980)] 曾猜想存在常数 c, 使得 $f^{\text{conv}}(n) \leqslant cn$. 这一问题至今仍未解决. Füredi (1990) 给出了一个非平凡的上界, 即下面的结果.

定理 13.1 (Füredi)　*设 $f^{\text{conv}}(n)$ 表示处于凸位置的 n 点中单位距离可出现的最大次数, 则存在常数 $c > 0$, 使得*

$$f^{\text{conv}}(n) \leqslant cn \log n.$$

为了证明此定理, 需要一个辅助结果, 该结果涉及不含某种给定类型子矩阵的 $m \times n$ $(0,1)$ 矩阵中元素 1 的最大个数. 显然极图理论中许多问题可以借助 "禁用" 子矩阵重新表述. 例如, 定理 9.5 就可解释为不含元素全为 1 的 $r \times s$ 子矩阵的 $m \times n\,(0,1)$ 矩阵中元素 1 的个数的上界. 许多这种类型的其他结果参见文献 (Anstee, 1985, Anstee, Füredi, 1986, Bienstock, Győri, 1991, Frankl, Füredi, Pach, 1987, Füredi, Hajnal, 1992, Pach, Tardos, 2006, Marcus, Tardos, 2004, Tardos, 2005).

这里用到下面的结果.

引理 13.2 (Füredi; Bienstock-Győri)　设 M 是一 $m \times n$ 的 $(0,1)$ 矩阵, 不含形如

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ 1 & * & 1 \end{pmatrix}$$

的子矩阵, 其中 $*$ 表示一未特别指明的值, 则 M 中 1 的个数不超过 $m + (m + n)\lfloor \log n \rfloor$.

证明　为了给出 M 中 1 的个数的上界, 对某些 1 进行标号, 然后分别就标号的与未标号的 1 的个数给出界.

令矩阵元 $m_{ij} = 1$ 的标号为 (j, k), 如果存在整数 p, q $(j < p < q \leqslant n)$, 使得

$$m_{i,p} = m_{i,q} = 1\,,$$
$$p - j < 2^k \leqslant q - j$$

$(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j < n,\ 1 \leqslant k \leqslant \lfloor \log n \rfloor)$. 这样, 互异标号的个数至多为 $n \lfloor \log n \rfloor$.

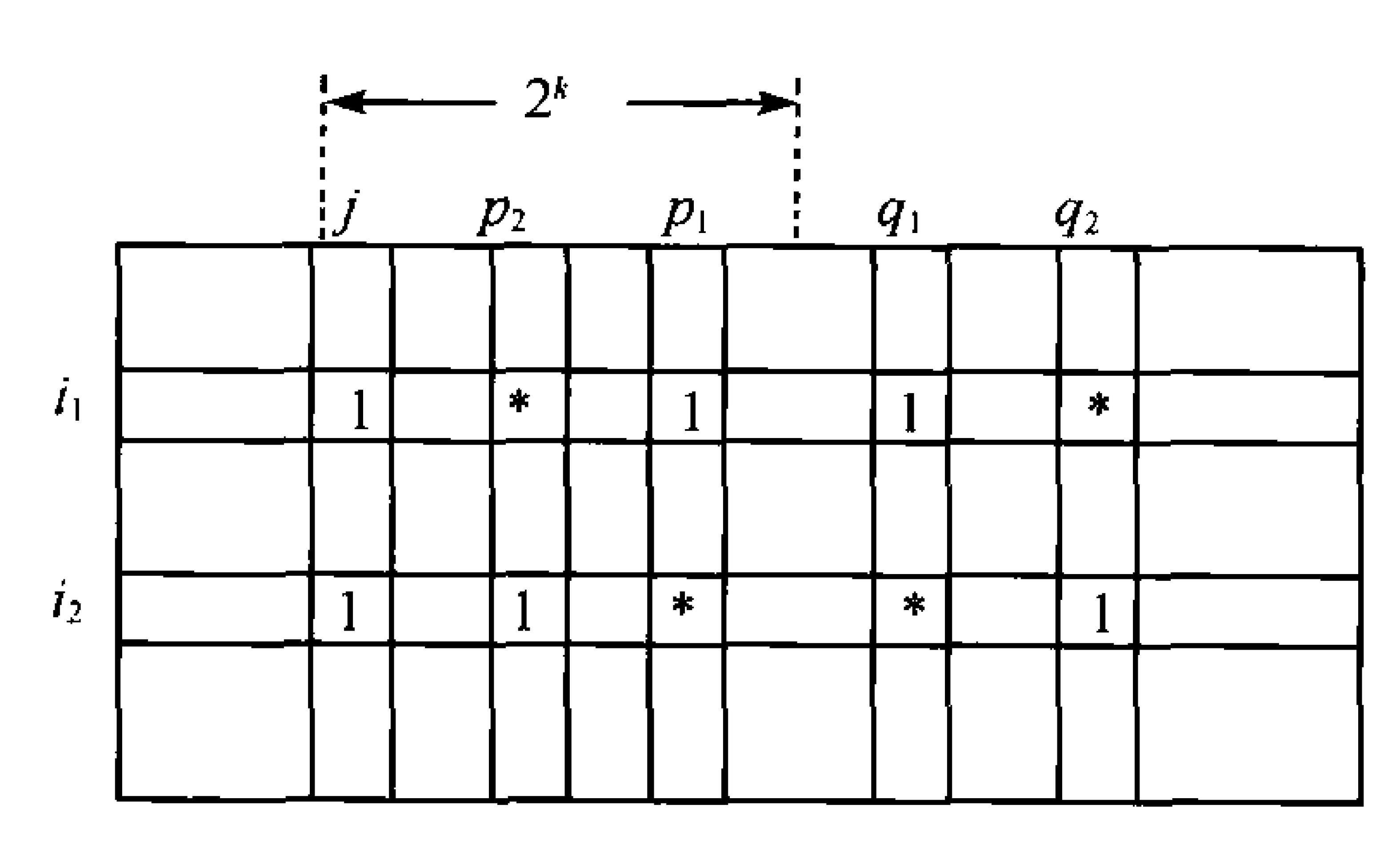


图 13.1　引理 13.2 的证明图示; 选取 $p = p_1$, $q = q_2$

可以断言任意两个不同的非零元有不同的标号. 以反证法证之, 假设两个不同的元 $m_{i_1,j} = m_{i_2,j} = 1$ $(i_1 < i_2)$ 有相同的标号 (j, k), 见图 13.1. 则可选取整数 p, q $(j < p < q \leqslant n)$, 使得

$$m_{i_1,p} = m_{i_2,q} = 1\,,$$
$$p - j < 2^k \leqslant q - j\,.$$

这就表明第 i_1, i_2 行和第 j, p, q 列导出一形如 M_0 的子矩阵, 矛盾.

下面估计 M 的单独一行中未标号的 1 的个数. 设 $m_{i,j_1} = m_{i,j_2} = \cdots = m_{i,j_t}$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_t)$ 为 M 的第 i 行中未标号的非零元, 则对每一个 $1 \leqslant s < t$, 有

$$j_t - j_s > 2(j_t - j_{s+1})\,,$$

因为否则就有

$$j_t - j_s \geqslant 2(j_{s+1} - j_s),$$

m_{i,j_s} 就会被标为 $(j_s, \lfloor\log(j_t - j_s)\rfloor)$. 因此, 如果 $t > 1$, 则

$$\begin{aligned} j_t - j_1 &\geqslant 2(j_t - j_2) + 1 \geqslant 2^2(j_t - j_3) + 2 + 1 \geqslant \cdots \\ &\geqslant 2^{t-2}(j_t - j_{t-1}) + 2^{t-3} + 2^{t-4} + \cdots + 1 \\ &\geqslant 2^{t-1} - 1. \end{aligned}$$

这就表明 $2^{t-1} \leqslant n$, 即第 i 行中未标号元的个数 t 不能超过 $1 + \lfloor\log n\rfloor$.

因此, $\boldsymbol{M}$ 中 1 的个数至多为

$$n\lfloor\log n\rfloor + m(1 + \lfloor\log n\rfloor) = m + (m+n)\lfloor\log n\rfloor. \qquad \square$$

引理 13.3 设 C_1, C_2 为一凸多边形 C 的两条分别包含 n_1, n_2 个顶点的不交弧. 若 p 是 C_1 的顶点, q 是 C_2 的顶点, 且 p, q 的距离 $|p-q| = 1$, 则点对 (p,q) 的个数至多为

$$2n_1 + 2(n_1 + n_2)\lfloor\log n_2\rfloor.$$

证明 设 $p_1, \cdots, p_{n_1}$ 为 C_1 的顶点, 按逆时针顺序排列, $q_1, \cdots, q_{n_2}$ 为 C_2 的顶点, 按顺时针顺序排列.

定义一 $n_1 \times n_2$ 的 $(0,1)$ 矩阵 $\boldsymbol{M} = (m_{i,j})$, 其第 i 行和第 j 列分别与 p_i 和 q_j 有关,

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & |p_i - q_j| = 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

用两种颜色对 $\boldsymbol{M}$ 中的非零元着色如下: 如果 C 在 p_i 处有一条支撑直线 ℓ, 使得从 ℓ 到 $p_i q_j$ 顺时针方向的张角为锐角, 则元 $m_{i,j} = 1$ 着红色. 否则, $m_{i,j}$ 着蓝色.

于是 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_r + \boldsymbol{M}_b$, 其中 $\boldsymbol{M}_r$ $(\boldsymbol{M}_b)$ 是 $(0,1)$ 矩阵, 其元 1 是 $\boldsymbol{M}$ 中的红 (蓝) 色元.

我们断言 $\boldsymbol{M}_r$ 不含

$$\boldsymbol{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ 1 & * & 1 \end{pmatrix}$$

形式的子矩阵. 不然, 假设存在下标 $i_1 < i_2$ 和 $j_1 < j_2 < j_3$, 使得

$$|p_{i_1} - q_{j_1}| = |p_{i_1} - q_{j_2}| = |p_{i_2} - q_{j_1}| = |p_{i_2} - q_{j_3}| = 1,$$

所有这些单位距离均产生红元. 考虑凸四边形 $p_{i_1}p_{i_2}q_{j_3}q_{j_1}$(图 13.2). $\angle q_{j_1}p_{i_1}p_{i_2}$ 和 $\angle p_{i_2}q_{j_3}q_{j_1}$ 显然是锐角, 因为它们分别是等腰三角形 $\Delta q_{j_1}p_{i_1}p_{i_2}$ 和 $\Delta p_{i_2}q_{j_3}q_{j_1}$ 的对称角; $\angle q_{j_3}q_{j_1}p_{i_1}$ 是锐角, 因为由 C 的凸性知, 它小于 $\angle q_{j_2}q_{j_1}p_{i_1}$, 而 $\angle q_{j_2}q_{j_1}p_{i_1}$ 为一

等腰三角形的对称角; 最后, $\angle p_{i_1}p_{i_2}q_{j_3}$ 也是锐角, 因为 m_{i_2,j_3} 的着色为红色. 因此, 四边形 $p_{i_1}p_{i_2}q_{j_3}q_{j_1}$ 的四个角都小于 $\pi/2$, 矛盾.

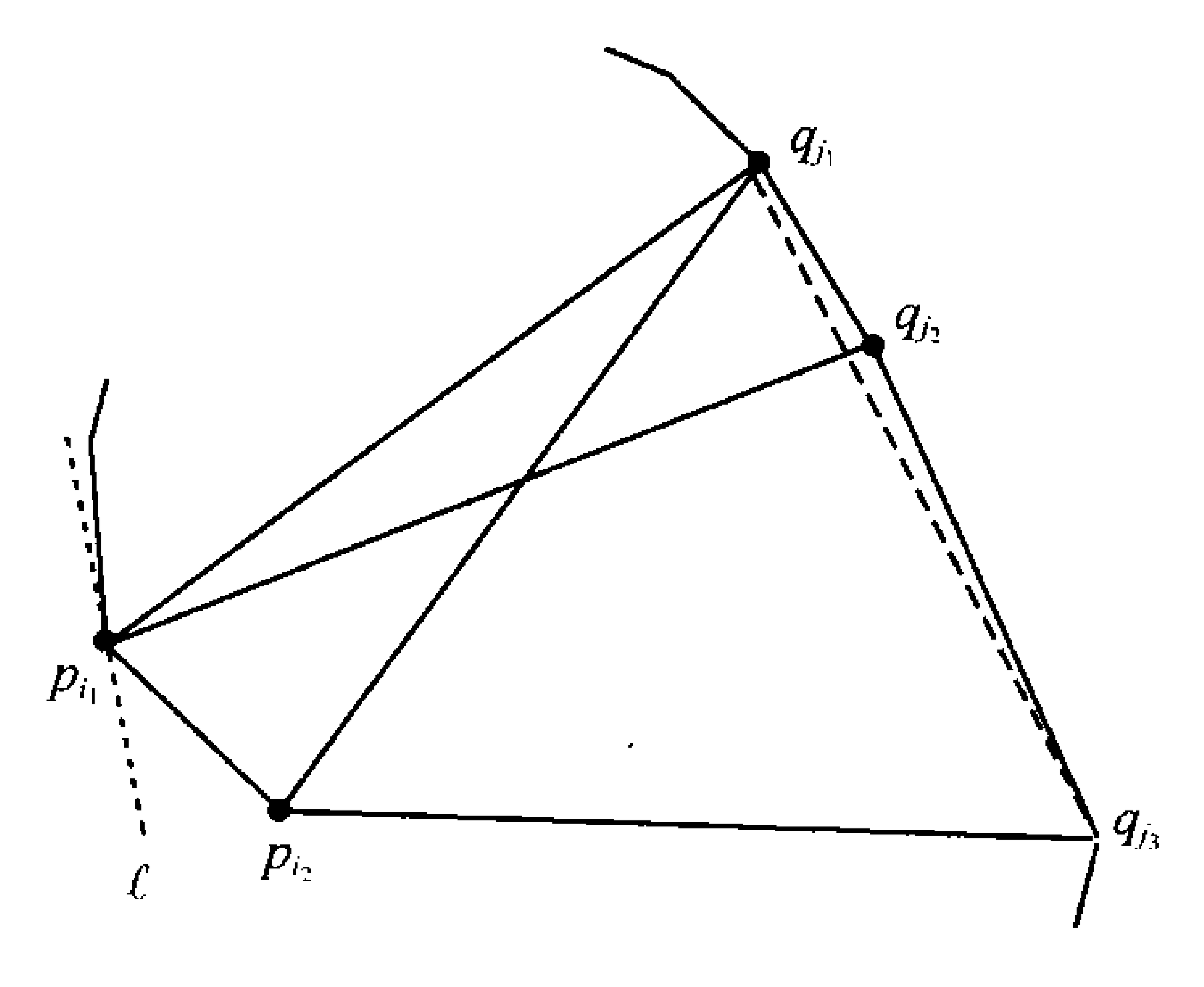


图 13.2 禁用构形

因此, 由引理 13.2, M 有至多 $n_1+(n_1+n_2)\lfloor\log n_2\rfloor$ 个红元, 对蓝元的个数可得相同的界. □

定理 13.1 的证明一 设 C 为凸 n 边形. 作相互距离为 $(1/\sqrt{2})-\varepsilon$ 的水平直线和垂直直线, 将平面划分成相等的正方形. 设 C_i 表示 C 落在第 i 个正方形内的部分. 同一个正方形内的任意两个点的距离小于 1. 另一方面, 如果选择充分小的 $\varepsilon>0$, 则能与 C_i 的某元素相距单位距离的每一个点必落在与第 i 个正方形最近的 24 个正方形的某一个中. 设 $J(i)$ 表示这 24 个正方形的标记构成的集合, n_i 表示 C_i 中的顶点数. 由引理 13.3 可得, C 的顶点确定的单位距离可出现的次数至多为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\in J(i)}(2n_i+2(n_i+n_j)\lfloor\log n_j\rfloor)\\&<24\sum_i n_i(1+\lfloor\log n\rfloor)+\sum_i\sum_{j\in J(i)}n_j\lfloor\log n_j\rfloor\\&\leqslant 24n(1+2\lfloor\log n\rfloor).\end{aligned}$$ □

Pach, Tardos (2006) 利用上面证明中用到的禁用子矩阵法给出了推论 11.11 的不同证明.

下面是 Brass, Pach (2001) 给出的定理 13.1 的特别简短的证明. 另一不同的证明见 Brass, Károlyi, Valtr(2003).

定理 13.1 的证明二 设 $f^{\text{conv}}(n)$ 表示平面上处于凸位置的 n 点中单位距离可能出现的最大次数. 设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是一个凸多边形的按此循环顺序排列的顶点, 使得 $f^{\text{conv}}(n)$ 可达. 定义几何图 G 如下: 用直线段 (**边**) 连接 $P=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 中的两点, 当且仅当两点间的距离为 1. 取 p_1 的**对径**点 p_i, 也就是说, 假设存在两

条分别经过 p_1 与 p_i 的平行线 ℓ 与 ℓ', 使得 P 中所有的点落在由 ℓ 与 ℓ' 确定的带形区域中.

我们断言, 除 G 的至多 $2n$ 条边以外其他所有的边均与 p_1p_i 交叉. 为证此结论, 不妨假设 ℓ 与 ℓ' 平行于 x 轴, 且 G 的任何边均不与 y 轴平行. 对 G 的边着色如下: 如果边的斜率为正, 则着**红色**, 否则着**蓝色**. 将每一条落在 p_1p_i 的左 (右) 侧闭半平面的红边分配给其左 (右) 端点. 很容易看出 P 的每一个元分配到至多一条红边. 因此, 不与 p_1p_i 交叉的红边数至多为 n. 同样, 不与 p_1p_i 相交的蓝边数也至多为 n, 断言成立.

不失一般性, 假设 $i > n/2$, 否则顶点可以反向编号. 取 $p_{\lceil i/2\rceil}$ 的对径点 p_j. 同上, G 至多有 $2n$ 条边不与 $p_{\lceil i/2\rceil}p_j$ 交叉. G 的每一条与 p_1p_i 和 $p_{\lceil i/2\rceil}p_j$ 交叉的边连接一对点, 这一对点属于集合

$$P_1 := \{p_2, p_3, \cdots, p_{\lceil i/2\rceil-1}\} \cup \{p_{i+1}, p_{i+2}, \cdots, p_{j-1}\}$$

或

$$P_2 := \{p_{\lceil i/2\rceil+1}, p_{\lceil i/2\rceil+2}, \cdots, p_{i-1}\} \cup \{p_{j+1}, p_{j+2}, \cdots, p_n\}.$$

于是得到

$$f^{\text{conv}}(n) = |E(G)| \leqslant f^{\text{conv}}(|P_1|) + f^{\text{conv}}(|P_2|) + 4n.$$

利用 $|P_1| + |P_2| = n - 4$ 这一事实以及 $\min(|P_1|, |P_2|) \geqslant (n-7)/4$, 由归纳法定理得证. □

目前已知 $f^{\text{conv}}(n)$ 的最佳下界是 Edelsbrunner, Hajnal (1991) 给出的.

定理 13.4 (Edelsbrunner-Hajnal) *设 $f^{\text{conv}}(n)$ 表示凸 n 边形的顶点确定的单位距离可能出现的最大个数, 则*

$$f^{\text{conv}}(n) \geqslant 2n - 7\,.$$

证明 设 p, q, r 是边长为 1 的等边三角形的顶点, 按顺时针顺序排列. 以圆心为 p, 半径为 1 的一段圆弧 $\widehat{qr}$ 连接 q 和 r. 类似地, $\widehat{rp}$ 与 $\widehat{pq}$ 是分别以 q 与 r 为圆心, 1 为半径的圆弧. 称由这三段圆弧围成的区域为**Reuleaux 三角形**.

设 p_0, q_0 和 r_0 分别表示 $\widehat{qr}$, $\widehat{rp}$ 和 $\widehat{pq}$ 的中点. 此外, 令 γ_p, γ_q 和 γ_r 分别表示以 p_0, q_0 和 r_0 为圆心的单位圆 (图 13.3).

在 γ_p 上取一点 p_1, p_1 接近 p 且按顺时针方向排在 p 后. 于是有一点 $q_1 \in \gamma_q$, q_1 接近 q 且 $|p_1 - q_1| = 1$. 易见 q_1 也按顺时针方向位于 q 后, 且 $|q_1 - q| < |p_1 - p|$. 下面选择一点 $r_1 \in \gamma_r$, 使其满足 $|q_1 - r_1| = 1$ 与 $|r_1 - r| < |q_1 - q|$. 如此进行下去, 可以在弧 γ_p, γ_q 和 γ_r 上进一步放置点 $p_2, q_2, r_2, p_3, q_3, r_3, \cdots$, 直到集合 $S = \{p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, \cdots\}$ 含有恰好 $n-3$ 个点为止. 如果 $|p_1 - p|$ 选择得充分小, 则 $S \cup \{p_0, q_0, r_0\}$ 中的所有元素互异, 且处于凸位置.

S 中的所有 $n-3$ 个点到 p_0, q_0 或 r_0 都是单位距离. S 的元素确定的单位距离出现 $n-4$ 次. 因此, $S \cup \{p_0, q_0, r_0\}$ 确定至少 $2n-7$ 个单位距离. □

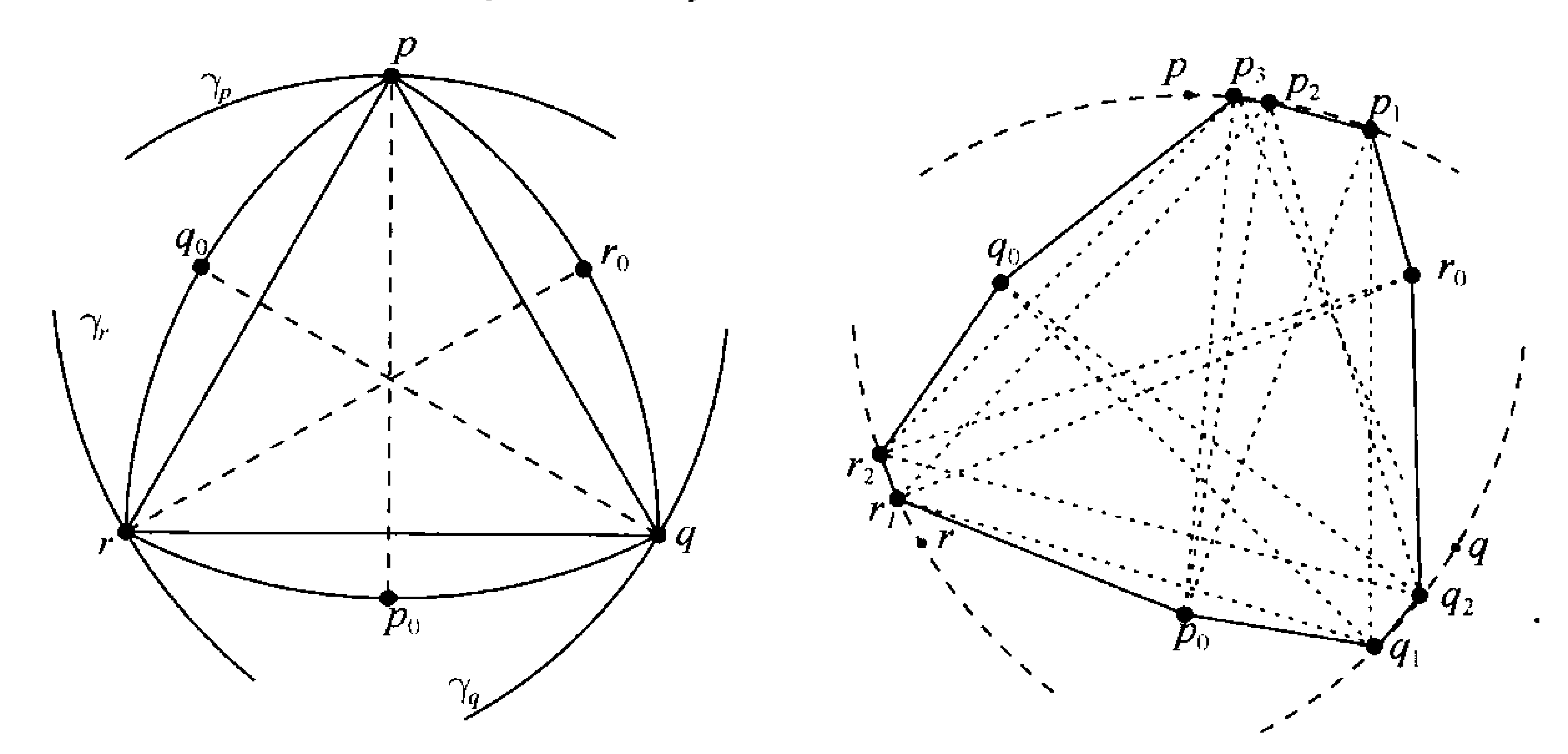


图 13.3　含有多个单位距离的凸 n 边形的构造

Erdős 猜想存在一个具有下述性质的自然数 k: 任何凸多边形必有一个顶点, 使得不存在其他 k 个顶点到其距离相等. 这个猜想如果正确的话, 立即可得

$$f^{\text{conv}}(n) < (k-1)n\,.$$

Danzer [参见文献 (Erdős, 1987)] 证得, 如果这样的数 k 存在, 则 k 至少为 4 (见习题 13.1). 后来, Fishburn-Reeds (1992) 构造了一个 20 个顶点的凸多边形, 其每一顶点到三个其他顶点的距离为单位距离. 若干相关的结论参见文献 (Pach, Pinchasi, 2003; Xu, Ding, 2004).

设 $g^{\text{conv}}(n)$ 表示凸 n 边形的顶点所确定的互异距离的最小个数. Altman (1963, 1972) 证明了

$$g^{\text{conv}}(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

此界对正 n 边形可达.

Erdős 猜想下面这个更强的结果也是正确的: 每一凸 n 边形必有一顶点, 由它出发的互异距离数至少为 $\lfloor n/2 \rfloor$. 这方面的第一个非平凡结果是 Moser(1952) 给出的.

定理 13.5 (Moser)　设 C 为凸 n 边形 ($n \geqslant 3$) 的顶点集, 则存在 $p \in C$, 使得由 p 出发的互异距离数至少为 $\lceil n/3 \rceil$.

为了证明上述结果需要一条引理, 其证明留作习题 (见习题 13.2).

设 D 为一圆盘, pr 为 D 的一条弦, 则 pr 将 D 分成两部分, 其中较小的部分称为**冠**. (如果 pr 是 D 的直径, 则两部分均视为冠.)

引理 13.6　设 C' 为一 m 点集, 其中所有的点落在由弦 pr 所确定的圆盘的闭冠内, 假设 $C' \cup \{p, r\}$ 处于凸位置. 如果 $p \notin C'$, 则由 p 到 C' 的点的所有 m 个距离互异.

定理 13.5 的证明 设 D 为包含 C 中所有元素的最小圆盘.

如果只有两个点 $p, r \in C$ 落在 D 的边界上, 则 pr 必为直径, 且由 pr 所确定的两个闭冠中至少有一个含 C 中不同于 p 的至少 $\lceil n/2 \rceil$ 个点.

如果 D 的边界上有 C 的两个以上的点, 且无两点确定一直径, 则可从中选取三点 $p, q, r \in C$, 使得 Δpqr 的三个角均不是钝角 (否则 D 就不是最小圆盘). 由于 C 中的点处于凸位置, Δpqr 的内部不含 C 的点, 因此, 由 Δpqr 的边所确定的三个冠中至少有一个含 C 中至少 $\lceil n/3 \rceil$ 个点, 这些点异于对应边的一个端点.

在任何情况下, 定理 13.5 均可由引理 13.6 得到. □

强化上述论证, Dumitrescu (2006) 证明了 C 总是包含一点, 使得由此点出发的互异距离数至少为 $\lceil (13n-6)/36 \rceil$.

13.2 处于一般位置的点集

Altman 的上述结果似乎很有可能推广到任何无三点共线的点集上. 也就是说, 若令 $g^{\text{noncoll}}(n)$ 表示平面上无三点共线的 n 个点所确定的最小互异距离数, 则可有如下猜想

$$g^{\text{noncoll}}(n) = g^{\text{conv}}(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

这方面仅有的已知结果属于 Szemerédi [参见文献 (Erdős, 1987)], 该结果可以看成是定理 13.5 的推广.

定理 13.7 (Szemerédi) *设 P 为平面中无三点共线的 n 点集. 则存在点 $p \in P$, 由点 p 出发的互异距离数至少为 $\lceil (n-1)/3 \rceil$.*

证明 假设对任意点 $p \in P$, 由 p 出发的互异距离数至多为 k, 即 P 的每一点 $q \neq p$ 落在以 p 为圆心的 (至多) k 个同心圆 $C_1(p), \cdots, C_k(p)$ 中的一个上.

设 I 表示由 P 中三元组张成的等腰三角形的个数, 其中一个正三角形被计数三次. 显然,

$$I = \sum_{p \in P} \sum_{i=1}^{k} \binom{|C_i(p) \cap P|}{2}.$$

如果令 $P - \{p\}$ 中的点尽可能均匀地分布在圆 $C_i(p)$ 上, 则上式可达到最小值. 特别地,

$$I \geqslant nk\frac{n-1}{k}\left(\frac{n-1}{k} - 1\right) \Big/ 2.$$

另一方面, 每一条线段 qr 至多是 P 所确定的两个等腰三角形的底边, 不然, qr 的垂直平分线将通过 P 中至少 3 个点, 矛盾. 因此

$$I \leqslant 2\binom{n}{2}.$$

比较上述两个不等式, 即得欲证结果 $k \geqslant \lceil (n-1)/3 \rceil$. □

如果一平面点集 P 中无三点共线, 无四点共圆, 则称 P 处于 **一般位置**. 设 $g^{\text{gen}}(n)$ 表示平面上处于一般位置的 n 点集所确定的最小互异距离数.

定理 13.8 (Erdős, Füredi et al., 1993)　*设 $g^{\text{gen}}(n)$ 表示平面上处于一般位置的 n 点所确定的最小互异距离数, 则对每一个 n, 存在常数 c, 使得*

$$g^{\text{gen}}(n) \leqslant n 2^{c\sqrt{\log n}}.$$

证明　为简便起见, 假设对某自然数 $d \geqslant 4$, 有 $n = \lfloor 2^{d(d-2)}/d \rfloor$. 考虑由所有格点 $(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ 构成的集合 L, 其中 x_i 为整数且 $0 \leqslant x_i < 2^d$. 由 L 所确定的互异距离数至多为 $d\left(2^d\right)^2$, 因为至多有 $d\left(2^d\right)^2$ 个形如 $\left(\sum_{i=1}^{d}(x_i - x_i')^2\right)^{1/2}$ 的数, 其中 $0 \leqslant x_i, x_i' < 2^d$. 特别地, 存在一个以原点为心的球, 该球包含 L 的至少

$$\frac{|L|}{d\left(2^d\right)^2} = \frac{\left(2^d\right)^d}{d\left(2^d\right)^2} \geqslant \left\lfloor \frac{2^{d(d-2)}}{d} \right\rfloor = n$$

个点. 设 P 表示这些点构成的集合.

令 $P+(-P) = \{ p_1 - p_2 \mid p_1, p_2 \in P \}$, 即 $P+(-P)$ 是由 P (或 P 的**差区域**) 确定的所有向量的集合. 注意到 $P+(-P)$ 中的每一个元素为一向量 $(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, 其中 x_i 为整数且 $-2^d < x_i < 2^d$, 因此

$$|P+(-P)| \leqslant (2 \cdot 2^d)^d = 2^{d(d+1)} < n 2^{8\sqrt{\log n}}$$

固定 $\mathbb{R}^d$ 中的一个 2 维平面 Π, 对任意 $p \in P$, 设 p' 表示 p 在 Π 上的正交投射. 显然, 可以选取 Π 满足下面两个条件:

(i) $p_1' = p_2'$, 当且仅当 $p_1 = p_2$ (对于任意 $p_1, p_2 \in P$);

(ii) 点集 $P' = \{ p' \mid p \in P \} \subseteq \Pi$ 处于一般位置.

因 $p_1 - p_2 = p_3 - p_4$ 表明 $|p_1' - p_2'| = |p_3' - p_4'|$, 故 P' 所确定的互异距离数至多为

$$|P+(-P)| < n 2^{8\sqrt{\log n}},$$

此即欲证结果.

这个证明很容易推广到 n 可取任意正整数值的一般情形. □

确定

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g^{\text{gen}}(n)}{n} = \infty$$

是否成立是一个令人兴奋的未决难题.

不过这一关系式的一种较弱的形式却很容易由加性数论中某些深入的结果推得.

设 $g^*(n)$ 表示平面上处于一般位置的 n 个点所确定的最小互异向量数, 即

$$g^*(n) = \min_{P} |P + (-P)|,$$

其中最小值取遍平面上所有处于一般位置的 n 点集. 显然, $g^*(n) \geqslant g^{\text{gen}}(n)$. 事实上, 上面的论证表明, 对于适当的常数 c, 有

$$g^*(n) \leqslant n2^{c\sqrt{\log n}},$$

即如果 n 充分大, 对每一个 $\varepsilon > 0$, 有 $g^*(n) \leqslant n^{1+\varepsilon}$.

定理 13.9 (Erdős, Füredi et al., 1993) *设 $g^*(n)$ 表示平面上无三点共线, 无四点共圆的 n 点所确定的最小互异向量数, 则*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g^*(n)}{n} = \infty.$$

证明 用反证法, 假设对无限多的 n 有 $g^*(n) < Cn$, 其中 C 是常数.

设 P 为平面上处于一般位置的 n 点集, 满足

$$|P + (-P)| < Cn.$$

可以证明 (见习题 13.3), 存在另一个仅依赖于 C 的常数 C', 使得

$$|P + P| = |\{p_1 + p_2 \mid p_1, p_2 \in P\}| < C'n.$$

回顾 Freiman (1966, 1973, 1987) 的著名结果 [更简洁的证明参见文献 (Ruzsa, 1992)].

引理 13.10 (Freiman) *对任意整数 C', 存在具有下列性质的 C'': 平面中任意 n 点集 P 若满足 $|P + P| < C'n$, 则必能被维数为 C', 大小为 $C''n$ 的格的投影覆盖. 也就是说, 对于适当的向量 $v_i \in \mathbb{R}^2$ 以及满足 $\prod_{i=1}^{C'} n_i \leqslant C''n$ 的自然数 n_i, 有*

$$P \subseteq \{v_0 + m_1v_1 + \cdots + m_{C'}v_{C'} \mid 1 \leqslant m_i \leqslant n_i\}.$$

不失一般性, 假设 $n_1 \geqslant n^{1/C'}$. 显然, 可以固定某些值 $\bar{m}_2, \cdots, \bar{m}_{C'}$, 使得对至少

$$\frac{n}{n_2n_3\cdots n_{C'}} \geqslant \frac{n_1}{C''} \geqslant \frac{n^{1/C'}}{C''}$$

个不同的整数 m_1, 有

$$v_0 + m_1v_1 + \bar{m}_2v_2 + \cdots + \bar{m}_{C'}v_{C'} \in P.$$

但是 P 的这些对应点落在一直线上, 与 P 处于一般位置的假设矛盾. □

13.3 最小距离与最大距离

正如前面所见到的, 确定 $f_d(n)$ 确切的阶是一个很困难的问题, 这里 $f_d(n)$ 的阶是指 $\mathbb{R}^d$ 中 $n(n\to\infty)$ 个点中同一距离可能出现的最大次数. 一个简单得多的问题是估计 $f_d^{\min}(n)$, 即 $\mathbb{R}^d$ 中 n 点集所确定的**最小距离**可能出现的最大次数. 也就是说, 设

$$f_d^{\min}(n)=\max_{|P|=n}\left|\{\,pq\mid p,q\in P,\ 且\ |p-q|=1\,\}\right|,$$

其中最大值取遍 $\mathbb{R}^d$ 中所有满足

$$\min_{p\neq q\in P}|p-q|=1$$

的 n 点集 P (每一条线段 $pq=qp$ 至多计数一次).

类似地, 定义 $f_d^{\max}(n)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中 n 点集所确定的**最大距离**可能出现的最大次数, 即

$$f_d^{\max}(n)=\max_{|P|=n}\left|\{\,pq\mid p,q\in P,\ 且\ |p-q|=1\,\}\right|,$$

其中最大值取遍 $\mathbb{R}^d$ 中所有满足

$$\max_{p,q\in P}|p-q|=1$$

的 n 点集 P.

确定 $f_d^{\min}(n)$ 的问题可以重述如下. 给定 $\mathbb{R}^d$ 中全等球形成的一个填装 $\mathcal{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$, 试求**接触**对 (B_i,B_j) 的个数的最大值.

一凸体 $C\subseteq\mathbb{R}^d$ 的 **Hadwiger (Newton)** 数是指 C 的能接触 C 自身的不交叠的平移 (全等拷贝) 的最大个数 $H(C)$ $(N(C))$ (见习题 8.9). 按惯例, 令 B^d 表示 d 维单位球. 显然 $H(B^2)=6$, 但 $H(B^3)$ 的精确值却颇难确定. 这个问题在 Newton 和 David Gregory 之间曾引起过一场广为人知的争论. Newton 猜想 $H(B^3)=12$, 而 Gregory 则认为是 13. 180 年后 Hoppe (1874) 最终证明 Newton 是正确的. 下面的陈述显然正确.

命题 13.11 对每一个 d 和 n, 有

$$f_d^{\min}(n)\leqslant\frac{nH(B^d)}{2}.$$

显然, 对 $d=1$, $f_1^{\min}(n)=n-1$ 成立. 在平面上, 由上面的界可得 $f_2^{\min}(n)\leqslant 3n$, 实际上, 不难证明存在正值常数 c, 使得 $f_2^{\min}(n)\leqslant 3n-c\sqrt{n}$. 更值得关注的是, 在平面上可以真正确定 $f_2^{\min}(n)$ 的确切值. Harborth (1974) 的下述结果证明了 Reutter (1972) 猜想.

定理 13.12 (Harborth) 设 $f_2^{\min}(n)$ 表示平面上 n 点中最小距离可能出现的最大次数, 则

$$f_2^{\min}(n) = \lfloor 3n - \sqrt{12n-3} \rfloor .$$

证明 对 n 用归纳法. 为简便起见, 记 $f_2^{\min}(n)$ 为 $f(n)$, 显然 $f(0)=f(1)=0$, $f(2)=1$. 下面假设 $n \geqslant 3$. 考虑最小距离为 1 的 n 点集 P, 以线段连接 P 中的两点, 当且仅当它们的距离是 1. 这样, 得到嵌入平面的图 G. 假设 G 有最大可能的边数, 也就是说, $|E(G)| = f(n)$. 容易看出, G 的每一个顶点至少与另外 2 个顶点相邻. 此外, G 是 2 **连通的**, 也就是说, 删去任一顶点 G 仍连通.

G 的外部面的边界是一简单闭多边形 C. 设 b 表示多边形 C 的顶点总数, b_d 表示多边形 C 在 G 中度为 d 的顶点数. 显然, $b = b_2 + b_3 + b_4 + b_5$.

C 在一个度为 d 的顶点处的内角至少为 $(d-1)\pi/3$, 而这些角的和为 $(b-2)\pi$. 因此,

$$b_2 + 2b_3 + 3b_4 + 4b_5 \leqslant 3b - 6 .$$

另一方面, 设 f_i $(i \geqslant 3)$ 表示 G 的边数为 i 的内部面的个数, 由**Euler 多面体公式**可得 (如定理 8.1 的证明)

$$n - f(n) + f_3 + f_4 + \cdots = 1 . \tag{13.1}$$

如果将 G 的内部面的边数相加, 则 C 的每一边被计数一次, 其他边均被计数两次, 即有

$$\begin{aligned} b + 2(f(n) - b) &= 3f_3 + 4f_4 + \cdots \\ &\geqslant 3(f_3 + f_4 + \cdots). \end{aligned} \tag{13.2}$$

比较 (13.1) 和 (13.2), 得到

$$n - b \geqslant f(n) - 2n + 3 .$$

假设定理对所有小于 n 的整数成立. 从 G 中删除 C 的顶点及所有与其关联的边. 由归纳假设可得

$$f(n) - b - (b_3 + 2b_4 + 3b_5) \leqslant f(n-b) ,$$

$$\begin{aligned} f(n) &\leqslant f(n-b) + b_2 + 2b_3 + 3b_4 + 4b_5 \\ &\leqslant f(n-b) + 3b - 6 \\ &\leqslant 3(n-b) - \sqrt{12(n-b)-3} + 3b - 6 \\ &\leqslant 3n - 6 - \sqrt{12(f(n) - 2n + 3) - 3} \\ &\leqslant 3n - 6 - \sqrt{12(f(n) - 2n) + 33} . \end{aligned}$$

注意到对 $f(n) = 3n \pm \sqrt{12n-3}$, 上面所有不等式中等号成立. 因此, 利用 $f(n) < 3n$, 可得

$$f(n) \leqslant \left\lfloor 3n - \sqrt{12n-3} \right\rfloor .$$

有关此界紧性的证明留给读者 (图 13.4 和习题 13.8). □

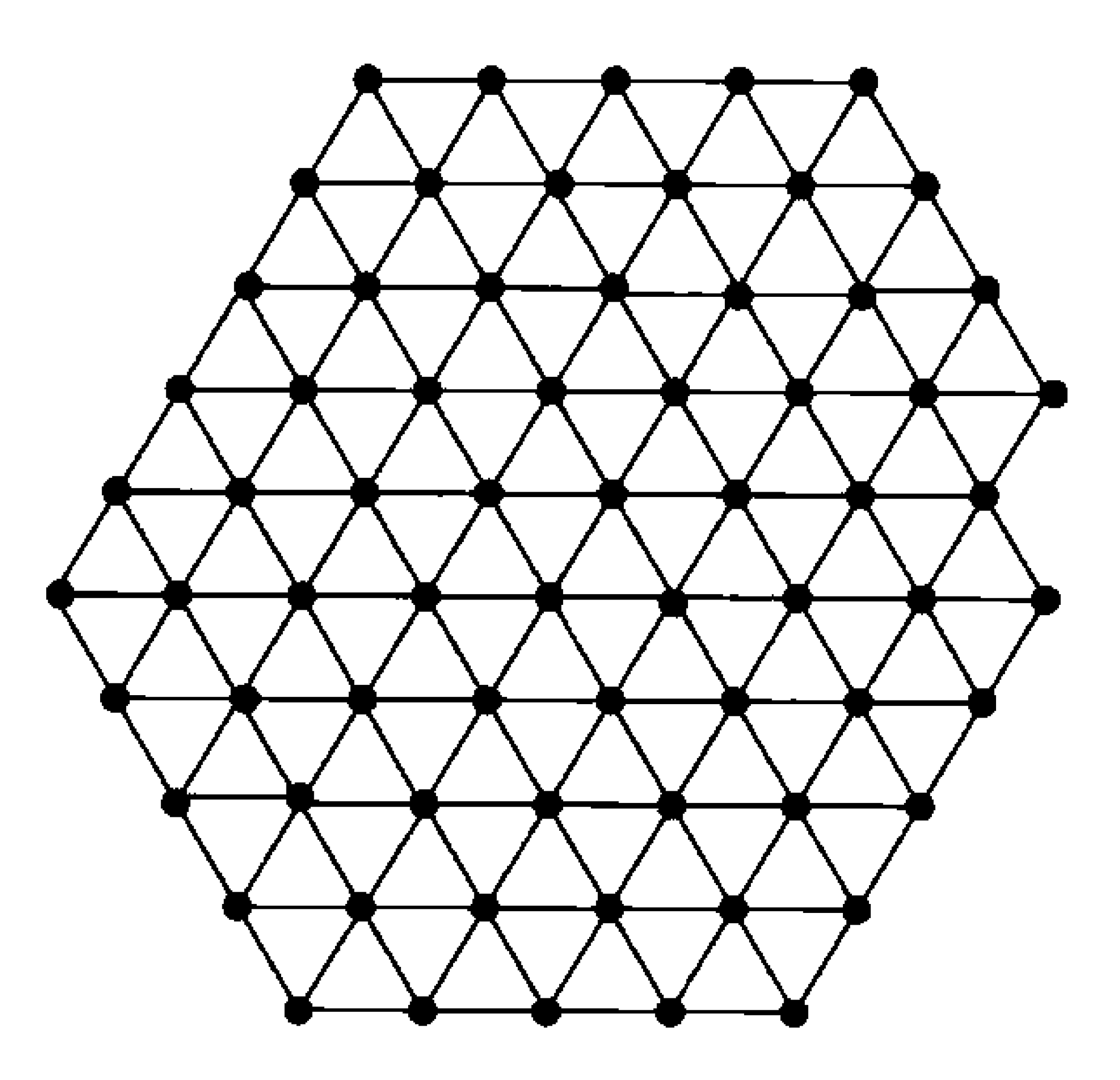


图 13.4　定理 13.12 的极端构形

Brass (1992b) 证明了下述结果: 如果 P 是一平面中的 n 点集, 其凸包具有 k 个顶点, 则 P 中的点确定的最小距离出现次数不超过 $3n-2k+4$. 此界对无限多的 n 和 k 是紧的. Brass (1992a) 还证明了当 $n \to \infty$ 时平面上 n 个点中第二最小距离能出现的次数至多为 $(24/7+o(1))n$ (下界 $24/7n$ 见图 13.5). Brass 的证明用到线性规划, 也证明了 Vesztergombi (1987) 提出的一个猜想. 利用同样的方法可以对任意固定的 i 求第 i 最小距离可能出现次数的非平凡上界 [参见文献 (Brass, 1992c)].

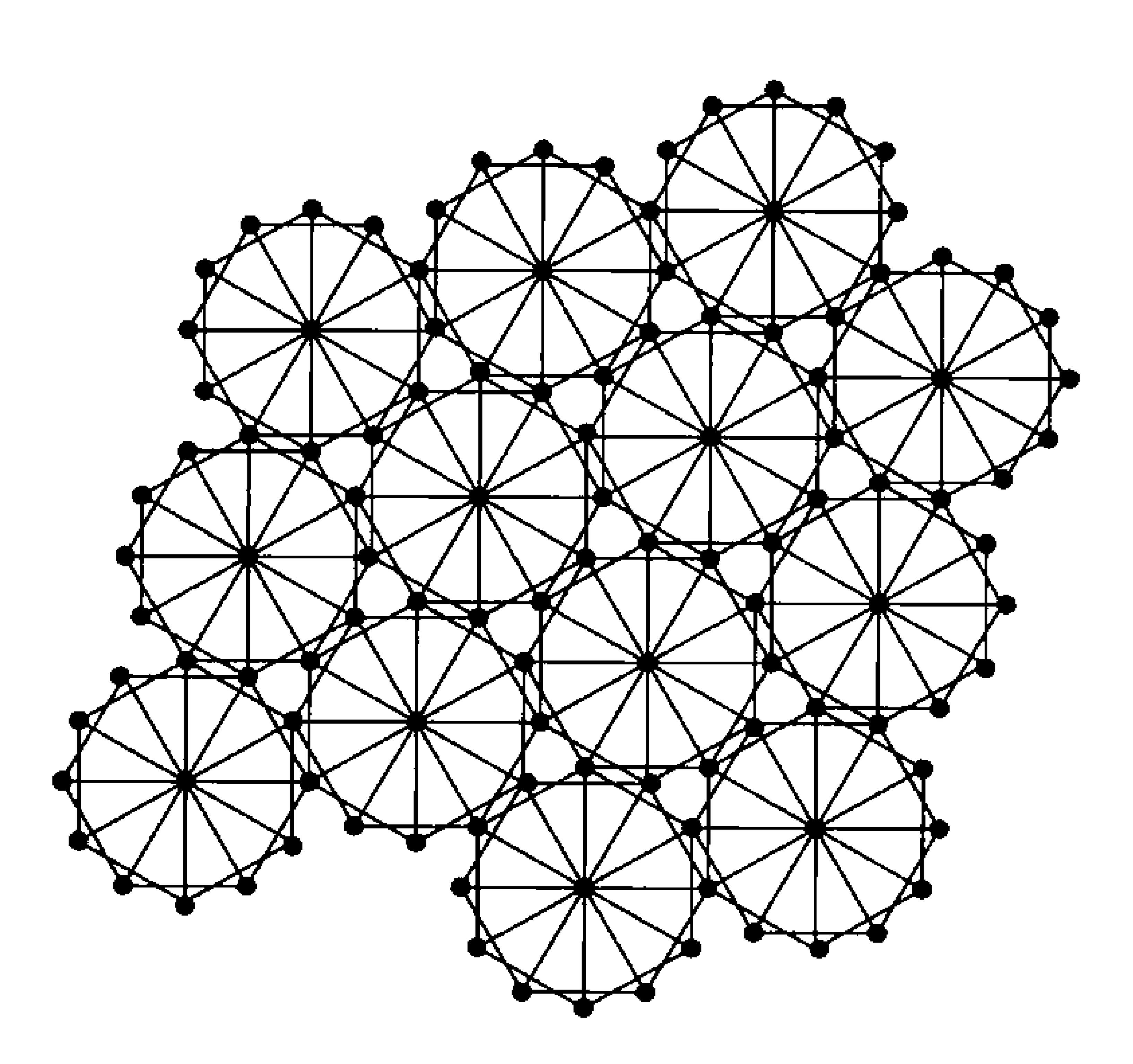


图 13.5　第二最小距离的下界构型

下面研究最大距离出现次数的界的对偶问题.

定理 13.13 (Hopf, Pannwitz, 1934; Sutherland, 1935) 设 $f_2^{\max}(n)$ 表示平面中 n 个点确定的最大距离可能出现的最大次数, 则对每一个 $n \geqslant 3$, 有

$$f_2^{\max}(n) = n.$$

证明 设 P 是平面 n 点集, 且

$$\max\{|p-q| \mid p, q \in P\} = 1.$$

以线段连接 p, q, 当且仅当 $|p-q| = 1$, 如此构造出图 G.

用归纳法. 定理对 $n = 3$ 显然成立. 设 $n > 3$, 并假设定理对任意小于 n 的整数成立.

如果 G 有一个度至多为 1 的顶点 p, 对 $P - \{p\}$ 用归纳假设即得

$$|E(G)| \leqslant f_2^{\max}(n-1) + 1 = n.$$

因此, 以下可以假设 G 的每一个顶点与至少 2 个另外的顶点相邻.

如果 G 的所有顶点的度均为 2, 则 $|E(G)| = n$. 假设有一点 p 与另外三点 $q, r, s \in P$ 相连接, 其中角 qpr 小于角 qps, 且均不超过 $\pi/3$ (图 13.6). 设 t 为 P 中异于 p 的点, t 也与 r 相邻, 则或者 ps 或者 pq 不与线段 rt 相交. 不失一般性, 假设 ps 与 rt 不相交. 但这是不可能的, 因为或 pq 与 rt 相交且 $|s-t| > 1$, 或两者不相交且 $|p-t| > 1$.

因此, $f_2^{\max}(n) \leqslant n$, 而且图 13.6 中给出的例子表明此界可达. □

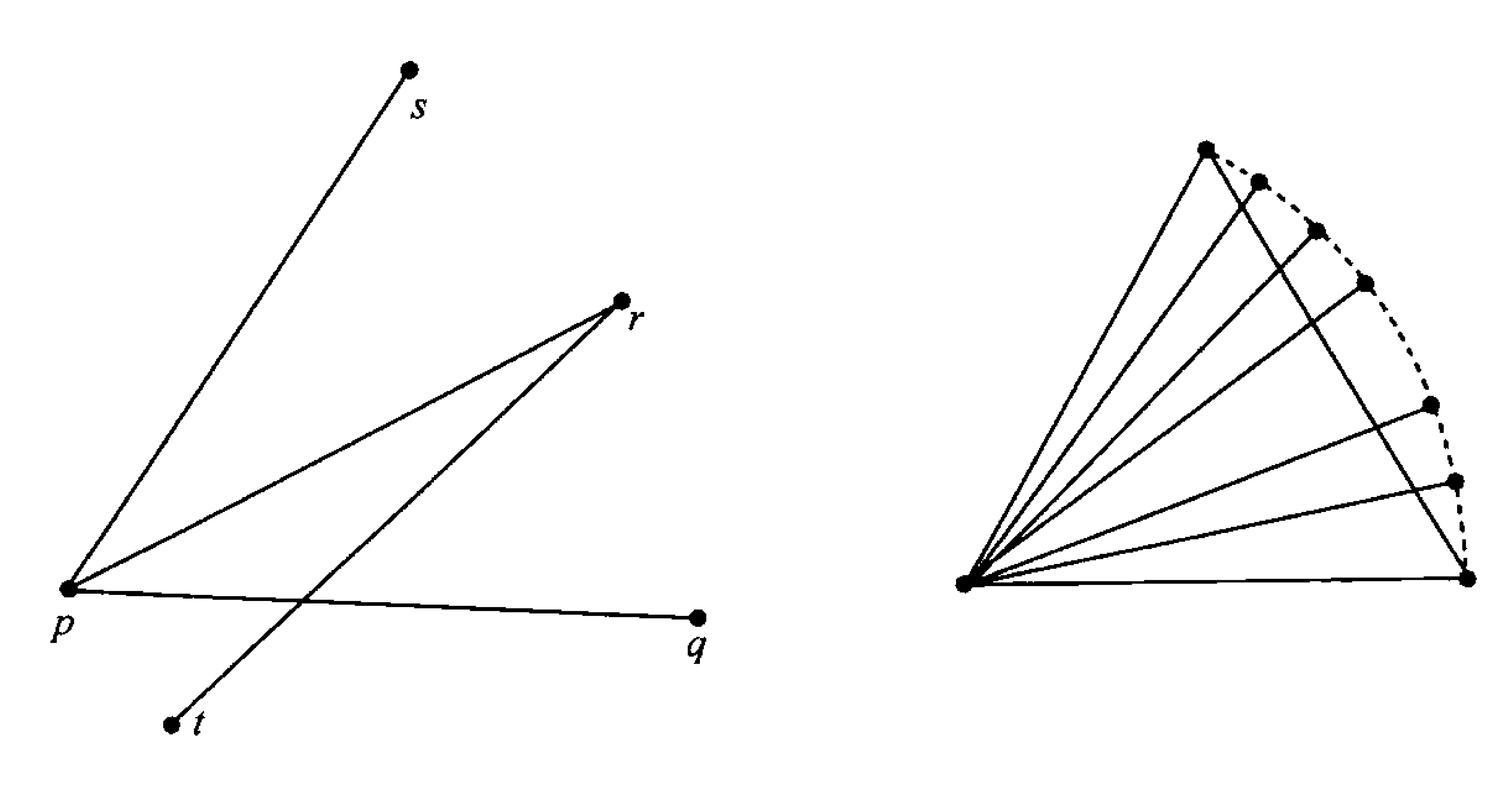


图 13.6 定理 13.13 证明图示

Vesztergombi (1985, 1987) 研究了平面上 n 点确定的第二大距离可能出现的最大次数. 作者证明了此数至多为 $3n/2$, 且当 n 为偶数时恰好为 $3n/2$.

Vázsonyi 猜想 3 维空间中有与定理 13.13 类似的结果, Grünbaum (1956), Heppes (1956), Straszewicz (1957) 独立证明了此结果.

定理 13.14 (Grünbaum, 1956; Heppes, 1956; Straszewicz, 1957) 设 $f_3^{\max}(n)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中 n 点确定的最大距离可能出现的最大次数, 则对每一个 $n \geqslant 4$, 有

$$f_3^{\max}(n) = 2n - 2.$$

证明　对 n 用归纳法. 结论对 $n = 4$ 显然正确. 现假设结论对任何小于 n 的整数均正确. 在 $\mathbb{R}^3$ 中固定一 n 点集 P, 其直径 $\max_{p,q\in P}|p-q| = 1$. 以线段连接 P 中的两点, 当且仅当它们的距离为 1.

如果 P 中有一点 p 与另外至多 2 点相连接, 则对集合 $P-\{p\}$ 用归纳假设, 得由 P 所确定的单位距离数至多为

$$f_3^{\max}(n-1) + 2 = 2n - 2\,.$$

因此, 可以假设 P 的每一个点与至少 3 个其他点相连接, 且是 P 的凸包的顶点. 以每一点 $p \in P$ 为心画一单位球 $B(p)$, 令

$$C = \bigcap_{p\in P} B(p)\,.$$

显然, C 是一个由球形“面”与分离它们的圆弧（“边”）围成的凸集 (**球形多胞形**). 设 N, F, 和 E 分别表示 C 的顶点数, 面数, 边数. 注意到 $F = n$, 因为每一个 $B(p)$ 对 C 的边界恰好贡献一个面. 另一方面, $N \geqslant n$, 如果 C 有一顶点不属于 P 则其中严格不等式成立.

C 的每一个顶点 x 与 C 的至少 3 条边关联. 而且, 如果 $x \in P$, 则 C 的与 x 关联的边数等于满足 $|x-q| = 1$ 的点 $q \in P$ 的个数. 对 C 的边重复计数, 得到

$$2f_P + 3(N-n) \leqslant 2E\,,$$

其中 f_P 表示 P 确定的单位距离数.

由 Euler 多面体公式,

$$N - E + F = 2\,.$$

因此

$$\begin{aligned}2f_P &\leqslant 2E - 3(N-n)\\ &= 2(N+F-2) - 3(N-n)\\ &= 2(n+F-2) - (N-n)\\ &\leqslant 2(n+n-2) - 0\\ &= 2(2n-2)\,,\end{aligned}$$

此即欲证结果.

图 13.7 说明 $f_3^{\max}(n) \geqslant 2n-2$.

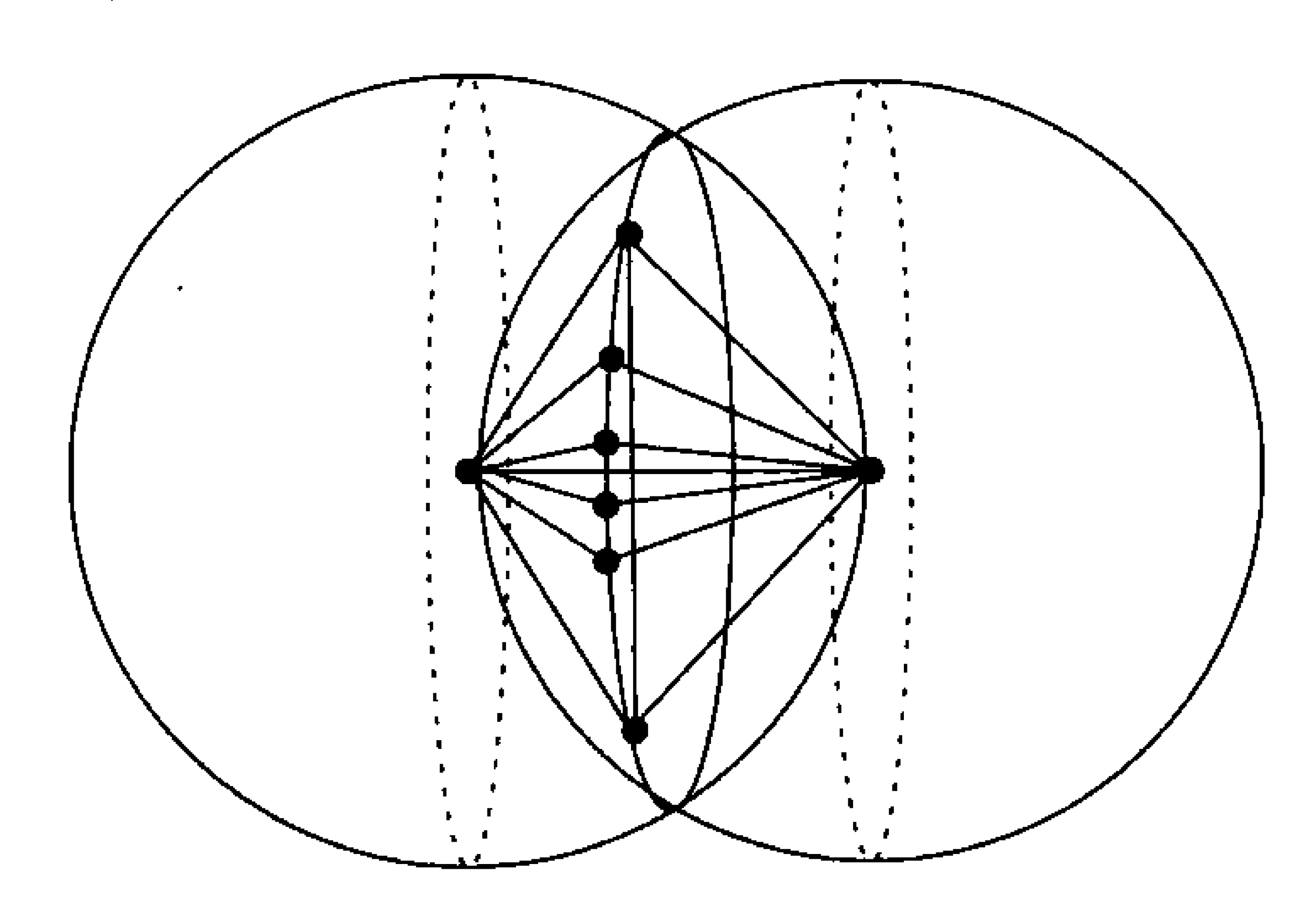


图 13.7 最大距离可出现 $2n-2$ 次 $(n=8)$ □

最近, Swanepoel (2007) 发现了定理 13.14 的一个简洁的新证明.

13.4 Borsuk 问题

知道一个点集 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 的直径是 $\sup\limits_{p,q\in P} |p-q|$. 根据 Borsuk (1933) 的一个著名猜想, 任何有界集 $P \subset \mathbb{R}^d$ 都能被划分成至多 $d+1$ 个直径更小的子集.

正如 Heppes 和 Révész (1956) 指出的, 由上一节的结果很容易导出下面的结论.

推论 13.15 *设 P 为 $\mathbb{R}^d$ 中的有限点集, $d \leqslant 3$. 则必可将 P 划分成至多 $d+1$ 个直径更小的子集.*

证明 设 $d=3$. 对 $|P|=n$ 用归纳法. 对于 $n \leqslant 4$, 无须证明. 设 $n>4$, 假设结论对至多含 $n-1$ 个点的任何集合成立.

连接 P 中的两点为一条边, 当且仅当此两点的距离等于 P 的直径. 由定理 13.14 可知, 如此得出的图中有一顶点 p 其度至多为 3. 由归纳假设, $P-\{p\} = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$, 其中 $\operatorname{diam} P_i < \operatorname{diam} P$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$. 从而存在下标 i, 使得 p 与 P_i 中的任意元均不相邻. 因此, $\operatorname{diam}(P_i \cup \{p\}) < \operatorname{diam} P$, 结论证毕.

利用定理 13.13, $d=2$ 的情形同理可证. □

Borsuk 猜想已经在许多其他特殊的情形下得到证明. 例如, 有光滑边界的凸体 (Hadwiger, 1945, 1946), 中心对称集 (Riesling, 1971), 具有与正则单纯形相同的对称性的集合 (Rogers, 1971) 等. 其他参见文献 (Moser-Pach, 1986; Grünbaum, 1963).

本节旨在证明 Kahn-Kalai (1993) 的一个出人意外的结果, 此结果表明: 如果 d 充分大, Borsuk 猜想甚至对有限点集 $P \subset \mathbb{R}^d$ (在很强的意义下) 都不成立. 我们

采用 Nilli (1993) 的证明思想, Nilli 吸取了 Alon, Babai, Suzuki(1991) 的一种简洁的论证方式.

证明依据的是 Frankl-Wilson (1981) 的一个结果, 这一结果可以借助所谓**线性代数方法**得到证明 [参见文献 (Babai-Frankl, 1988)].

定理 13.16 (Frankl-Wilson) 令 $n=4p$, 其中 p 为奇素数. 设 V 表示由所有向量 $v=(v_1,\cdots,v_n)\in\{+1,-1\}^n$ 构成的集合, 其中 $v_1=1$, 且正值分量的个数为偶数, 则对任何不包含两个正交向量的子集 $U\subseteq V$, 有

$$|U|\leqslant\sum_{i=1}^{p-1}\binom{n}{i}.$$

证明 由正值分量个数为偶数这一条件可知, 任意两个向量 $u,v\in V$ 的标量积满足 $\langle u,v\rangle\equiv 0\pmod 4$. 因 V 中每个向量的第一分量是 $+1$, 故有 $\langle u,v\rangle\neq -4p=-n$. 因此, 对任意 $u,v\in U$, 有

$$\langle u,v\rangle\equiv 0\pmod p\iff u=v\,. \tag{13.3}$$

令每个 $u\in U$ 对应于有限域 $GF(p)$ 上一个如下的 n 元多项式, 其中 n 个变量记为 $(x_1,\cdots,x_n)=x$,

$$f_u(x)=\prod_{i=1}^{p-1}(\langle u,x\rangle-i)\,.$$

由 (13.3) 可知, 对任意 $v\in U$,

$$f_u(v)\equiv\begin{cases}(3p+1)(3p+2)\cdots(4p-1)\not\equiv 0 & \pmod p, \quad v=u\,,\\ 0 & \pmod p, \quad v\neq u\,.\end{cases} \tag{13.4}$$

每个 $f_u(x)$ 是次数至多为 $p-1$ 的多项式, 也就是说, $f_u(x)$ 的每一项具有 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 的形式, 其中 $a\in GF(p)$, $k_1+\cdots+k_n\leqslant p-1$. 用 $ax_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\cdots x_n^{\varepsilon_n}$ 替换每一项 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$, 其中

$$\varepsilon_i=\begin{cases}1, & k_i\ \text{是奇数},\\ 0, & k_i\ \text{是偶数},\end{cases}$$

如此得到一个多重线性多项式 $\hat{f}_u(x)$. 注意到对任何 $\{+1,-1\}$- 向量 x, 有 $\hat{f}_u(x)=f_u(x)$. 因此, (13.4) 中 f_u 用 $\hat{f}_u$ 替换后依然成立.

我们断言多项式 $\hat{f}_u(x)$, $u\in U$, 在有限域 $GF(p)$ 上线性无关. 事实上, 如果

$$\sum_{u\in U}\lambda_u\hat{f}_u(x)=0\,,$$

代入 $x = v$ 可得, 对任意 $v \in U$ 有 $\lambda_v \equiv 0 \pmod p$. 因此, $|U|$ 不能大于 $\sum_{i=0}^{p-1}\binom{n}{i}$, 即次数至多为 $p-1$ 的 n 元多重线性多项式空间的维数. □

现在即可证明本节的主要结果:

定理 13.17 (Kahn-Kalai) 设 $b(d)$ 为一最小整数, 使得 $\mathbb{R}^d$ 中任一有界集均能被划分成至多 $b(d)$ 个直径更小的子集. 则对充分大的 d, 有 $b(d) \geqslant (1.2)^{\sqrt{d}}$.

证明 同定理 13.16 一样, 设 V 表示具有 n 个分量的 $\{+1,-1\}$-向量构成的集合. 对任意 $v = (v_1, \cdots, v_n) \in V$, 设 $p(v) = \{p_{ij}(v) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\} \subset \mathbb{R}^{n^2}$, 其中 $p_{ij}(v) = p_{ji}(v) = v_i v_j$. 令

$$P = \{p(v) \mid v \in V\}.$$

注意到对任意 $u, v \in V$,

$$\langle p(u), p(v)\rangle = \langle u, v\rangle^2 \geqslant 0. \tag{13.5}$$

因 P 中所有向量的长度相同, 由 (13.5) 可得

$$|p(u) - p(v)| = \operatorname{diam} P \iff \langle u, v\rangle = 0.$$

因此, 由定理 13.16 知 P 不能被划分成少于

$$|P| \Big/ \sum_{i=0}^{p-1}\binom{n}{i} = 2^{n-2} \Big/ \sum_{i=0}^{p-1}\binom{n}{i}$$

个直径更小的子集. 注意到 P 中所有元落在 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的一个维数为 $\binom{n}{2}$ 的子空间中, 从而对任意奇素数 p 以及 $d = \binom{n}{2} = \binom{4p}{2}$, 有

$$b(d) \geqslant 2^{n-2} \Big/ \sum_{i=0}^{p-1}\binom{n}{i} > (1.203)^{\sqrt{d}}.$$

根据素数定理, 这就表明上述结果对任意充分大的 d 都成立. □

值得注意的是, 上述构造否定了 $\mathbb{R}^d$ 中的 Borsuk 猜想, 其中最小 d 值为 946. Hinrichs, Richter (2003) 利用球形码找到了一种构造, 这种构造表明在维数为 298 时 Borsuk 猜想就已经不成立了. 目前已知的 $b(d)$ 的渐近最佳上界属于 Schramm (1988), 他证明了

$$b(d) \leqslant \left[\sqrt{\frac{3}{2}} + o(1)\right]^d.$$

[不同的证明参见文献 (Bourgain, Lindenstrauss, 1991).]

习　题

13.1 (Danzer, 1987)　证明存在一个平面凸多边形, 它的每个顶点到至少 3 个其他顶点的距离相等.

13.2　设 C 为一 m 点集, 它的所有点落在由弦 pr 所确定的圆盘的闭冠内, $C \cup \{p, r\}$ 处于凸位置. 如果 $p \notin C$, 则 p 与 C 的元所确定的 m 个距离互异.

13.3*(Ruzsa, 1978)　证明对任意 $C > 0$, 存在具有下列性质的 C': 如果 P 是平面上使 $|P + (-P)| < Cn$ 成立的任意 n 点集, 则 $|P + P| < C'n$.

13.4 (L.Fejes Tóth, 1969, 1975)　设 $\mathcal{C}$ 是平面中单位圆盘形成的填装, $C \in \mathcal{C}$. 称元素 $C' \in \mathcal{C}$ 为 C 的k **阶近邻**, 如果存在 $\mathcal{C}$ 中的圆盘链 $C_0 = C, C_1, C_2, \cdots, C_k = C'$, 使得对所有 i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ C_i 与 C_{i-1} 相互接触. 第 k 个**Hadwiger 数** H_k 是指单位圆盘形成的任意填装中一元素的 k 阶近邻个数的最大值. 证明

$$\liminf_{k \to \infty} \frac{H_k}{k^2} \geqslant \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

13.5 (Erdős, Purdy, 1976)　设 $f^{\text{noncoll}}(n)$ 表示平面上无三点共线的 n 个点中单位距离可能出现的最大次数. 证明: 存在适当的常数 $c > 0$, 使得

$$f^{\text{noncoll}}(n) > cn \log n.$$

13.6 (Erdős, Lovász, Vesztergombi, 1989)　设 C 为平面上处于凸位置的 n 点集, $d_1 > d_2 > \cdots$ 表示由 C 确定的互异距离. 设 $G_k(C)$ 是一以 C 为顶点集的图, 如果 C 中某两点的距离至少为 d_k, 则连接此两点为图的一条边. 证明:

(i) $G_k(C)$ 有一个度至多为 $3k - 1$ 的顶点;

(ii) $G_k(C)$ 至多有 $(3k - 1)n$ 条边;

(iii) $G_k(C)$ 的**色数**至多为 $3k$ (也就是说, 可以用 $3k$ 种颜色对 C 的点着色, 使得同一颜色的任意两点的距离小于 d_k).

13.7　设 $k(n) = k$ 表示最小的数, 使得从平面上任意 n 点集中删去至多 k 个点可以增大其最小距离,

(i) (Pollack, 1985) 证明 $k(n) \leqslant \frac{3}{4}n$;

(ii) (Chung et al., 1987) 证明如果 n 能被 19 整除, 则 $k(n) \geqslant \frac{13}{19}n$.

13.8 (Reutter, 1972)　设 $f_2^{\min}(n)$ 表示平面中 n 个点确定的最小距离可能出现的最大次数. 证明

$$f_2^{\min}(n) \geqslant \left\lfloor 3n - \sqrt{12n - 3} \right\rfloor.$$

13.9 (Avis, 1984; Edelsbrunner, Skiena, 1989)　给定一平面 n 点集 P, 对任意 $p \in P$, 设 $\varphi_P(p)$ 表示 p 的**最远近邻**的个数, 也就是说,

$$\varphi_P(p) = \left|\{\, q \in P \mid |p-q| = \max_{r \in P} |p-r| \,\}\right| .$$

令 $\Phi(n) = \max\limits_{|P|=n} \sum_{p \in P} \varphi_P(p)$. 证明:

(i) $\Phi(n) \leqslant 3n-2$;

(ii) 如果 P 处于凸位置, 则

$$\sum_{p \in P} \varphi_P(p) \leqslant 2n ,$$

而且在最坏情况下这个界是最佳可能的.

13.10*(Csizmadia, 1996; Avis et al., 1988)　设在 $\mathbb{R}^3$ 中 $\Phi(n)$ 的定义同习题 13.9. 证明: 如果 n 充分大, 则

$$\Phi(n) = \frac{n^2}{4} + \frac{3n}{2} + \begin{cases} 3, & n \equiv 0 \pmod 2 , \\ \dfrac{9}{4}, & n \equiv 1 \pmod 4 , \\ \dfrac{13}{4}, & n \equiv 3 \pmod 4 . \end{cases}$$

13.11　设 $f_d^{\max}(n)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中 n 个点确定的最大距离可能出现的最大次数. 证明: 如果 $d \geqslant 4$ 且 $n \to \infty$, 则

$$f_d^{\max}(n) \geqslant \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\lfloor d/2 \rfloor} + o(1)\right) .$$

13.12 (Reddy, Suiena, 1995)　设 $d_1(n) > d_2(n) > \cdots$ 表示一个整数网格中的 $n \times n$ 部分的 n^2 个点所确定的互异距离, $s_i(n)$ 表示距离为 $d_i(n)$ 的点对的个数. 证明: 如果 $n > i$, 则 $s_i(n)$ 不依赖于 n 的取值.

13.13 (Lefmann, Thiele, 1995)　设 P 为平面上无三点共线的 n 点集. $d_1, d_2, \cdots, d_k$ 表示 P 确定的互异距离, s_i 表示 d_i 的重数, 即距离为 $d_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ 的点对的个数. 证明:

$$\sum_{i=1}^{k} s_i^2 \leqslant \frac{3}{4} n^2 (n-1) .$$

13.14　设 P 为 $\mathbb{R}^d (d \leqslant 3)$ 中的一凸多胞形. 由推论 13.15 推证 P 能被划分成 $d+1$ 个直径更小的子集.

13.15 (Berlekamp, 1969)　设 H 为具有 n 个顶点的超图, 使得对任意一对不同的超边 $E, F \in E(H)$, $|E|$ 是奇数, $|E \cap F|$ 是偶数. 证明 $|E(H)| \leqslant n$.

13.16*(Frankl, Wilson, 1981) 设 T 是一非负整数集, H 为具有 n 个顶点的超图, 对任意一对不同的超边 $E, F \in E(H)$ 有 $|E \cap F| \in T$. 证明:

$$|E(H)| \leqslant \sum_{s=0}^{|T|} \binom{n}{s}.$$

13.17*(Tóth, 1997) 设 $f(n)$ 表示平面上无三点共线的 n 点所确定的最小距离可能出现的最大次数. 证明:

$$\left[2 + \frac{5}{16} - o(1)\right] n \leqslant f(n) \leqslant \left(2 + \frac{3}{7}\right) n.$$

第 14 章　几　何　图

大部分图论与拓扑学领域的教科书一开始都要讨论 Königsberg 七桥问题或 Euler 多面体公式. 事实上, 这两个领域可追溯到同一渊源, 所以图论领域的第一部权威专著 (König, 1936) 有一个副标题 **"一维复形的组合拓扑学"** 也就不足为奇了. 然而, 过去的几十年里图论和拓扑学间的联系某种程度上却在逐渐消失. 在图论中研究成果最多的新领域 (Ramsey 定理, 极图理论, 随机图论等) 里, 图被视为抽象的二元关系而不是 1 维单纯复形. 早在 1970 年 Turán (1970a) 就指出, 图论中主要与应用相关的部分实质上归属逻辑学范畴. 令人遗憾的是, 传统图论往往不能为几何应用中产生的问题提供令人满意的答复 (包括前几章讨论的若干重复距离问题). 为解决这些问题, 需要能将组合学与几何学的思想两相结合的新方法. 本章将介绍这方面的一些最新成果, 这些新成果预示着组合几何学研究中一种新趋势的到来.

定义 14.1　***几何图***是用平面中的 (可能相交的) 直线段画成的图, 定义为有序对 $(V(G), E(G))$, 其中 $V(G)$ 为平面点集, 无三点共线, $E(G)$ 为端点属于 $V(G)$ 的线段所成集合. 如果 $V(G)$ 为凸多边形的顶点集, 则 G 称为***凸几何图***. $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别称为 G 的顶点集和边集.

如果 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$, 则称 H 为图 G 的几何子图.

14.1　禁用几何子图

Kupitz (1979), Erdős和 Perles 最早开始从事下述一般问题的研究, 这一问题类似于第 9 章引言中表述的极图理论的基本问题. 给定一个所谓 **禁用几何子图** 理组成的类 $\mathcal{H}$, 确定或估计具有 n 个顶点的几何图 (凸几何图) 可能有的最大边数 $t(\mathcal{H}, n)$ $(t_c(\mathcal{H}, n))$, 这里的几何图限定不包含 $\mathcal{H}$ 中的子图.

对任意 $k \geqslant 1$, 令 $\mathcal{D}_k$ 表示所有顶点数为 $2k$ 由 k 条两两不交边构成的图所成的类 (注意, 按定义两条不交边甚至没有公共端点).

下述结论的证明几乎和定理 13.13 的证明完全相同, 故留给读者 (见习题 14.1).

定理 14.2　*令 $t(\mathcal{D}_2, n)$ 表示具有 n 个顶点且不含两条不交边的几何图可能有的最大边数, 则对任意 $n \geqslant 3$, 有*

$$t(\mathcal{D}_2, n) = n.$$

为求得 $t(\mathcal{D}_3, n)$ 的线性上界需要一定的技巧. 这方面的第一个结果是由 Alon 和 Erdős (1989) 发现的, 随后由 O'Donnell, Perles (1990) 以及 Goddard et al.(1993)

作了改进.

定理 14.3 (Goddard et al.)　令 $t(\mathcal{D}_3,n)$ 表示具有 n 个顶点且不含三条两两不交边的几何图可能有的最大边数, 则

$$t(\mathcal{D}_3,n) \leqslant 3n.$$

证明　设 xy 和 xz 为两条边, 如果射线 $\overrightarrow{xz}$ 可以通过射线 $\overrightarrow{xy}$ 按顺时针方向旋转小于 π 的角得到, 则称 xy 位于 xz 的**左侧**. 如果所有与顶点 x 关联的边都位于边界上包含 x 的一个半空间中, 则称 x 为**尖顶点**.

设 G 为具有 n 个顶点与至少 $3n+1$ 条边的几何图. 对每个尖顶点, 从 G 中删去与之关联的最左边, 令 $G_1 \subseteq G$ 表示由此得到的子图. 此外, 对每个顶点 x, 从 G_1 中删去所有这样的边 xy, 在 G_1 中不存在两条与 x 关联的位于 xy 右侧的边.

因为对每个顶点至多删去了三条边, 所以剩下的图至少存在一条边 x_0y_0. 故存在两条边 $x_0y_1, x_0y_2 \in E(G_1)$ 位于 x_0y_0 的右侧, 且存在 $y_0x_1, y_0x_2 \in E(G_1)$ 位于 $y_0x_0 = x_0y_0$ (以此顺序) 的右侧. 还可找到边 $x_2y \in E(G)$ 位于 x_2y_0 的左侧, 边 $y_2x \in E(G)$ 位于 y_2x_0 的左侧 (图 14.1).

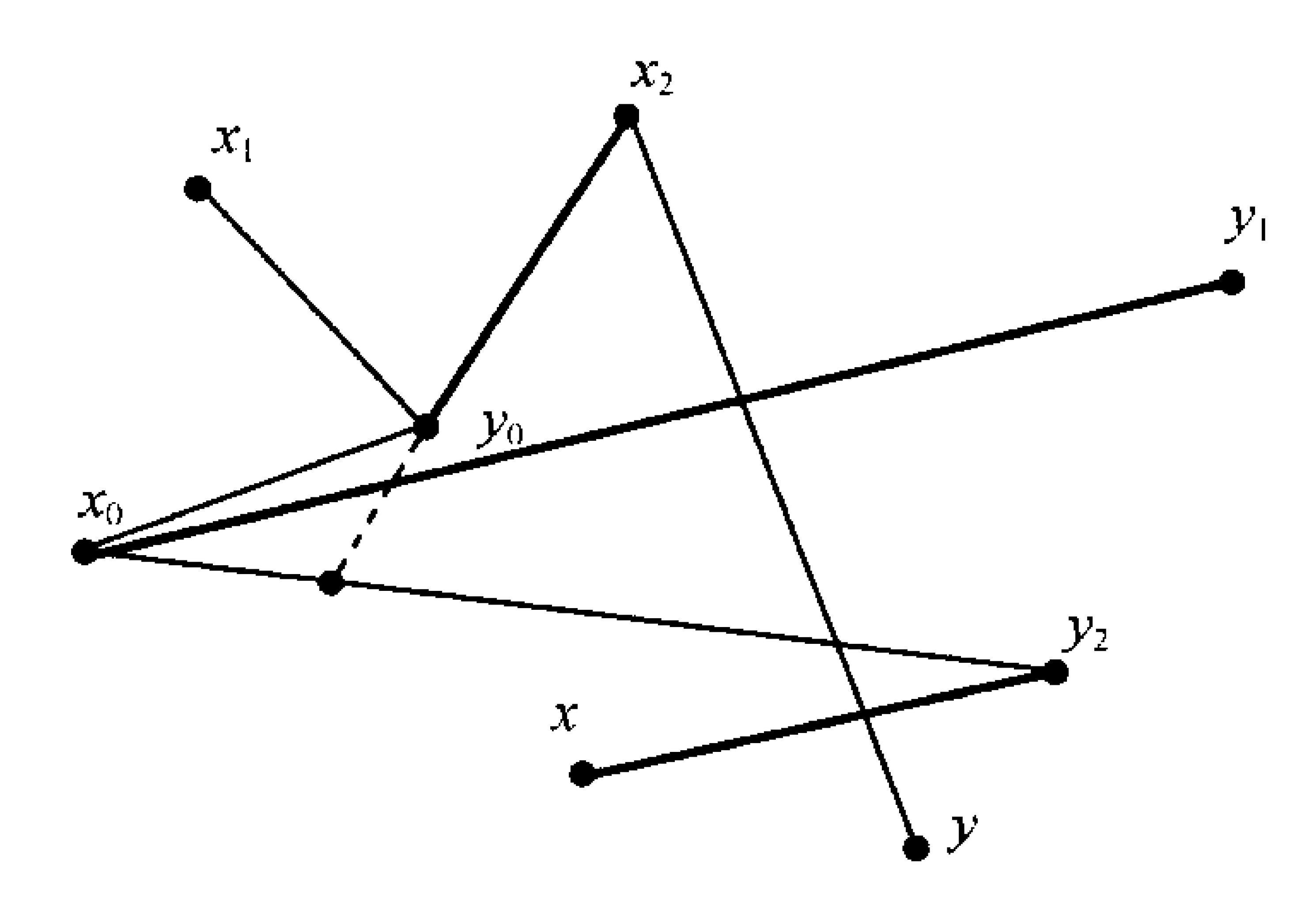


图 14.1　定理 14.3 证明图示

不妨设直线 y_0x_2 与 x_0y_2 的交点与 y_2 位于 x_0y_0 同侧 (或在无穷远处), 则 y_0x_2, x_0y_1 和 y_2x 为 G 的三条不交边 (注意, y_0x_2 和 y_2x 必不相交, 因为它们位于 x_0y_2 异侧). □

至于 $t(\mathcal{D}_3,n)$ 的下界, 不难证明 $t(\mathcal{D}_3,n) \geqslant \frac{5}{2}n-4$ (见习题 14.3). Černý (2005) 证明了此界是渐近紧的.

令人遗憾的是, 将上述论证推广到较大 (但固定) 的 k 值是极其复杂的, 并且不大可能得到 $t(\mathcal{D}_k,n)$ 的线性上界. 下节中将利用完全不同的方法求得一个这样的界.

如果限定仅考虑凸几何图 G, 即假设图 G 的顶点处于凸位置, 问题会变得非常简单.

命题 14.4 (Kupitz, 1984) 令 $t_c(\mathcal{D}_{k+1},n)$ 表示顶点个数为 n 且不含 $k+1$ 条两两不交边的凸几何图可能有的最大边数, 则对任意 k 和 $n \geqslant 2k+1$, 有

$$t_c(\mathcal{D}_{k+1},n) = kn.$$

证明 设 G 为凸几何图, 其顶点依循环次序记为 $x_0, \cdots, x_{n-1}$. 不妨设 $\{x_0, \cdots, x_{n-1}\}$ 为一正 n 边形的顶点集. 将线段 x_ix_j $(i \neq j)$ 形成的集合分成 n 个组, 使得两条线段属于同一组当且仅当它们互相平行. 注意, 如果 G 不含 $k+1$ 条两两不交边, 则每组至多含有 $E(G)$ 的 k 条边. 所以, $|E(G)| \leqslant kn$.

为说明此上界不能改进, 考虑边为 $x_ix_{i+\lfloor n/2\rfloor+j}$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1, 1 \leqslant j \leqslant k)$ 的图 G 即可, 其中下标取模 n (图 14.2). □

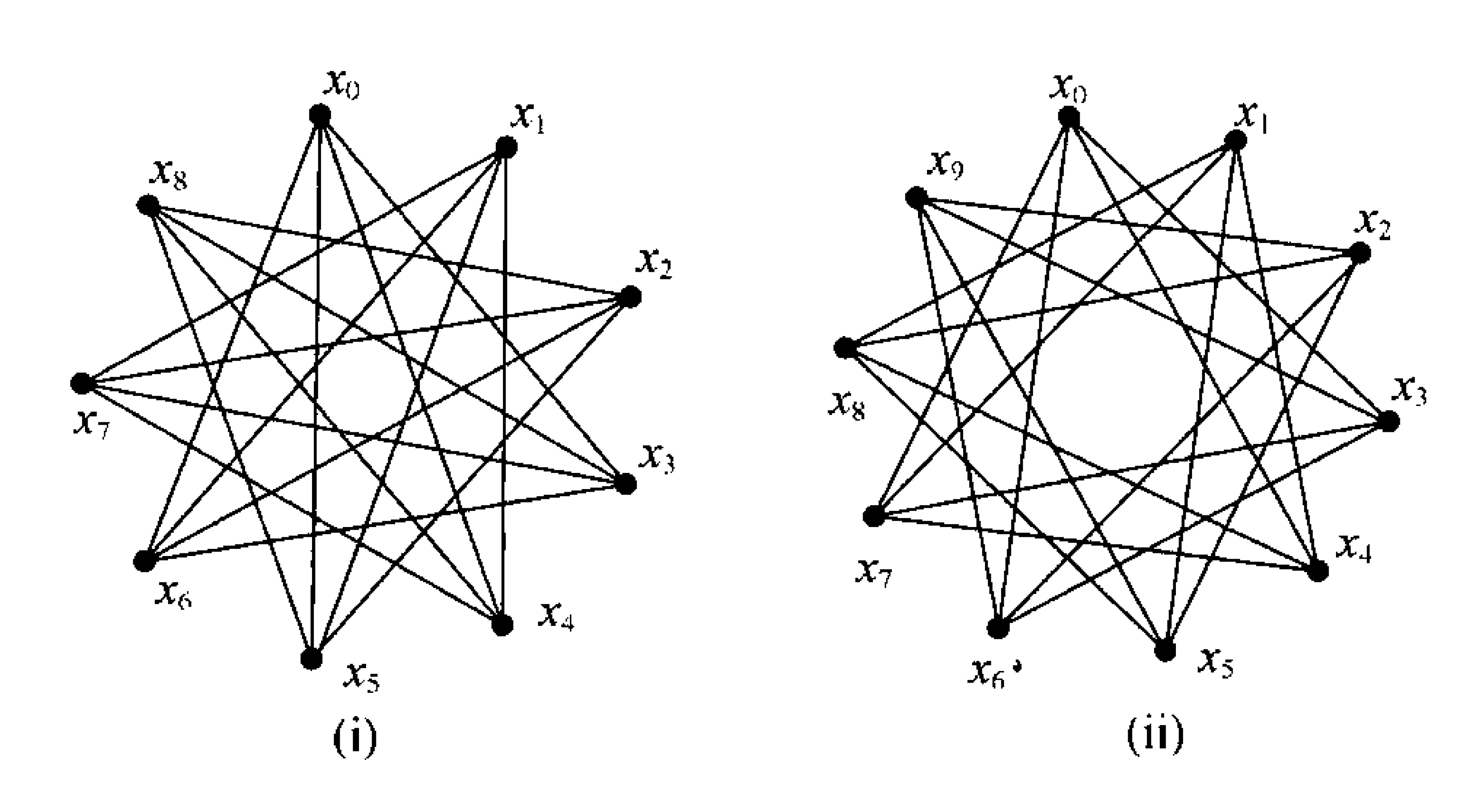


图 14.2 (i) $n=9, k=2$; (ii) $n=10, k=2$

下面研究禁用构形为 k 条边的简单闭多边形情形下的类似问题. 事实上, 我们的结果可以用一种更一般的形式表述.

定义 14.5 一个几何图称为**外平面的**, 如果它可以通过对平面中一个简单闭多边形添加不相交的内部对角线得到. 两个几何图是**同构**的, 如果它们是拓扑等价的, 即存在连续的一一映射 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 将一个图映射成另一个图.

定理 14.6 (Pach; Perles) 设 G_k 为具有 k 个顶点的外平面几何图 $(k \geqslant 3)$, $\mathcal{G}_k$ 表示所有与 G_k 同构的几何图组成的集族, $t(\mathcal{G}_k, n)$ 表示具有 n 个顶点且不含同构于 G_k 的几何子图的几何图可能有的最大边数, 则

$$t(\mathcal{G}_k, n) = |E(T_{k-1}(n))|,$$

其中 $T_{k-1}(n)$ 表示 n 个顶点的平衡完全 $(k-1)$ 部图 (参见第 9 章第 2 节).

定理证明以 Gritzmann 等 (1991) 和 Perles 给出的下述引理为基础.

引理 14.7 设 G_k 为具有 k 个顶点的外平面几何图, P 为平面中无三点共线的任一 k 点集. 则存在几何图 G_k' 同构于 G_k, 其顶点集 $V(G_k') = P$.

证明 不妨假设 G_k 是三角剖分图, 即 $|E(G_k)| = 2k-3$. 确立一个更强的结论会更方便.

设 x_1 和 x_2 为界定 G_k 的闭多边形的任意两个相继顶点, p_1 和 p_2 为 P 的凸包的任意两个相继顶点. 现证明存在双射 $f: V(G_k) \to P$, 使得 $f(x_1) = p_1, f(x_2) = p_2$, 并且开线段 $f(x)f(y)$ 两两不交, 其中 $xy \in E(G_k)$.

对 k 用归纳法. $k = 3$ 结论显然成立. 下设 $k > 3$, 并令 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 依逆时针方向表示 G_k 的顶点. 设以 x_1 和 x_2 为顶点的三角形的第三个顶点为 x_i. 我们断言, 必存在点 $p \in P - \{p_1, p_2\}$ 满足下列两个条件:

(i) 三角形 p_1p_2p 的内部不含 P 的点;

(ii) 存在一条过点 p 的直线 ℓ 分离 p_1 与 p_2, 使得 $\ell \cap P = \{p\}$, 且恰有 P 的 $i-2$ 个点位于以 ℓ 为边界含 p_2 的开半空间中.

为找到这样的点 p, 首先选取一条直线 p_2p' 分离 p_1 与 P 的恰 $i-3$ 个点. 如果三角形 p_1p_2p' 内部无 P 的点, 则令 $p = p'$. 否则, 令 p 为此区域中使角 p_2p_1p 最小的点. 根据这一选取方法, p 满足 (i), 并且至多有 P 的 $i-2$ 个点位于 p_1p 含 p_2 的一侧. 如果令此直线绕 p 旋转, 使它与 p_1p_2 的交点趋于 p_2, 则在它平行于 p_2p' 之前, 必达到一个满足条件 (ii) 的位置 ℓ.

设 H_1 和 H_2 表示由 ℓ 界定的分别含 p_1 和 p_2 的闭半空间, G_1 和 G_2 分别表示由 $\{x_i,\ x_{i+1}, \cdots, x_1\}$ 和 $\{x_2, x_3, \cdots, x_i\}$ 导出的 G 的子图. 由归纳假设, 存在两个双射 $f_j: V(G_j) \to P \cap H_j$ $(j = 1, 2)$, 使得 $f_1(x_1) = p_1$, $f_2(x_2) = p_2$ 且 $f_1(x_i) = f_2(x_i) = p$. 将它们合并成一个双射 $f: V(G_1) \cup V(G_2) \to P$, 结论成立. □

定理 14.6 的证明　设 G 为 n 个顶点的几何图, 边数大于 $|E(T_{k-1}(n))|$. 根据 Turán定理 (定理 9.3), G 必包含 k 个顶点的完全几何子图. 即存在 k 元子集 $P \subseteq V(G)$, 所有由 P 确定的 $\binom{k}{2}$ 条线段都属于 $E(G)$. 从而由引理 14.7 知, 由 P 导出的完全几何子图包含一个同构于 G_k 的子图.

另一方面, 很容易构造具有 n 个顶点 $|E(T_{k-1}(n))|$ 条边的凸几何图 G, 使其不含长为 k 的简单闭多边形 (见习题 14.5). 由定义, 每个具有 k 个顶点的外平面几何图 G_k 都包含一个这样的多边形, 所以 $G_k \not\subseteq G$. □

14.2 偏　序　集

规定一个几何图的边之间的偏序关系有许多自然的方法, 这些偏序关系包含着原图拓扑结构的许多信息. 本节将利用这些信息推广定理 14.2 和 14.3.

定义 14.8　一个**偏序集**是一个有序对 $(X, \prec)$, 其中 X 是一个集合, $\prec$ 是 X 上的自反、反对称与传递的二元关系. 对任意 $x \neq y \in X$, 如果或 $x \prec y$, 或 $y \prec x$, 则称 x 和 y 在 $(X, \prec)$ 中是**可比的**. 如果子集 $C \subseteq X$ 中任意两个元素是可比的, 则称 C 为一个**链**. 如果 C 中任意两个元素都不可比, 则称 C 为**反链**.

我们需要下述基本结果.

定理 14.9 (Dilworth, 1950) 设 $(X, \prec)$ 是有限偏序集.

(i) 如果链的最大长度为 k, 则 X 可以划分成 k 个反链;

(ii) 如果反链的最大长度为 k, 则 X 可以划分成 k 个链.

显然, 这些陈述不能再改进, 因为一个链和一个反链至多有一个公共元素 (图 14.3).

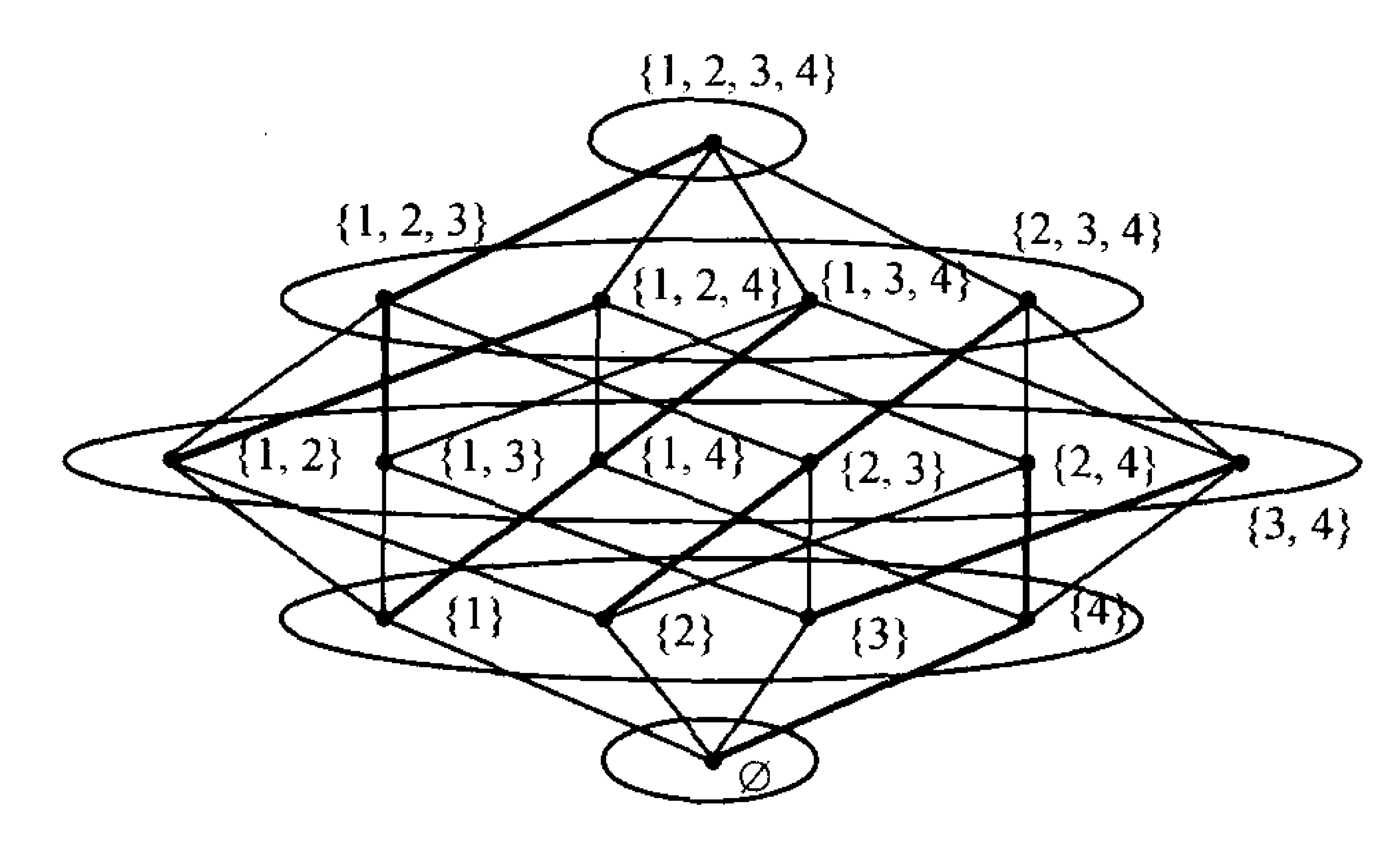


图 14.3 $(2^{\{1,2,3,4\}}, \subset)$ 的划分 —— 划分成链和反链

证明 (i) 对任意 $x \in X$, 定义 x 的**秩**为以 x 为极大元的最长链的长度, 记为 $\mathrm{rank}(x)$. 显然, $1 \leqslant \mathrm{rank}(x) \leqslant k$, 且具有相同秩的所有元素组成的集合是一个反链.

(ii) $|X| = 1$ 时结论显然成立. 假设结论对所有少于 n 个元素的偏序集成立, 令 $|X| = n \geqslant 2$. 可假设 X 不能划分成两个非空子集 X_1 和 X_2, 使得任意两个属于不同子集的元素是不可比的; 否则可以对 $(X_1, \prec)$ 和 $(X_2, \prec)$ 分别用归纳假设.

令 $x_{\min}$ 和 $x_{\max}$ 分别为 $(X, \prec)$ 的极小元和极大元, $x_{\min} \prec x_{\max}$. 从 X 中删去 $x_{\min}$ 和 $x_{\max}$, 得到 $n-2$ 个元素的偏序集, 其反链的最大长度至多为 k. 如果此集没有长为 k 的反链, 则由归纳假设知可将其划分成 $k-1$ 个链. 添加链 $\{x_{\min}, x_{\max}\}$, 即得欲求的划分.

假设 $X - \{x_{\min}, x_{\max}\}$ 含一个长为 k 的反链 A, 令

$$A^+ = \{x \in X \mid \text{存在 } a \in A, \text{使得 } a \prec x\},$$
$$A^- = \{x \in X \mid \text{存在 } a \in A, \text{使得 } a \succ x\}.$$

显然, $A^+ \cup A^- = X, A^+ \cap A^- = A$, $x_{\min} \notin A^+$ 且 $x_{\max} \notin A^-$. A^+ 和 A^- 都可以划分成 k 个链, 每个链恰含 A 的一个元素. 如果两个这样的链含 A 的同一个元素, 则把它们连在一起, 从而得到将 X 划分成 k 个链的划分. □

现在即可证明以下结果, 它肯定地回答了 Avital-Hanani (1966), Kupitz (1979) 及 Erdős 提出的一个猜想.

定理 14.10 (Pach, Törőcsik., 1993)　令 $t(\mathcal{D}_{k+1}, n)$ 表示具有 n 个顶点且不含 $k+1$ 条两两不交边的几何图可能有的最大边数, 则对任意 $k, n \geqslant 1$, 有

$$t(\mathcal{D}_{k+1}, n) \leqslant k^4 n\,.$$

证明　设 G 为具有 n 个顶点的几何图, 不含 $k+1$ 条两两不交边. 对任意点 v, 令 $x(v)$ 和 $y(v)$ 分别表示 v 的 x 坐标和 y 坐标. 不妨假设 G 的任意两个顶点的 x 坐标互异.

设 $uv, u'v' \in E(G)$, 并且 $x(u) < x(v)$, $x(u') < x(v')$. 如果 $x(u) \leqslant x(u')$, $x(v) \leqslant x(v')$, 则称 uv **先于** $u'v'$ (记为 $uv \ll u'v'$). 此外, 称 uv 位于 $u'v'$ **下方**, 如果不存在垂直直线 ℓ 与 uv 和 $u'v'$ 同时相交, 并且

$$y(\ell \cap uv) \geqslant y(\ell \cap u'v')\,.$$

[注意最后这一关系在 $E(G)$ 上未必是反对称的或传递的.]

定义 $E(G)$ 上的四个二元关系 $\prec_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 如下. 设 uv 和 $u'v'$ 为 G 的两条不交边, uv 位于 $u'v'$ 下方. 规定

$$\begin{aligned}
&uv \prec_1 u'v', \quad \text{若 } uv \ll u'v',\\
&uv \prec_2 u'v', \quad \text{若 } u'v' \ll uv,\\
&uv \prec_3 u'v', \quad \text{若 } [x(u), x(v)] \subseteq [x(u'), x(v')],\\
&uv \prec_4 u'v', \quad \text{若 } [x(u'), x(v')] \subseteq [x(u), x(v)]
\end{aligned}$$

见图 14.4.

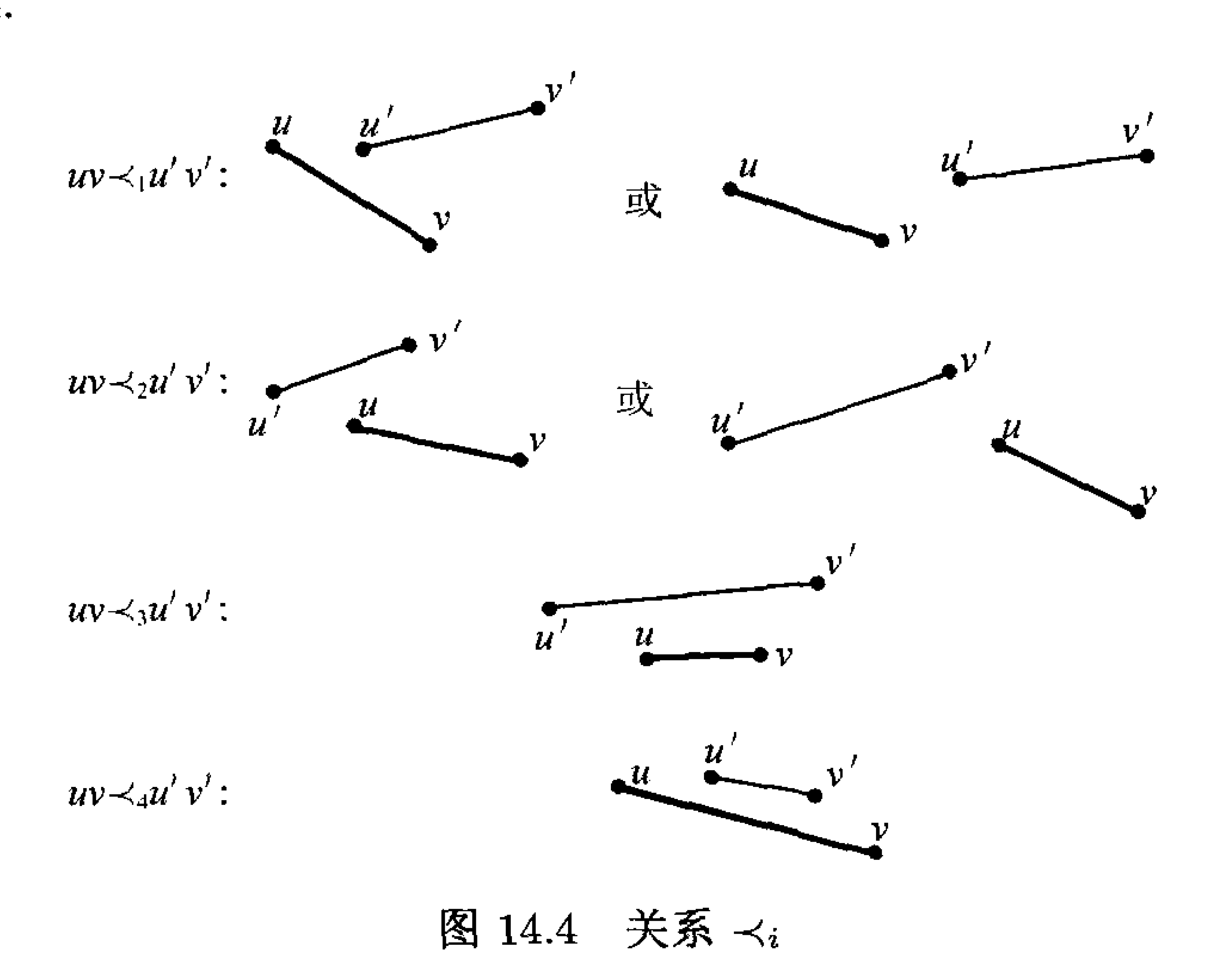


图 14.4　关系 $\prec_i$

由定义立即可得

(a) $(E(G), \prec_i)$ 为一偏序集 $(1 \leqslant i \leqslant 4)$;

(b) 任一对不交边至少对一个关系 $\prec_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 是可比的.

注意 $(E(G), \prec_i)$ 中不含长为 $k+1$ 的链, 否则 G 将含 $k+1$ 条两两不交边 $(1 \leqslant i \leqslant 4)$. 由定理 14.9 (i), 对任意 i, $E(G)$ 可划分成至多 k 个组, 使得任意两条属于同一组的边对 $\prec_i$ 不可比. 综合运用这四个划分, 可将 $E(G)$ 分解成至多 k^4 个组 E_j $(1 \leqslant j \leqslant k^4)$, 使得 E_j 中任意两个元素对任一关系 $\prec_i$ 都是不可比的. 所以由 (b), 任意一组 E_j 都不含两条不交边. 对图 $(V(G), E_j)$ 用定理 14.2, 得

$$|E_j| \leqslant t(\mathcal{D}_2, n) \leqslant n \qquad (1 \leqslant j \leqslant k^4),$$
$$|E(G)| = \sum_{j=1}^{k^4} |E_j| \leqslant k^4 n. \qquad \square$$

定理 14.10 中的界已由 G. Tóth (2000) 改进到 $t(\mathcal{D}_{k+1}, n) \leqslant ck^2 n$, 其中 c 为适当的常数.

14.3 交 叉 边

如果一个几何图的两条边有一个公共内点, 称这两条边是相互**交叉的**. 对任意 $k \geqslant 2$, 令 $\mathcal{C}_k$ 表示具有 k 条两两交叉边的所有几何图组成的集合. 因为 n 个顶点的平面图至多有 $3n-6$ 条边, 所以有下述结论.

命题 14.11 令 $t(\mathcal{C}_2, n)$ 表示具有 n 个顶点但没有交叉边的几何图可能有的最大边数, 则对任意 $n \geqslant 3$, 有

$$t(\mathcal{C}_2, n) = 3n - 6.$$

受到上节所得结果的启发, 人们猜想, 对任意 $k \geqslant 3$ 均存在常数 c_k, 使得 $t(\mathcal{C}_k, n) \leqslant c_k n$. Agarwal 等 (1997) 对 $k = 3$ 给出了肯定的回答, 但是对 $k > 3$ 这一问题仍未解决.

为了给出 $t(\mathcal{C}_3, n)$ 的非平凡上界, 需要一个定量结果, 保证任一有相当多边的几何图都含有许多交叉边.

定理 14.12 (Ajtai et al., 1982; Leighton, 1983) 令 $\kappa(n, m)$ 表示具有 n 个顶点 m 条边的几何图所含的最小交叉边对的个数. 如果 $m \geqslant 4n$, 则

$$\kappa(n, m) \geqslant \frac{1}{100} \cdot \frac{m^3}{n^2}.$$

证明 对任一固定的 n, $n \geqslant 3$, 对 m 用归纳法立即可得

$$\kappa(n, m) \geqslant m - 3n + 6. \qquad (14.1)$$

事实上, 如果 $m \leqslant 3n-6$, 则无须证明. 设 G 为具有 n 个顶点 $m > 3n-6$ 条边的几何图, 则 G 必至少含有一对交叉边. 从 G 中删去一对交叉边中的一条边, 对所得图用归纳假设, (14.1) 得证.

以下对 n 用归纳法证明. 对任何 $m \geqslant 4n$,

$$\kappa(n,m) \geqslant \frac{3}{64} \cdot \binom{n}{4} \cdot \left(\frac{m}{\binom{n}{2}}\right)^3 . \tag{14.2}$$

如果 $n \leqslant 8$, 则 G 不可能有 $4n$ 条边. 如果 $n=9$, 则 G 必为有 $m=\binom{9}{2}=36$ 条边的完全图, 从而由 (14.1) 可得 (14.2). 事实上, 如果 $n \geqslant 10$, $4n \leqslant m \leqslant 5n$, 由 (14.1) 也可推出 (14.2).

所以, 可假设 G 为顶点数 $n \geqslant 10$, 边数 $m > 5n$ 的几何图, 且对任一顶点个数小于 n 的几何图 (14.2) 成立. 令 $\kappa(G)$ 表示 G 中交叉边对的个数. 显然,

$$\sum_{x \in V(G)} \kappa(G-x) = (n-4)\kappa(G),$$

其中 $G-x$ 表示从 G 中删去顶点 x 和所有与 x 关联的边所得的图. 因为 $G-x$ 至少含有 $m-(n-1) \geqslant 5n-(n-1) > 4(n-1)$ 条边, 由归纳假设即得

$$\kappa(G-x) \geqslant \frac{3}{64} \cdot \binom{n-1}{4} \cdot \left(\frac{m_x}{\binom{n-1}{2}}\right)^3,$$

其中 m_x 为 $G-x$ 的边数. 利用以下事实

$$\sum_{x \in V(G)} m_x = m(n-2),$$

由 Jensen 不等式, 得

$$\begin{aligned}
\kappa(G) &= \frac{1}{n-4} \sum_{x \in V(G)} \kappa(G-x) \\
&\geqslant \frac{1}{n-4} \cdot \frac{3}{64} \cdot \frac{\binom{n-1}{4}}{\binom{n-1}{2}^3} \sum_{x \in V(G)} m_x^3 \\
&\geqslant \frac{1}{n-4} \cdot \frac{3}{64} \cdot \frac{\binom{n-1}{4}}{\binom{n-1}{2}^3} \cdot n \left(\frac{m(n-2)}{n}\right)^3 \\
&= \frac{3}{64}\binom{n}{4}\left(\frac{m}{\binom{n}{2}}\right)^3,
\end{aligned}$$

若 $n \geqslant 9$, (14.2) 式的右端大于 $\frac{1}{100}\frac{m^3}{n^2}$, 即得欲证结论. □

上述 $\kappa(n,m)$ 的下界的数量级不能改进. 将 n 个点尽可能均匀地分布在平面上的 $n^2/(2m)$ 个不交圆上, 并用线段连接落在同一圆上的两点, 即可说明这一点.

对每个固定的 $k \geqslant 2$, 由定理 14.12 可得 $t(\mathcal{C}_{k+1},n)$ 的一个非平凡 (即次二次的) 上界.

推论 14.13 令 $t(\mathcal{C}_3,n)$ 表示具有 n 个顶点不含 3 条两两交叉边的几何图可能有的最大边数, 则

$$t(\mathcal{C}_3,n) < 13n^{3/2}.$$

证明 设 G 为具有 n 个顶点 $m \geqslant 4n$ 条边的几何图. 则由定理 14.12 知, 存在边 e 至少与 G 的另外 $\frac{1}{50}\frac{m^2}{n^2}$ 条边交叉. 如果 G 不含 3 条两两交叉的边, 则与 e 交叉的边形成具有 $n-2$ 个顶点的平面图. 所以,

$$\frac{1}{50}\frac{m^2}{n^2} \leqslant t(\mathcal{C}_2,n-2) \leqslant 3(n-2)-6,$$

即得结论. □

重复上述论证即可推知, 对任意 k, 存在常数 c_k, 使得

$$t(\mathcal{C}_k,n) \leqslant c_k n^{2-1/2^{k-2}}$$

(见习题 14.8).

下一节中用不同的方法对这些较自然的上界作实质性的改进.

同命题 14.4 一样, 这里再给出凸几何图的一个确切结果, 区别是命题 14.4 中的禁用构形由两两不交边构成.

定理 14.14 (Capoyleas, Pach, 1992) 令 $t_c(\mathcal{C}_{k+1},n)$ 表示具有 n 个顶点不含 $k+1$ 条两两交叉边的凸几何图可能有的最大边数, 则对任意 k 和 $n \geqslant 2k+1$, 有

$$t_c(\mathcal{C}_{k+1},n) = 2kn - \binom{2k+1}{2}.$$

证明 固定 $k \geqslant 1$. 结论对 $n = 2k+1$ 显然成立, 因为

$$2k(2k+1) - \binom{2k+1}{2} = \binom{2k+1}{2}.$$

假设定理对所有小于 n 的正整数成立, 考虑具有最大线段数的图 G, 这些线段连接凸 n 边形的顶点且无 $k+1$ 条线段两两交叉.

我们需要下述简单结论.

断言 A 如果沿凸 n 边形的边界两个顶点被少于 k 个顶点分离, 则它们在 G 中被一条边连接.

事实上, 在两个这样的顶点间添加一条边, 不会产生 G 的 $k+1$ 条两两交叉的边.

如果不存在这样的边, 其端点被沿凸 n 边形边界 (两个弧上) 的至少 k 个顶点分离, 则

$$|E(G)| = t_c(\mathcal{C}_{k+1}, n) = kn \leqslant 2kn - \binom{2k+1}{2},$$

所以可假设存在一条这样的边 $uv \in E(G)$, 并令

$$u, x_1, \cdots, x_{n_1}, v, y_1, \cdots, y_{n_2} \quad (n_1, n_2 \geqslant k)$$

依顺时针方向表示图 G 的顶点.

在 G 的所有与 uv 交叉的边所成的集合上按下述方法定义一个偏序 '$\prec$'. 两条边 x_iy_j 和 $x_{i'}y_{j'}$ 是可比的, 当且仅当它们相互交叉, 且

$$x_iy_j \prec x_{i'}y_{j'} \iff i < i' \text{ 且 } j < j'.$$

这显然是一个传递关系.

仿定理 14.9 (i) 的证明, 定义边 x_iy_j 的**秩**为以 x_iy_j 为极大元的最长链的长度. 所有具有相同秩的元素的集合构成一个**反链**, 即不存在同秩的两条边是相互交叉的. 此外, 对每条边有

$$1 \leqslant \operatorname{rank}(x_iy_j) \leqslant k-1,$$

否则 G 含有 $k+1$ 条两两交叉边.

现定义凸几何图 G_1 如下, n_2+k+1 个顶点 (按顺时针方向) 为

$$u, x_1^*, \cdots, x_{k-1}^*, v, y_1, \cdots, y_{n_2},$$

限定在 $\{u, v, y_1, \cdots, y_{n_2}\}$ 上时令 G_1 与 G 相同. 令 $x_r^*y_j \in E(G_1)$, 当且仅当存在 $x_iy_j \in E(G)$ 且 $\operatorname{rank}(x_iy_j) = r$. 最后, 令 $\{u, x_1^*, \cdots, x_{k-1}^*, v\}$ 导出的 G_1 的子图仅有一条边 uv.

断言 B　G_1 不包含 $k+1$ 条两两交叉边.

证明下述更强的结论更为方便: 若 G_1 存在 t 条两两交叉边 $x_{r_1}^*y_{j_1}, \cdots, x_{r_t}^*y_{j_t}$ $(r_1 > \cdots > r_t, j_1 > \cdots > j_t)$, 则在 G 中可找到 t 条两两交叉边, 使得它们均与 uv 交叉且有一个端点属于 $\{y_j \mid j_1 \geqslant j \geqslant j_t\}$.

选取 t 条边 $x_{i_1}y_{j_1}, \cdots, x_{i_t}y_{j_t} \in E(G)$, 使得

$$\operatorname{rank}(x_{i_1}y_{j_1}) = r_1, \cdots, \operatorname{rank}(x_{i_t}y_{j_t}) = r_t.$$

令 $x_{p_1}y_{q_1} = x_{i_1}y_{j_1}$, 并按归纳法假设已找到一列两两交叉的边 $x_{p_1}y_{q_1}, \cdots, x_{p_{t-1}}$ $y_{q_{t-1}} \in E(G)$, 满足

1. $\mathrm{rank}(x_{p_1}y_{q_1}) = r_1, \cdots, \mathrm{rank}(x_{p_{t-1}}y_{q_{t-1}}) = r_{t-1}$;

2. $q_1 = j_1, q_2 \geqslant j_2, \cdots, q_{t-1} \geqslant j_{t-1}$.

存在一条秩为 r_t 的边 x_py_q 与 $x_{p_{t-1}}y_{q_{t-1}}$ 相交叉. 如果 $q \geqslant j_t$, 则取此边为 $x_{p_t}y_{q_t}$, 即得结论. 如果 $q < j_t$, 则 $p \geqslant i_t$, 因为 x_py_q 和 $x_{i_t}y_{j_t}$ (具有相同秩的两条边) 不可能交叉. 令 $x_{p_t}y_{q_t} = x_{i_t}y_{j_t}$. 此边必与 $x_{p_{t-1}}y_{q_{t-1}}$ 交叉, 从而与所有的边 $x_{p_1}y_{q_1}, \cdots, x_{p_{t-1}}y_{q_{t-1}}$ 交叉. 断言 B 得证.

断言 C $|E(G_1)| \leqslant t_c(\mathcal{C}_{k+1}, n_2 + k + 1) - k^2 + k$.

考虑到断言 B, 只须证明可在 G_1 中添加 $k^2 - k$ 条边而不产生 $k+1$ 条两两交叉边. 由断言 A, 一条边若连接两个被少于 k 个顶点分离的顶点, 则可将此边添加到 G_1.

注意, 对任一边 $x_iy_j \in E(G)$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$,

$$\mathrm{rank}(x_iy_j) \leqslant j.$$

所以, 如果 $r > j$, 则有

$$x_r^*y_j \notin E(G_1),$$

并且除 uv 外所有 $\{u, x_1^*, \cdots, x_{k-1}^*, v\}$ 确定的边都不在 G_1 中, 所以至少有

$$\sum_{j=1}^{k-1}(k-1-j) + \binom{k+1}{2} - 1 = k^2 - k$$

条边可以添加到 G_1 中而不生成 $k+1$ 条两两交叉的边. 这样就证明了断言 C.

类似地, 可在顶点集

$$\{u, x_1, \cdots, x_{n_1}, v, y_1^*, \cdots, y_{k-1}^*\}$$

上定义几何图 G_2 如下: 用一条 G_2 的边连接 x_i 与 y_r^*, 当且仅当存在边 $x_iy_j \in E(G)$ 且 $\mathrm{rank}(x_iy_j) = r$; 令 $\{u, x_1, \cdots, x_{n_1}, v\}$ 在 G_2 中导出的子图与在 G 中导出的子图相同. 同上, 有

$$|E(G_2)| \leqslant t_c(\mathcal{C}_{k+1}, n_1 + k + 1) - k^2 + k.$$

令 $d_{G_i}(z)$ 表示 $z \in V(G_i)$ 在 $G_i (i = 1, 2)$ 中的度, e_r 表示 G 中秩为 r $(1 \leqslant r \leqslant k-1)$ 的边数. 因为秩为 r 的边形成具有 $d_{G_1}(x_r^*) + d_{G_2}(y_r^*)$ 个非孤立顶点的 G 的**森林** (即无圈子图), 故有下述结论.

断言 D 对任意 $1 \leqslant r \leqslant k-1$, 有 $e_r \leqslant d_{G_1}(x_r^*) + d_{G_2}(y_r^*) - 1$.

现在可以很容易地完成定理 14.14 的证明. 因为 $uv \in E(G_1) \cap E(G_2)$, 由断言 D, 有

$$\begin{aligned}|E(G)| &= |E(G_1)| + |E(G_2)| - 1 - \sum_{r=1}^{k-1}(d_{G_1}(x_r^*) + d_{G_2}(y_r^*) - e_r)\\ &\leqslant |E(G_1)| + |E(G_2)| - k.\end{aligned}$$

将其与断言 C 结合, 得到

$$|E(G)| \leqslant t_c(\mathcal{C}_{k+1}, n_1 + k + 1) + t_c(\mathcal{C}_{k+1}, n_2 + k + 1) - 2k^2 + k.$$

根据假设, $n_1 + n_2 + 2 = n, n_1 \geqslant k, n_2 \geqslant k$. 所以对 $i = 1, 2$, 有

$$2k + 1 \leqslant n_i + k + 1 < n,$$

应用归纳假设, 可得

$$\begin{aligned}|E(G)| &= t_c(\mathcal{C}_{k+1}, n)\\ &\leqslant 2k(n_1 + k + 1) + 2k(n_2 + k + 1) - 2\binom{2k+1}{2} - 2k^2 + k\\ &= 2k(n_1 + n_2 + 2) - 2k^2 - k\\ &= 2kn - \binom{2k+1}{2},\end{aligned}$$

此即欲证结果.

如下例所示这个界是紧的. 设 $x_1, \cdots, x_n$ 依顺时针方向为凸 n 边形的顶点. x_i 与 x_j $(i \neq j)$ 间连一条边当且仅当它们沿多边形的边界被少于 k 个顶点分离, 或 $i \leqslant k$ (图 14.5). □

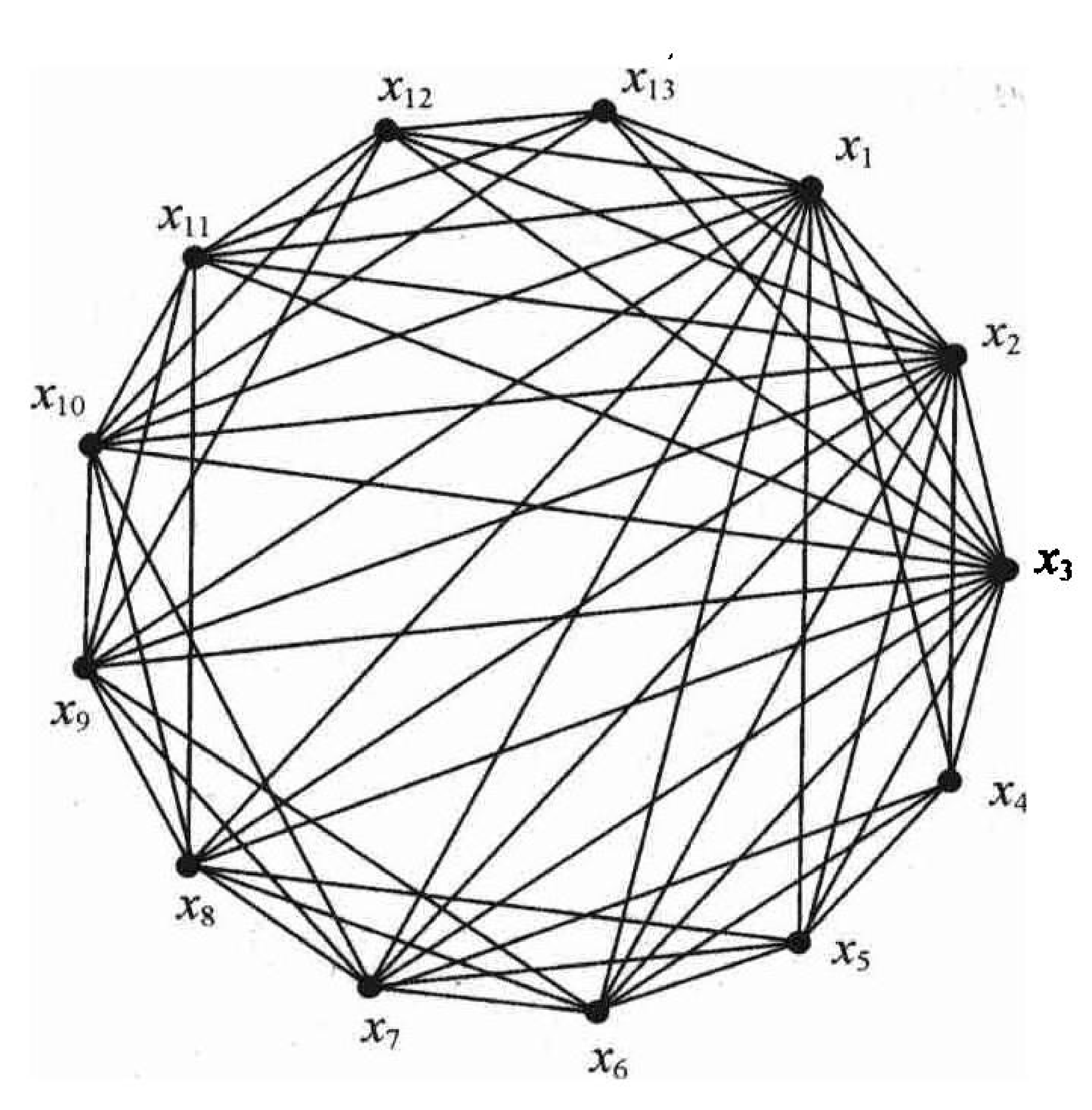


图 14.5　$n = 13, k = 3$

14.4 交叉数与对分宽度

在推论 14.13 中证明了具有 n 个顶点且不含三条两两交叉边的几何图的边数不会超过 $13n^{3/2}$. 证明依据的是 n 个顶点 m 条边的几何图所含交叉边对的个数的最小值的一个一般下界 (见定理 14.12). 论证指出, 如果要改进推论 14.13, 就必须对可以画成相对少的交叉边的图的结构进行分析. 在本节中将用此方法. 该方法不仅适用于几何图, 而且适用于任何可用 Jordan 弧画在平面上的图, 其中任二弧至多交于一点.

定义 14.15 设 G 为 n 个顶点的简单图. G 的**画法**是指 G 在平面中的一种表示, 每个顶点对应一个点, 每条边用连接相应两点的一条 Jordan 弧表示, 此弧不经过边的端点之外的任何顶点. 称两条弧相互交叉, 如果两者有一个公共内点. 图 G 的**交叉数** $\mathrm{cr}(G)$ 定义为图 G 的画法中交叉弧对的最小个数.

容易证明, 这个最小数在满足下列条件的画法中恒可达 (见习题 14.12):

(i) 不存在两条弧有多于一个交点 (包括它们的端点);

(ii) 不存在三条弧有一个公共内点.

将图 G 的顶点集划分成两个不交部分 V_1 和 V_2, 令 $E(V_1, V_2)$ 表示一个端点在 V_1 中, 另一个端点在 V_2 中的边构成的集合. 图 G 的**对分宽度**定义为

$$b(G) = \min_{|V_1|,|V_2| \leqslant 2n/3} |E(V_1, V_2)|,$$

其中最小值取遍满足 $|V_1|, |V_2| \leqslant 2n/3$ 的所有划分 $V(G) = V_1 \cup V_2$.

我们需要下述结果, 它是平面图的 Lipton-Tarjan 分离子定理 (定理 8.3) 加权形式的简单推论.

引理 14.16 设 G 为具有 n 个顶点的图, 顶点的度分别为 $d_1, \cdots, d_n$, 则

$$b^2(G) \leqslant (1.58)^2 \left(16\mathrm{cr}(G) + \sum_{i=1}^{n} d_i^2\right),$$

其中 $b(G)$ 和 $\mathrm{cr}(G)$ 分别表示图 G 的对分宽度和交叉数.

证明 考虑图 G 的满足条件 (i) 和 (ii) 且有 $\mathrm{cr}(G)$ 个交叉弧对的画法. 在每个交叉处引入一个新顶点, 得到具有 $N = n + \mathrm{cr}(G)$ 个顶点的平面图 H. 对每个新顶点赋以权 0, 对其他顶点都赋以权 $1/n$. 由习题 8.5, 可以通过删去至多

$$1.58\left(16\mathrm{cr}(G) + \sum_{i=1}^{n} d_i^2\right)^{1/2}$$

条边将 H 分离成两部分 H_1 和 H_2, 使得每个 $V_1 = V(H_1) \cap V(G)$ 和 $V_2 = V(H_2) \cap V(G)$ 至多含有 $\dfrac{2n}{3}$ 个元素. 所以,

$$b(G) \leqslant |E(V_1,V_2)| \leqslant 1.58\left(16\mathrm{cr}\,(G)+\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right)^{1/2}. \qquad \square$$

现已准备就绪, 开始证明本节的主要结果.

定理 14.17 (Pach et al., 1994)　设 G 为具有 n 个顶点的图, k 为一正整数. 如果 G 有一个画法, 其中任二弧至多交于一点, 且不含 $k+1$ 条两两交叉弧, 则

$$|E(G)| \leqslant 3n(10\log n)^{2k-2}.$$

证明　对 k 和 n 用双重归纳法证明. 对 $k=1$ 和所有 n 结论都成立. 对所有 $k>1$ 和 $n \leqslant 6\cdot 10^{2k-2}$ 结论也成立, 因为对这些值上述上界超过 $\binom{n}{2}$.

假设已证对某一 k 和所有 n 结论成立. 现证对 $k+1$ 和所有 n 结论成立. 设 $n \geqslant 6\cdot 10^{2k}$, 并假设定理对 $k+1$ 和所有顶点个数小于 n 的图成立.

设 G 为具有 n 个顶点的图, 存在 G 的一个画法, 其中任二弧至多交于一点且无 $k+2$ 条两两交叉边. 为简单起见, 将这一画法也记为 $G=(V(G),E(G))$. 对任一弧 $e\in E(G)$, 令 G_e 表示所有与 e 交叉的弧形成的图. 显然, G_e 不含 $k+1$ 条两两交叉的弧. 所以, 由归纳假设,

$$\begin{aligned}\mathrm{cr}\,(G) &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{e\in E(G)} |E(G_e)| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{e\in E(G)} 3n(10\log n)^{2k-2} \\ &\leqslant \frac{3}{2}|E(G)|\cdot n(10\log n)^{2k-2}.\end{aligned}$$

因为对顶点度为 $d_1,\cdots,d_n$ 的任何图 G, 有 $\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leqslant 2|E(G)|\cdot n$, 由引理 14.16 即可推知

$$\begin{aligned}b(G) &\leqslant 1.58\left(16\mathrm{cr}\,(G)+\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant 9\sqrt{n|E(G)|}\cdot(10\log n)^{k-1}.\end{aligned}$$

考虑 $V(G)$ 的划分 $V(G)=V_1\cup V_2$, 每部分至多有 $\dfrac{2n}{3}$ 个顶点, 且连接两部分的边数为 $b(G)$. 令 G_1 和 G_2 分别表示由 V_1 和 V_2 导出的 G 的子图. 因为 G_1 和 G_2 均不含 $k+2$ 条两两交叉边且顶点个数都小于 n, 由归纳假设,

$$\begin{aligned}|E(G)| &= |E(G_1)|+|E(G_2)|+b(G) \\ &\leqslant 3n_1\,(10\log n_1)^{2k}+3n_2\,(10\log n_2)^{2k}+b(G),\end{aligned}$$

其中 $n_i = |V_i|$ $(i=1,2)$. 联立最后两个不等式, 得到

$$\begin{aligned}
&|E(G)| - 9\sqrt{n}(10\log n)^{k-1}\sqrt{|E(G)|}\\
&\leqslant 3n_1\left(10\log\frac{2n}{3}\right)^{2k} + 3n_2\left(10\log\frac{2n}{3}\right)^{2k}\\
&\leqslant 3n(10\log n)^{2k}\left(1-\frac{k}{\log n}\right).
\end{aligned}$$

如果这一不等式的左端是负的, 则 $|E(G)| \leqslant 3n(10\log n)^{2k}$, 即欲证结论成立. 否则, 对 $x \geqslant |E(G)|$,

$$f(x) = x - 9\sqrt{n}(10\log n)^{k-1}\sqrt{x}$$

为 x 的单调递增函数. 通过简单的计算得到

$$f(3n(10\log n)^{2k}) > 3n(10\log n)^{2k}\left(1-\frac{k}{\log n}\right).$$

所以

$$f(|E(G)|) < f(3n(10\log n)^{2k}),$$

由此推知

$$|E(G)| < 3n(10\log n)^{2k},$$

欲证结论成立. □

推论 14.18 *令 $t(\mathcal{C}_{k+1}, n)$ 表示具有 n 个顶点不含 $k+1$ 条两两交叉边的几何图可能有的最大边数, 则对任意 $k, n \geqslant 1$,*

$$t(\mathcal{C}_{k+1}, n) \leqslant 3n(10\log n)^{2k-2}.$$

对 $k=2$ 的情况, Agarwal, Aronov et al. (1997) 除去了定理 14.17 中上界的对数项. 他们的证明已由 Pach, Radoičić et al. (2003) 以及 Ackerman-Tardos (2007) 简化并加强. 对 $k=3$, 定理 14.17 中的估计也被改进为 n 的一个线性上界. 一般地, 对较大的 k, Fox-Pach (2008) 将指数 $2k-2$ 缩减为 $c\log k$, 其中 c 为适当常数. 对几何图, Valtr (1997) 将推论 14.18 的结果改进成了 $t(\mathcal{C}_{k+1}, n) \leqslant c_k n\log n$.

14.5 交叉数与关联数

容易验证, 定理 14.12 对图的任意画法依然成立, 也就是说, 证明中不要求边画成直线段. 此外, 该定理还给出了**不与同一顶点关联**的交叉边对个数的一个下界, 即计数时不计入具有公共端点的边之间的交叉. 这里叙述一个略微不同的证明, 该证明给出了比 1/100 更好的常数. 已知的最好常数是由 Pach, Radoičić et al. (2006a, 2006b) 发现的.

定理 14.19　设 G 为画在平面上的图, 顶点数为 n, 边数 $m \geqslant 4n$. 则不与同一顶点关联的交叉边对的个数 $\kappa^*(G)$ 满足

$$\kappa^*(G) \geqslant \frac{1}{64} \cdot \frac{m^3}{n^2}.$$

证明　同定理 14.12 证明的开头一样, 对 m 用归纳法证明, 若 $n \geqslant 3$, 有

$$\kappa^*(G) \geqslant m - 3n + 6,$$

从而对任意图 G, 有

$$\kappa^*(G) \geqslant m - 3n. \tag{14.3}$$

对任意 $0 < p \leqslant 1$, 定义图 G 的一个随机子画法 (random subdrawing) G_p 如下, 以概率 p 独立选取 G 的每个顶点, 令 G_p 表示由所选顶点导出的子画法, 即 G 的一条边属于 G_p (以相同的嵌入方式), 当且仅当它的两个端点都被选取. 用 $n(G_p)$ 和 $m(G_p)$ 表示 G_p 的顶点数和边数. 根据 (14.3), 有

$$\kappa^*(G_p) \geqslant m(G_p) - 3n(G_p).$$

不等式两边取期望值, 得

$$E[\kappa^*(G_p)] \geqslant E[m(G_p)] - 3E[n(G_p)].$$

显然 $E[n(G_p)] = pn$, $E[m(G_p)] = p^2 m$. 另一方面, 由 G 得出的 G_p 的画法中, 不与同一顶点关联的交叉边对的个数的期望值等于 $p^4\kappa^*(G)$. 所以

$$p^4\kappa^*(G) \geqslant p^2 m - 3pn.$$

令 $p = \dfrac{4n}{m}$, 则

$$\kappa^*(G) \geqslant \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3} = \frac{m^3}{16n^2} - \frac{3m^3}{64n^2} = \frac{1}{64} \cdot \frac{m^3}{n^2},$$

即得欲证结论. □

L.Székely (1997) 对定理 14.19 的富有成效的研究指出, 利用定理 14.19 可巧妙地证明组合几何学中许多重要结果. 为说明这一点, 我们给出推论 11.8, 即 Szemerédi-Trotter 定理的一个十分简短的证明. 推论 11.8 指出, 平面中 m 条互异直线与 n 个互异点间的关联数的最大值至多为

$$c\left(m^{2/3}n^{2/3} + m + n\right),$$

其中 c 为适当常数.

推论 11.8 的证明 不妨设每条线至少与一点关联. 用 I 表示点与线间的关联数. 定义一个图 G 的画法如下, 其顶点集为一给定 n 点集, 两点为一条线上的相继顶点时, 两点间连一线段. 显然, $|E(G)| = I - m$.

另外, 由定理 14.19 知, 或 $|E(G)| < 4n$, 或

$$\kappa^*(G) \geqslant \frac{1}{64}\frac{(I-m)^3}{n^2}.$$

将这个界与平凡关系式 $\kappa^*(G) \leqslant \binom{m}{2}$ 相比较即得结论. □

在第 11 章, 作为定理 11.7 的一个简单推论, 确立了 Szemerédi-Trotter 定理. 该定理指出, 在 n 条直线的配置中任意 m 个胞腔 (面) 的总边数至多为 $c'(m^{2/3}n^{2/3} + n)$, 其中 c' 为适当常数. 按照 Dey-Pach (1998) 修改 Székely 的上述证明, 即可得定理 11.7.

定理 11.7 的证明 注意, 如必要, 将每条线替换为两条非常靠近的平行线, 只须证明断言对任两个胞腔都无公共边的胞腔 (面) 族 $\mathcal{C} = \{f^1, \cdots, f^m\}$ 成立. 在每个面 $f^i \in \mathcal{C}$ 中选取一点 p_i. 对分别属于 $f^i \in \mathcal{C}$ 和 $f^j \in \mathcal{C}$ 的共线边构成的对 (s_i, s_j), 用长为 3 的经过 s_i 和 s_j 中点的折线链连接 p_i 与 p_j, 要求这一折线不与 $\mathcal{C}$ 的任意其他元素相邻. 这些折线链的集合可视为一个图 G' 的边集, 其顶点为 $p_1, \cdots, p_n$. 如果一条线与 $\mathcal{C}$ 的 k 个胞腔相邻, 则该线恰对 G' 的 $k-1$ 条边有贡献. 所以, $\mathcal{C}$ 中所有胞腔的总边数 X 与 G' 的边数至多相差 m. 删去 G' 中的重边, 得到边数满足 $|E(G)| \geqslant |E(G')|/4 \geqslant (X-m)/4$ 的图 G. 由于 G 的两条边间的任一交叉即为配置中某对线的交叉, 由定理 14.19 知, 或 $|E(G)| < 4n$, 或

$$\binom{m}{2} \geqslant \kappa^*(G) \geqslant \frac{1}{64} \cdot \frac{|E(G)|^3}{n^2}.$$

因为 $X \leqslant 4|E(G)| + m$, 即得结论. □

Székely 的证明所蕴涵的朴素思想是非常有效的, 可用来解决许多同类问题, 只要相应的图 G 无 "平行" 边, 即任一对顶点间至多有一条边相连. 令 $I(P, C)$ 表示平面中的 m 点集 P 与 n 个单位圆的集合 C 间的关联数. 由定理 11.10(i), 有 $I(P, C) \leqslant c''(m^{2/3}n^{2/3} + m + n)$.

定理 11.10(i) 的证明 与线的情形 (见推论 11.8 的证明) 相同, 在顶点集 P 上画图 G, 但这里只沿含 P 的点数多于 2 的圆, 以避免沿此圆出现环和重边. 即两点 $p_1, p_2 \in P$ 间连一条边 (圆弧), 如果 p_1 和 p_2 为沿 C 中此种圆的相继点. 于是有 $|V(G)| = m$, $|E(G)| \geqslant I(P, C) - 2n$. 在此情形下, G 可能含有平行边, 但边的最大重数至多为 2. 所以通过至多删去 G 的边的一半, 可使之成为无平行边的图. 此外, $\kappa^*(G) \leqslant n(n-1)$, 所以有 $I(P, C) \leqslant c''(m^{2/3}n^{2/3} + m + n)$, 其中 c'' 为常数. □

对 $n = m$ 的情形应用定理 11.10(i), 可得推论 11.11, 即 Spencer-Szemerédi-Trotter 定理: 平面上 n 个点中单位距离可能出现的最大次数为 $cn^{4/3}$. 注意上述证明可**逐字**应用于赋以**Minkowski 范数** $\|\cdot\|_C$ 而不是欧氏度量的平面, 其**规范体** C (单位圆盘) 是严格凸的, 即 C 的边界不含直线段 (见第 7 章引理 7.12 前).

定理 14.20 *规范体严格凸的任何 Minkowski 平面中的任意 n 点集 P 中, 满足 $\|p-q\|_C = 1$ 的点对 $\{p,q\} \subset P$ 的个数至多为 $cn^{4/3}$, 其中 c 为绝对常数.*

第 11 章末指出, 存在 Minkowski 度量, 使得上一定理的界本质上是紧的.

我们以定理 14.19 的另一很好的应用结束本节. 给定平面中处于**一般位置** (无三点共线) 的 n 点集 P, 欲估计满足下述条件的点对 $\{p,q\} \subset P$ 的最大个数 $S(n,k)$: p 与 q 连线的至少一侧恰有 P 的 $k-1$ 个点. 这一问题已成为著名的 k **集问题** ($k = \lfloor n/2 \rfloor$ 时, 也称为**对分线问题**), 它在计算几何学的许多算法分析中起着重要的作用. Erdős, Lovász 等 (1973) 和 Lovász (1971) 证明了对适当常数 c, 有 $S(n,k) \leqslant cn\sqrt{k}$. 历经 20 余年, 无人改进这一结果. Pach, Steiger, Szemerédi(1992) 作出一个较小改进后, Dey (1998) 证得下述结果, 从而取得实质性突破.

定理 14.21 (Dey) *对每个 $0 < k < n$, 设 $S(n,k)$ 表示平面中处于一般位置的 n 点集 P 可能有的如下点对的最大个数: 点对中两点连线的至少一侧含有 P 的恰 $k-1$ 个点, 则 $S(n,k) \leqslant 6.5(k+1)^{1/3}n$.*

证明 设 P 为平面中处于一般位置的固定 n 点集. 设 H_k 为顶点集 P 上的几何图, 两点 $p,q \in P$ 间有线段相连, 当且仅当恰有 P 的 $k-1$ 个点严格位于 pq 的一侧. 对 H_k 的每条边从左到右定向, 不妨设至少有 $|E(H_k)|/2$ 条边的**左侧**恰含有 P 的 $k-1$ 个点. 令 G_k 表示由这些边生成的图.

设边 $\vec{pq} \in E(G_k)$ 的**后继**为边 $\vec{qr}$, 该边在所有斜率超过 $\vec{pq}$ 的斜率的边 $\vec{qr'}$ 中是斜率最小的. 这一关系将 G_k 的边排列成两两不交的凸链. 不难证明, 对 P 的 k 个最左 (最右) 点中的每个点, 恰有一个链以该点为起点 (终点), 任一链都不以其他点为起点 (终点).

对两个链 γ_1 和 γ_2 的每个交叉点 $\varsigma \notin V(G)$, 指派 ς 下方的唯一确定的线段 $p_\varsigma q_\varsigma$, 其支撑线为 γ_1 和 γ_2 的公共切线. (称线段位于 ς **下方**, 如果它与以 ς 为起点指向负 y 轴方向的射线相交于 ς.) 显然, $p_\varsigma, q_\varsigma \in P$, 任一线段都不会被指派给两个不同的交叉点. 易证分配给交叉点的相切线段至多有 kn 条, 因为每个顶点作为相切线段的左端点至多出现 k 次. 所以交叉边对的总数

$$\kappa(G_k) \leqslant nk.$$

另一方面, 由定理 14.19 知, 或 $|E(G_k)| < 4n$, 或

$$\kappa(G_k) \geqslant \frac{1}{64} \cdot \frac{|E(G_k)|^3}{n^2}.$$

比较这两个界, 可得

$$|E(H_k)| \leqslant 2|E(G_k)| \leqslant 6.5(k+1)^{1/3}n. \qquad \square$$

$S(n,k)$ 的已知最佳下界的数量级为 $ne^{c\sqrt{\log k}}$, 是由 G. Tóth (2001) 给出的, 这个界或许与最优界相去不远.

关于 n 点集中点对个数的下界参见文献 (Lovász, Vesztergombi et al., 2004; Ábrego, Fernández, Merchant, 2005; Balogh, Salazar, 2006), 其中点对的连线至多将 k 个点与其他点分离. 事实证明, 这一问题与获得完全几何图的交叉数的下界密切相关.

习 题

14.1 (i) 利用定理 13.13 的思想证明定理 14.2;

(ii) 由定理 14.2 推出定理 13.13.

14.2 设 $G=(V(G),E(G))$ 为不含两条不交边的几何图. 证明存在 $E(G)$ 到一个适当子集 $V' \subseteq V(G)$ 上的双射 f, 使得对任意 $e \in E(G)$, $f(e) \in e$.

14.3 证明对任意 $n \geqslant 4$, 存在一个几何图具有 n 个顶点, 至少 $\frac{5}{2}n-4$ 条边, 但不含 3 条两两不交边.

14.4 对任意 k 和 $n \geqslant 2k+1$, 构造具有 n 个顶点 kn 条边的凸几何图, 使其有 k 个度为 $n-1$ 的顶点, 且不含 $k+1$ 条两两不交边 (见命题 14.4).

14.5 对任意 $n,k \geqslant 3$, 构造具有 n 个顶点 $|E(T_{k-1}(n)|$ 条边的几何图, 使其任 k 条边都不能形成一个简单闭多边形 (见定理 14.6).

14.6(Sperner, 1928) 给定 n 元子集 X, 令 2^X 表示 X 的所有子集所成集族. 证明: 在偏序集 $(2^X, \subseteq)$ 中,

(i) 可找到 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个链, 它们的并覆盖 2^X;

(ii) 最大反链的长度为 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

14.7(Larman et al., 1994) (i) 证明任何由平面中的 n 个闭凸集形成的集族中至少含有 $n^{1/5}$ 个集合, 这些集合或两两不交, 或两两相交;

(ii) 构造由平面中处于一般位置的 n 条线段形成的集族, 使其不含多于 $n^{\log_5 2}$ 条线段, 这些线段或两两不交, 或两两相交.

14.8 令 $t(\mathcal{C}_k,n)$ 表示具有 n 个顶点且不含 k 条两两交叉边的几何图可能有的最大边数. 由定理 14.12 推证, 对任何 $k \geqslant 3$, 存在常数 c_k, 使得

$$t(\mathcal{C}_k,n) \leqslant c_k n^{2-1/2^{k-2}}.$$

14.9(A. Bialostocki-P. Dierker) 设 G 为具有 n 个顶点的完全凸几何图, 其 $\binom{n}{2}$ 条边用两种颜色着色. 证明: G 中存在

(i) 一个单色生成树, 它的边互不交叉;

(ii) $\lfloor (n+1)/3 \rfloor$ 条同色的两两不交边;

(iii) (Károlyi et al., 1995) 证明对任何具有 n 个顶点的完全几何图 (i), (ii) 仍成立.

14.10(Pach, 1991; Pach, Törőcsik, 1993) 证明对任意 k, 存在常数 $c_k > 0$, 使得

(i) 每个具有 n 个顶点和 $m \geqslant (2k+1)n$ 条边的凸几何图都至少含有 $c_k m^{2k+1}/n^{2k}$ 个由两两交叉边构成的 $(k+1)$ 元组;

(ii) 每个具有 n 个顶点和 $m \geqslant (k^4+1)n$ 条边的几何图都至少含有 $c_k m^{2k+1}/n^{2k}$ 个由两两不交边构成的 $(k+1)$ 元组.

14.11(Ding et al., 1994; Pach, Törőcsik, 1993) 证明对任意 $d \geqslant 2$, 存在多项式 $p_d(n)$ 满足下列条件: 设 P 为任意点集, $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中平行于坐标轴的长方体所成集合, 且 $\mathcal{B}$ 中每个长方体都至少含有 P 的一个点. 则对任意正数 n,

(a) 或存在 $\mathcal{B}$ 的 $n+1$ 个长方体, 使得 P 中任一点至多属于其中一个长方体;

(b) 或可选取 P 中至多 $p_d(n)$ 个点, 使得 $\mathcal{B}$ 的任意元素都至少含有其中的一个点.

14.12 设几何图 G 的交叉数为 $\mathrm{cr}(G)$. 证明存在 G 的一种 Jordan 弧画法, 使得任二弧至多交于一点 (包括它们的端点), 且恰有 $\mathrm{cr}(G)$ 对交叉弧.

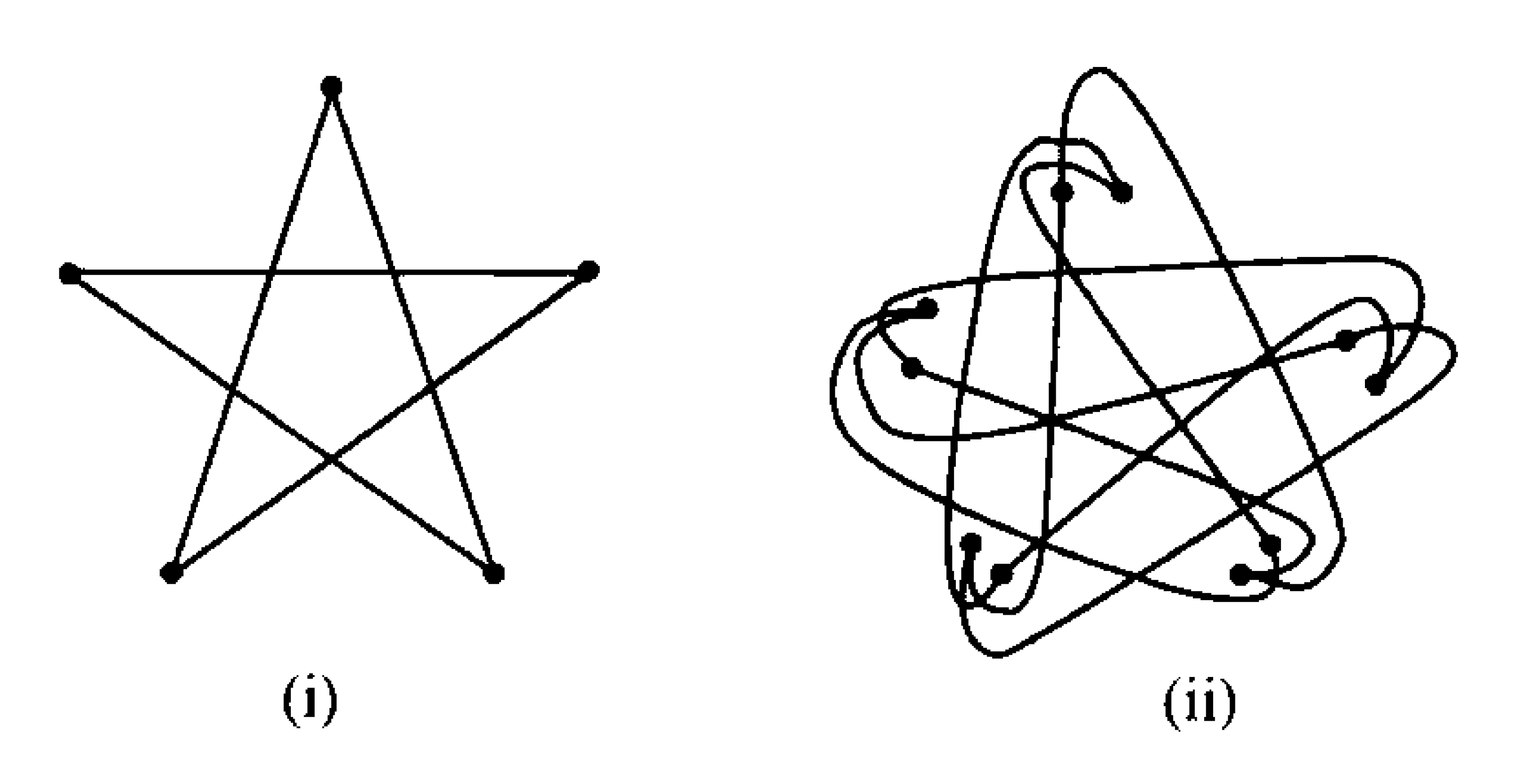


图 14.6 画成 thrackles 的长为 5 和 10 的圈

14.13*(Tutte, 1970) 设图 G 在平面上有一 Jordan 弧画法, 满足

(a) 不存在两条弧相互接触;

(b) 任两条没有公共端点的弧有偶数个交点,

证明 G 为平面图.

14.14 J. Conway 称图的一个画法为 **thrackle**, 如果

(a) 任意两条弧不相接触;

(b) 任意一对弧恰有一个公共点 (包括它们的端点)*.

证明:

(i) 一个长为 k 的圈可画成 thrackle 当且仅当 $k \neq 4$;

(ii) (Woodall, 1971) 如果图 G 可画成 thrackle, 则 G 不含两个顶点不交的奇圈;

(iii) (Lovász et al., 1995) 如果 G 为可画成 thrackle 的二部图, 则 G 是平面图.

* thrackle 一词由 Conway 首创. 本书作者 Pach 1997 年的论文*On Conway's thrackle conjecture* 中给出了 thrackle 定义的另一表述: 称图的一个画法为 thrackle, 如果两条弧或恰有一个公共端点而无其他公共点; 或无公共端点但恰在一点相交叉. —— 译者注

第 15 章　ε 网格与超图的横截

由于历史的原因, 一个有限的集系常称为超图. 确切地说, 一个**超图** H 由有限**顶点**(点) 集 $V(H)$和 $V(H)$ 的子集族 $E(H)$构成. $E(H)$ 的元素常称为 **超边** (或简称 **边**). 若 H 的超边都是 r 元子集, 则称 H 为 r **均匀超图**. 按照这一术语, 通常所说的图就是 2 均匀超图. 在第 10 章已经将一些图论的结果推广到 r 均匀超图 (见定理 10.11 和定理 10.12).

超图是一个很一般的概念, 因此, 很自然地, 超图理论在数学, 包括几何学的各个领域有着范围广阔的应用. 给定一个超图 H, 称一个子集 $T \subseteq V(H)$ 为 H 的一个 **横截**, 若对每条边 $E \in E(H)$ 都有 $T \cap E$ 非空. 许多组合论与几何学的极值问题可以重新表述为如下类型的问题: 在一个给定的超图 H 中最小横截的大小是多少? 一般认为, 这一问题是计算难解型问题 (Garey, Johnson, 1979). 然而若 H 满足某些特定条件, 则必存在 H 的一个相对较小的横截. 本章集中讨论这类结果. 特别地, 将看到如何利用 Vapnik-Chervonenkis 的一个十分有效的概率方法求得一些有趣的几何与算法方面的结果.

15.1　横截与分数横截

设 H 是一个顶点集为 $V(H)$ 且边集为 $E(H)$ 的超图. 设 $\tau(H)$ 表示 H 的最小横截的大小, 即满足下述条件的最小的数 τ, 使得存在 τ 个顶点, H 的任意一条边至少含其中一个顶点. 通常称 $\tau(H)$ 为 H 的**横截数** (或**顶点覆盖数**).

超图 H 的 **填装数** (或 **匹配数**) 定义为使得 H 有 ν 条两两不交的超边的最大数 $\nu = \nu(H)$. 显然, 对任意超图 H 有 $\nu(H) \leqslant \tau(H)$. 十分典型的是, $\tau(H)$严格大于 $\nu(H)$. 事实上, $\tau(H)$ 甚至不能以 $\nu(H)$ 的任何函数为上界 (见习题 15.3).

设 $\mathbb{R}^+$表示非负实数集. 称函数 $t : V(H) \to \mathbb{R}^+$ 为 H 的一个 **分数横截**, 如果对每条超边 $E \in E(H)$ 有

$$\sum_{x \in E} t(x) \geqslant 1 . \tag{15.1}$$

$\sum_{x\in V(H)} t(x)$ 的取遍 H 的所有分数横截得到的最小值称为 H 的 **分数横截数**, 记为 $\tau^*(H)$. 对 H 的每个横截 T, 定义与 T 相伴的函数 $t_T : V(H) \to \mathbb{R}^+$,

$$t_T(x) = \begin{cases} 1, & x \in T , \\ 0, & x \notin T . \end{cases}$$

由于这一函数满足 (15.1) 且 $\sum_{x\in V(H)} t_T(x) = |T|$, 所以 $\tau^*(H) \leqslant \tau(H)$.

类似地, H 的 **分数填装**是一个非负函数 $p: E(H) \to \mathbb{R}^+$, 使得对每个顶点 $x \in V(H)$,

$$\sum_{x\in E} p(E) \leqslant 1.$$

$\sum_{E\in E(H)} p(E)$ 的取遍 H 的所有分数填装得到的最大值称为 H 的 **分数填装数**, 记为 $\nu^*(H)$. 与前面类似, 有 $\nu^*(H) \geqslant \nu(H)$.

从定义容易直接推出 $\nu^*(H) \leqslant \tau^*(H)$ (见习题 15.1). 事实上, 这两个数总是相等的. 此外, 下述定理成立.

定理 15.1 *对每个超图* H,

$$\nu(H) \leqslant \nu^*(H) = \tau^*(H) \leqslant \tau(H),$$

且 $\nu^*(H) = \tau^*(H)$ *的值可以由线性规划方法确定.*

证明 设 x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 和 E_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ 分别表示 H 的顶点和边, 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 H 的 **关联矩阵**, 即

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \in E_j, \\ 0, & x_i \notin E_j. \end{cases}$$

设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置, $\mathbf{1}_n$ 表示由长度为 n 的一列组成的矩阵, 其中每个元素都是 1. 给定函数 $t: V(H) \to \mathbb{R}$ ($p: E(H) \to \mathbb{R}$), 设 $\underline{t}$ ($\underline{p}$) 表示由一列构成的矩阵, 其中第 i 个元是 $t(x_i)$ ($p(E_i)$).

注意到 t 是 H 的一个分数横截, 当且仅当

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\underline{t} \geqslant \mathbf{1}_m \text{且} \underline{t} \geqslant \mathbf{0}\,.$$

类似地, p 是 H 的一个分数填装, 当且仅当

$$\boldsymbol{A}\underline{p} \leqslant \mathbf{1}_n \text{且} \underline{p} \geqslant \mathbf{0}\,.$$

因此

$$\tau^*(H) = \min\{\, \mathbf{1}_n^T \underline{t} \mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\underline{t} \geqslant \mathbf{1}_m,\ \underline{t} \geqslant \mathbf{0}\,\},$$
$$\nu^*(H) = \max\{\, \mathbf{1}_m^T \underline{p} \mid \boldsymbol{A}\underline{p} \leqslant \mathbf{1}_n,\ \underline{p} \geqslant \mathbf{0}\,\}\,.$$

这两个线性规划问题是互为对偶的, 从而由线性规划对偶定理立即可得它们的解 $\tau^*(H)$ 和 $\nu^*(H)$ 是相等的 (Papadimitriou, Steiglitz, 1982; Chvátal, 1983; Grötschel et al., 1987). □

一般说来, $\tau^*(H)$ 可以比 $\tau(H)$ 小得多 (见习题 15.3). Lovász (1975) 的下述定理表明, 当 H 的每个点属于相对少的超边时, 情形并非如此.

定理 15.2 (Lovász)　设 H 是一个超图, 它的每个顶点至多包含于 D 条边, 则

$$\tau^*(H) \leqslant \tau(H) \leqslant (\ln D + 1)\tau^*(H).$$

证明　只须证明第二个不等式. 设 $t:V(H) \to \mathbb{R}^+$ 是 H 的一个满足 $\sum_{x\in V(H)} t(x) = \tau^*(H)$ 的分数横截.

以下用**贪婪**算法选取顶点 $x_1, x_2, \cdots$ 的集合. 设 x_1 是 H 中度 (即含顶点 x_1 的边数) 最大的任一顶点. 设 D_1 表示在 H 中 x_1 的度. 令 $H_1 = H - x_1$, 即从 H 中删去顶点 x_1 及包含 x_1 的所有边后得到的超图. 如果已选定 $x_1, \cdots, x_i \in V(H)$, 那么令 $H_i = H - x_1 - x_2 - \cdots - x_i$. 若 H_i 不含边, 则停止. 否则, 设 x_{i+1} 是 H_i 的一个顶点, 其度 D_{i+1} 为最大, 如此进行下去. 显然,

$$|E(H_i)| - |E(H_{i+1})| = D_{i+1}. \tag{15.2}$$

由 t 的性质, 得

$$\begin{aligned}
|E(H_i)| &= \sum_{E\in E(H_i)} 1 \leqslant \sum_{E\in E(H_i)} \sum_{x\in E} t(x) \\
&= \sum_{x\in V(H_i)} t(x) \sum_{\substack{E\in E(H_i)\\ E\ni x}} 1 \\
&\leqslant \sum_{x\in V(H_i)} t(x) D_{i+1} \\
&\leqslant D_{i+1}\tau^*(H).
\end{aligned}$$

现在假设程序经 s 步终止, 即 H_s 为空. 于是当然有 $\tau(H) \leqslant s$. 令 $H_0 = H$, 由 (15.2) 式, 有

$$\begin{aligned}
s &= \sum_{i=0}^{s-1} 1 = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{|E(H_i)| - |E(H_{i+1})|}{D_{i+1}} \\
&= \frac{|E(H)|}{D_1} + \sum_{i=1}^{s-1} |E(H_i)| \left(\frac{1}{D_{i+1}} - \frac{1}{D_i}\right).
\end{aligned}$$

由不等式 $|E(H_i)| \leqslant D_{i+1}\tau^*(H)$ $(0 \leqslant i \leqslant s)$ 及 $D_s \geqslant 1$ 这一事实, 可得

$$\begin{aligned}
s &\leqslant \tau^*(H) + \sum_{i=1}^{s-1} D_{i+1}\tau^*(H) \left(\frac{1}{D_{i+1}} - \frac{1}{D_i}\right) \\
&= \tau^*(H)\left(1 + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{D_i - D_{i+1}}{D_i}\right)
\end{aligned}$$

$$\leqslant \tau^*(H)\left(1+\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{k=D_{i+1}+1}^{D_i}\frac{1}{k}\right)$$
$$=\tau^*(H)\left(1+\sum_{k=D_s+1}^{D_1}\frac{1}{k}\right)$$
$$\leqslant \tau^*(H)(1+\ln D_1).$$

从而

$$\tau(H)\leqslant s\leqslant \tau^*(H)(1+\ln D_1),$$

此即欲证结果. □

15.2 Vapnik-Chervonenkis 维数

假设在一次公众民意测验中, 要选择少数人来代表社会的所有主要阶层. 首先必须选择某些人群, 然后确定哪些人群是“重要的”. 按民主原则, 将根据人群的大小 (占人口的百分比) 来衡量一个人群的“重要性”. 因此重要的人群将确定一个具有下述性质的超图 H: 对每条边 $E\in E(H)$ 有 $|E|\geqslant \varepsilon|V(H)|$, 其中 ε 是某个固定的常数 $(0<\varepsilon<1)$, 代表所有重要人群的最小人数就是 $\tau(H)$.

显然, 对所有 $x\in V(H)$, 函数 $t(x)=1/(\varepsilon|V(H)|)$ 是 H 的满足 $\sum_{x\in V(H)}t(x)=1/\varepsilon$ 的一个分数横截. 从而 $\tau^*(H)\leqslant 1/\varepsilon$, 而且由定理 15.2 可知

$$\tau(H)\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\Big(\ln D+1\Big), \tag{15.3}$$

其中 D 是 H 顶点的最大度. 如果 D 很大, 这个界很不好.

Vapnik, Chervonenkis (1971) 在他们的开创性论文中指出, 如果 H 满足某些自然的条件, 那么前述上界可用一个仅依赖于 ε 的函数代替. 为了说明这些条件, 须做些准备工作.

定义 15.3 设 $H=(V(H),E(H))$ 表示一个超图. 称子集 $A\subseteq V(H)$ 为**断裂子集**, 如果对每个 $B\subseteq A$, 存在一条边 $E\in E(H)$, 使得 $E\cap A=B$. H 的 **Vapnik-Chervonenkis 维数** (或 VC **维数**) 是指 $V(H)$ 的最大断裂子集的基数, 记为 VC-dim (H).

Shelah (1972), Sauer (1972), 及 Vapnik, Chervonenkis (1971) 独立证明了下述定理.

定理 15.4 设 H 是顶点数为 n, VC 维数为 d 的超图, 则

$$|E(H)|\leqslant \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{d},$$

且这个界不可改进.

证明一　$d=0$ 或 $n \leqslant d$ 为平凡情形, 结论是显然的. 假设对每个满足 VC-dim $(\bar{H}) < d$ 的超图 $\bar{H}$, 对每个满足 VC-dim $(\bar{H}) = d$ 且 $|V(\bar{H})| < n$ 的超图 $\bar{H}$, 定理均成立.

给定顶点数为 n 且 VC 维数为 d 的超图 H, 另定义两个超图 H_1 和 H_2 如下. 对某固定的 $x \in V(H)$, 令 $V(H_1) = V(H_2) = V(H) - \{x\}$,

$$E(H_1) = \{E - \{x\} \mid E \in E(H)\},$$

$$E(H_2) = \{\, E \in E(H) \mid x \notin E \text{且} E \cup \{x\} \in E(H)\}.$$

显然, VC-dim $(H_1) \leqslant d$, VC-dim $(H_2) \leqslant d-1$.

另一方面, 由归纳假设,

$$\begin{aligned} |E(H)| &= |E(H_1)| + |E(H_2)| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{d} \binom{n-1}{i} + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n-1}{i} \\ &= \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}. \end{aligned}$$

若 $E(H) = \{U \subseteq V \mid |U| \leqslant d\}$, 则 VC-dim$(H) = d$, 这一事实表明定理中的上界是紧的. □

下面给出 Frankl, Pach (1983) 的一个稍微复杂些的证明, 因为这一证明是对所谓**线性代数方法** (Babai, Frankl, 1988) 的一个很好说明.

证明二　设 $E(H) = \{\, E_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$, 且 X_j, $1 \leqslant j \leqslant \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}$, 是一列 $V(H)$ 的所有大小至多为 d 的子集. 定义一个 $m \times \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 如下:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & E_i \supseteq X_j\,, \\ 0, & E_i \not\supseteq X_j\,. \end{cases}$$

用反证法. 假设 $m > \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的行向量在实数域上是线性相关的, 从而存在一个非零函数 $f: E(H) \to \mathbb{R}$, 使得对每个 X_j,

$$\sum_{E_i \supseteq X_j} f(E_i) = 0.$$

设 $A \subseteq V(H)$ 是一个满足

$$\sum_{E_i \supseteq A} f(E_i) = \alpha \neq 0$$

的 **最小** 子集. (因为对集族 $\{A \in E(H) \mid f(A) \neq 0\}$ 的任何一个极大元 A 可得到一个非零和, 所以具有非零和的集合 A 确实存在.) 显然 $|A| \geqslant d+1$. 给定任一 $B \subseteq A$, 设

$$F(B) = \sum_{E_i \cap A = B} f(E_i).$$

从而, $F(A) = \alpha$. 对任一固定的 $a \in A$, 令 $B = A - \{a\}$,

$$\begin{aligned} F(B) &= \sum_{E_i \supseteq B} f(E_i) - \sum_{E_i \supseteq A} f(E_i) \\ &= 0 - \alpha = -\alpha. \end{aligned}$$

一般地, 如果 B 是 A 的任一 $(|A|-k)$ 元子集 $(0 \leqslant k \leqslant |A|)$, 那么

$$F(B) = (-1)^k \alpha \neq 0.$$

特别地, 上式表明至少存在一条超边 E_i 满足 $E_i \cap A = B$. 因此 A 是断裂的, 与 VC-dim$(H) = d$ 矛盾. □

基于上述结果 Vapnik, Chervonenkis (1971) 发现了一个巧妙的概率 (计数) 证明方法, 从而对 (15.3) 的界作出了实质性的改进. 他们证得 (在稍微不同的框架下) 存在一个函数 $f(d,\varepsilon)$, 使得每个 VC 维数为 d 且边至少含 $\varepsilon|V(H)|$ 个元素的超图 H 的横截数至多为 $f(d,\varepsilon)$(见习题 15.6). Haussler, Welzl (1987) 及 Blumer et al. (1989) 修改 Vapnik-Chervonenkis 的方法, 得到了 $f(d,\varepsilon)$ 的各种上界. Komlós, Pach, Woeginger (1992) 改进并推广这些结果如下. 给定一个有限集 V, 称函数 $\mu : V \to \mathbb{R}^+$ 是一个**概率测度**, 若

$$\sum_{x \in V} \mu(x) = 1.$$

任意子集 $X \subseteq V$ 的测度定义为 $\mu(X) = \sum_{x \in X} \mu(x)$.

定理 15.5 (Komlós et al.) 设 H 是一个 VC 维数为 d 的超图, $\varepsilon > 0$, μ 是 $V(H)$ 上的一个概率测度, 使得对每条边 $E \in E(H)$ 有 $\mu(E) \geqslant \varepsilon$. 则 $\tau(H) \leqslant t(d,\varepsilon)$, 其中 $t(d,\varepsilon)$ 表示满足下式的最小正整数 t: 对某整数 $T > t$,

$$2\sum_{i=0}^{d} \binom{T}{i} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{(T-t)\varepsilon - 1} < 1,$$

从而对任意 $\varepsilon \leqslant 1/2$, 有

$$\tau(H) \leqslant \frac{d}{\varepsilon}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon} + 2\ln\ln\frac{1}{\varepsilon} + 6\right)$$

(见习题 15.9).

证明　以概率测度 μ 随机选取 $V(H)$ 的 t 个点, 允许有重复, 得到一个**随机样本**

$$x \in [V(H)]^t = \underbrace{V(H) \times \cdots \times V(H)}_{t\text{次}}.$$

若每条边 $E \in E(H)$ 至少含 x 的一个点, 则称 x 是 H 的一个**横截**. 设 $I(E,x)$ 表示 x 的属于 E 的分量的个数 (重复计数), 则

$$Pr\{\, x \text{ 不是 } H \text{ 的横截} \,\} = Pr\{\, \exists E \in E(H) : I(E,x) = 0 \,\}.$$

假定已经选取了长度为 t 的串 x, 再从 $V(H)$ 中随机选取另外的 $T-t$ 个元素. 设 $y \in [V(H)]^{T-t}$ 表示这个新的串, $z = xy \in [V(H)]^T$ 表示完整串. $\langle z \rangle = \langle xy \rangle$ 表示所有在 z 中出现的元素的**多重集** (即元素被重复计数, 但与顺序无关).

对任意 $E \in E(H)$, $I(E,y)$ 是一个服从二项分布的随机变量. 设 m_E 是 $I(E,y)$ 的**中位数**,

$$Pr\{\, I(E,y) > m_E \,\} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant Pr\{\, I(E,y) \geqslant m_E \,\}.$$

下述不等式是 x 与 y 相互独立的一个直接结果.

$$\begin{aligned}
&Pr\{\, \exists E \in E(H) : I(E,x) = 0 \,\}\\
\leqslant\ &\frac{Pr\{\, \exists E \in E(H) : I(E,x) = 0 \text{ 且 } I(E,y) \geqslant m_E \,\}}{\min\limits_{E \in E(H)} Pr\{\, I(E,y) \geqslant m_E \,\}}\\
\leqslant\ &2Pr\{\, \exists E \in E(H) : I(E,x) = 0 \text{ 且 } I(E,y) \geqslant m_E \,\}.
\end{aligned}$$

对固定的 $E \in E(H)$, 给定的 $\langle z \rangle = \langle xy \rangle$ 的条件概率

$$\begin{aligned}
Pr\{\, I(E,x) = 0 \text{ 且 } I(E,y) \geqslant m_E \mid \langle z \rangle \,\} &= \chi[\, I(E,z) \geqslant m_E \,] \frac{\binom{T-t}{I(E,z)}}{\binom{T}{I(E,z)}}\\
&\leqslant \chi[\, I(E,z) \geqslant m_E \,] \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{I(E,z)}\\
&\leqslant \chi[\, I(E,z) \geqslant m_E \,] \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{m_E}.
\end{aligned}$$

(这里 $\chi[A]$是 A 的特征函数, 即若 A 为真, 则 $\chi[A] = 1$, 否则 $\chi[A] = 0$.)

根据定理 15.4, 一个固定的多重集 $\langle z \rangle$ 与 H 的边至多有$\sum_{i=0}^{d} \binom{T}{i}$ 个不同的

交. 因此,

$$
\begin{aligned}
&Pr\{\,\exists E \in E(H) : I(E,x)=0\,\text{且}\,I(E,y) \geqslant m_E \mid \langle z\rangle\,\}\\
&\leqslant \left(\sum_{i=0}^{d}\binom{T}{i}\right)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{m},
\end{aligned}
$$

其中 $m=\min\limits_{E\in E(H)} m_E$. 由于已知二项分布的中位数与均值的偏差不超过 1,

$$
m \geqslant (T-t)\min_{E\in E(H)}\mu(E)-1 \geqslant (T-t)\varepsilon-1.
$$

从而

$$
Pr\{\,\exists E \in E(H) : I(E,x)=0\,\} \leqslant 2\left[\sum_{i=0}^{d}\binom{T}{i}\right]\left(1-\frac{t}{T}\right)^{(T-t)\varepsilon-1}.
$$

如果上式小于 1, 那么 x 以正的概率为 H 的一个横截. 这就证明了定理的第一部分. 选取

$$
\begin{aligned}
t &= \left\lfloor \frac{d}{\varepsilon}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+2\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}+6\right)\right\rfloor,\\
T &= \left\lfloor \frac{\varepsilon}{d}t^2\right\rfloor,
\end{aligned}
$$

假定 $\varepsilon \leqslant 1/2$, 经计算可得

$$
2\sum_{i=0}^{d}\binom{T}{i}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{(T-t)\varepsilon-1}<1. \qquad \square
$$

上述定理对定义在 H 的顶点集上的任意概率测度 μ 均成立. 特别地, 可以选取 μ 为常数, 即对每个 $x \in V(H)$, $\mu(x)=1/|V(H)|$. 将定理 15.5 应用到测度 $\mu'(x)=t(x)/\tau^*(H)$, 可以推出另一个有趣的结论, 上式中 $t: V(H)\to \mathbb{R}^+$ 是 H 的一个满足 $\sum_{x\in V(H)} t(x)=\tau^*(H)$ 的分数横截. 注意到在该情形下, 对每个 $E\in E(H)$, 有

$$
\begin{aligned}
\mu'(E) &= \sum_{x\in E}\mu'(x)\\
&= \sum_{x\in E}\frac{t(x)}{\tau^*(H)} \geqslant \frac{1}{\tau^*(H)}.
\end{aligned}
$$

从而, 在定理 15.5 中选取 $\varepsilon = 1/\tau^*(H)$, 可得以下推论.

推论 15.6 (Komlós et al.) 设 H 是任一 VC 维数为 d 的超图.

(i) 如果对某 $\varepsilon \leqslant 1/2$, H 的每条边至少有 $\varepsilon|V(H)|$ 个元素, 那么

$$\tau(H) \leqslant \frac{d}{\varepsilon}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+2\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}+6\right);$$

(ii) 如果 $\tau^*(H) \geqslant 2$, 那么

$$\tau(H) \leqslant d\tau^*(H)\left[\ln\tau^*(H)+2\ln\ln\tau^*(H)+6\right].$$

下面证明对 $d \geqslant 2$, 定理 15.5 中的界是接近最优的.

定理 15.7 (Komlós et al.)　给定任一自然数 $d \geqslant 2$ 和任一实数 $\gamma < 2/(d+2)$, 存在具有下述性质的常数 $\varepsilon_{d,\gamma} > 0$:

对任一 $\varepsilon \leqslant \varepsilon_{d,\gamma}$, 可以构造一个 VC 维数为 d 的超图 H, 它的每条边至少含 $\varepsilon|V(H)|$ 个点, 且

$$\tau(H) \geqslant (d-2+\gamma)\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

证明　仍利用概率方法. 设 γ' 是一个固定常数, $\gamma < \gamma' < \dfrac{2}{d+2}$. 给定一个充分小的数 ε, 设 $n = \dfrac{K}{\varepsilon}\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$, 其中 K 是一个只依赖于 d, γ 和 γ' (但不依赖于 ε) 的常数, 其值稍后确定. 设

$$r = \varepsilon n, \quad p = \frac{\varepsilon^{1-d-\gamma'}}{\dbinom{n}{r}}, \quad t = (d-2+\gamma)\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

假定 n, r, t 都是整数, 忽略舍入误差.

设 V 是一固定 n 元集, 随机选取 V 的若干 r 元子集, 构造顶点集 V 上的一个超图 H, 其中每个 r 元组是以概率 p 独立选取的. 我们将证明下述不等式以大概率成立:

(i) VC-dim $(H) \leqslant d$;

(ii) $\tau(H) > t$.

由于

$$\begin{aligned}
Pr\{\text{VC-dim}(H) > d\} &\leqslant \binom{n}{d+1} Pr\{\text{一固定}(d+1)\text{元子集}A \subseteq V\text{被}H\text{断裂}\}\\
&= \binom{n}{d+1}\prod_{B\subseteq A} Pr\{\exists E \in E(H): E\cap A = B\}\\
&= \binom{n}{d+1}\prod_{B\subseteq A}\left[1-(1-p)^{\binom{n-|A|}{r-|B|}}\right]\\
&= \binom{n}{d+1}\prod_{j=0}^{d+1}\left[1-(1-p)^{\binom{n-d-1}{r-j}}\right]^{\binom{d+1}{j}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n}{d+1} \prod_{i=0}^{d+1} \left[1-(1-p)^{\binom{n-d-1}{r-d-1+i}}\right]^{\binom{d+1}{d+1-i}} \\
&= \binom{n}{d+1} \prod_{i=0}^{d+1} \left[1-(1-p)^{\binom{n-d-1}{r-d-1+i}}\right]^{\binom{d+1}{i}} \\
&\leqslant \binom{n}{d+1} \prod_{i=0}^{1} \left[p\binom{n-d-1}{r-d-1+i}\right]^{\binom{d+1}{i}} \\
&= \binom{n}{d+1} p\binom{n-d-1}{r-d-1} \left[p\binom{n-d-1}{r-d}\right]^{d+1} \\
&\leqslant n^{d+1} p\binom{n}{r}\left(\frac{r}{n}\right)^{d+1}\left[p\binom{n}{r}\left(\frac{r}{n}\right)^{d}\right]^{d+1} \\
&= \left(K\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d+1} \varepsilon^{2-(d+2)\gamma'},
\end{aligned}
$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时, 上式趋于 0. 因此 (i) 得证.

下面证明 (ii) 也以大概率成立.

$$
\begin{aligned}
Pr\{\tau(H) \leqslant t\} &= \binom{n}{t}(1-p)^{\binom{n-t}{r}} \\
&\leqslant \binom{n}{t} \exp\left[-p\binom{n-t}{r}\right] \\
&\leqslant \left(\frac{\mathrm{e}n}{t}\right)^{t} \exp\left[-p\binom{n}{r}\left(1-\frac{r}{n-t+1}\right)^{t}\right].
\end{aligned}
$$

对 $b > a$, $0 < x < \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ 应用不等式 $1 - ax > \mathrm{e}^{-bx}$, 由上式得到上界

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathrm{e}n}{t}\right)^{t} \exp\left[-p\binom{n}{r}\mathrm{e}^{-\frac{K}{K-d}\varepsilon t}\right] \\
&= \left(\frac{\mathrm{e}K}{d-2+\gamma}\right)^{t} \exp\left[-\varepsilon^{1-d-\gamma'+\frac{K}{K-d}(d-2+\gamma)}\right].
\end{aligned}
$$

如果

$$
1-d-\gamma'+\frac{K}{K-d}(d-2+\gamma) < -1,
$$

即如果 K 充分大, 该上界趋向于 0. (ii) 证毕. □

定理 15.7 中的条件 $d \geqslant 2$ 不仅仅是证明技巧上的假设. 事实上, 不难刻画 VC 维数是 1 的所有有限超图的特征, 可以验证, 若对某 $0 < \varepsilon < 1$, H 的每条边至少有 $\varepsilon|V(H)|$ 个点, 则 $\tau(H) \leqslant \lceil 1/\varepsilon \rceil - 1$ (见习题 15.8).

下述简单结论有助于确定一个给定的超图是否有较小的 VC 维数.

引理 15.8　*设 H 是一个 VC 维数为 d 的超图, $\varphi(E_1, \cdots, E_k)$ 是某一含 k 个变元的集合论公式 (用到 $\cup, \cap, -$). 如果对适当的 $E_i \in E(H)$, 超图 H' 的每条边 E' 可以表示为*

$$E' = \varphi(E_1, \cdots, E_k),$$

那么

$$\text{VC-dim}(H') \leqslant 2dk \log(2dk).$$

证明　设 A 是 $V(H') = V(H)$ 的一个 d' 元子集, 它在 H' 中被断裂. 由定理 15.4,

$$|\{ E \cap A \mid E \in E(H)\}| \leqslant \sum_{i=0}^{d} \binom{d'}{i}.$$

利用定理条件对 H' 所作的假设, 由上式得

$$2^{d'} = |\{ E' \cap A \mid E' \in E(H')\}| \leqslant \left(\sum_{i=0}^{d} \binom{d'}{i}\right)^k .$$

比较上述不等式的两边, 得到 $d' \leqslant 2dk \log(2dk)$, 结论成立. □

Ding, Seymour, Winkler(1994) 引入了一个与超图的 VC 维数密切相关的另一参数 $\lambda(H)$. 他们定义 $\lambda(H)$ 为最大整数 l: 可选取 l 条边 $E_1, E_2, \cdots, E_l \in E(H)$, 使得对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant l$, 存在一个顶点 $x_{ij} \in E_i \cap E_j$ 不属于任何其他 E_g $(g \neq i, j)$. 易知对任何超图 H, $\text{VC-dim}(H) < \binom{\lambda(H)+1}{2}$. 综合推论 15.6 和 Ramsey 定理 (定理 9.13), 可得下面的结果.

定理 15.9 (Ding et al., 1994)　*对任何超图 H, 有*

$$\tau(H) \leqslant 6\lambda^2(H)(\lambda(H) + \nu(H))\binom{\lambda(H)+\nu(H)}{\lambda(H)}^2 .$$

在本章开头曾指出, 一般说来用 ν 的函数从上方界定 τ 是不可能的. Gyárfás, Lehel (1983, 1985) 开始研究存在这种函数的某类超图. 定理 15.9 给出了一类超图具有这种性质的一个充分条件. 该定理表明, 如果对一类超图的每个元, 都存在一个常数 K 使得 $\lambda(H) \leqslant K$, 那么 τ 可以由 ν 的一个多项式从上方界定. 该事实的各种几何结果见 Pach (1997).

15.3　范围空间与 ε 网格

Haussler-Welzl (1987) 首先认识到上述方法体系与几何问题的相关性, 事实上, 是他们确切表述并证明了定理 15.5 的最初形式. 他们的工作应该说抓住了在大量

几何应用中所谓**随机** (**概率**) 方法的本质. 在某些情况下采用这种现成的工具会节省大量时间 (与空间), 不然就要进行冗长而程式固定的常规计算. 但这些思想的主要意义在于使一般的横截问题显得更明确清晰. 横截数是一个集系的 **整体** 参数. 上一节的结果表明在总测度为 1 的任何测度空间中, 大的可测集系存在一个相对小的横截, 只要集系的局部形态良好 (即其 VC 维数有界).

近年来, 上述概念和方法在离散与计算几何以及学习理论等领域有着许多有趣的应用 (Mulmuley, 1994; Anthony, Biggs, 1992). 然而这些领域的大部分文献采用的是一种不同的专业术语. 这种语言已被广泛采用, 相关基本定义很值得学习.

定义 15.10 *一个范围空间是一个 (有限或无限) 超图, 即一个对 $\Sigma = (X, \mathcal{R})$, 其中 X 是底集, $\mathcal{R}$ 是 X 的一个子集族 [即 $V(\Sigma) = X$ 且 $E(\Sigma) = \mathcal{R}$]. 称 $\mathcal{R}$ 的元 (即 Σ 的超边) 为* **范围**.

给定任一 $Y \subseteq X$, 定义 Σ 的由 Y 导出的**子空间**为

$$\Sigma_Y = (Y, \{ R \cap Y \mid R \in \mathcal{R} \}) .$$

若 $\Sigma = (X, \mathcal{R})$ 是一个有限范围空间且 $\varepsilon > 0$, 则令

$$\Sigma^{\varepsilon} = (X, \{ R \in \mathcal{R} \mid |R| \geqslant \varepsilon |X| \}) .$$

若 $T \subseteq X$ 与 $\mathcal{R}^{\varepsilon} = \{ R \in \mathcal{R} \mid |R| \geqslant \varepsilon |X| \}$ 的每个元素, 即与 Σ 的每个“大”的范围相交, 则称子集 T 是一个关于 Σ 的 ε **网格**.

范围空间的**Vapnik-Chervonenkis 维数** (VC 维数) 与超图的 VC 维数的定义相同, 即

VC-dim $(\Sigma) = \max\{ |A| \mid A \subseteq X$ 且 $\forall B \subseteq A, \exists R \in \mathcal{R}$ 使得 $R \cap A = B \}$.

当然, 对 Σ 的任意子空间 Σ_Y, 有 VC-dim $(\Sigma_Y) \leqslant$ VC-dim (Σ).

设 $f(d, \varepsilon)$ 表示在 VC 维数至多为 d 的所有有限范围空间 Σ 中 Σ 的最小 ε 网格的大小的最大值.

定理 15.5 至定理 15.7 可总结如下:

$$d - 2 + \frac{2}{d+2} \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{f(d, \varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}} \leqslant \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{f(d, \varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}} \leqslant d.$$

下面给出一些 VC 维数有限的范围空间的重要例子 (另见习题 15.11).

例15.11

(a) $X = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{R} = \{\mathbb{R}^d$ 中的所有半空间$\}$;

(b) $X = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{R} = \{\mathbb{R}^d$ 中的所有开 (单位) 球$\}$;

(c) $X = \{\mathbb{R}^d$ 中的所有超平面$\}$. 给定 $\mathbb{R}^d$ 中的任一开线段 s, 设 R_s 是与 s 相交的所有超平面的集合. 令 $\mathcal{R} = \{ R_s \mid$ 对所有的开线段 $s\}$.

容易验证, 上述范围空间每个的 VC 维数是有限的. 现就例 (c) 对这一点加以说明. 用反证法. 假设对任一很大的 n, 可以找到一个断裂的 n 元子集 $A_n \subset X$, 即

$$|\{ R_s \cap A_n \mid R_s \in \mathcal{R} \}| = 2^n.$$

属于 A_n 的超平面确定一个至多包含 $O(n^d)$ 个胞腔的胞腔复形. 注意到如果 $s = p_1p_2$ 和 $t = q_1q_2$ 是使得 p_i, q_i 属于同一胞腔 $(i = 1, 2)$ 的两个线段, 那么 $R_s \cap A_n = R_t \cap A_n$. 由于对 s 的端点选取两个胞腔有 $O(n^{2d})$ 种可能, 从而得到

$$|\{ R_s \cap A_n \mid R_s \in \mathcal{R} \}| = O(n^{2d}),$$

矛盾.

利用引理 15.8, 可从 (a), (b), (c) 出发构造许多另外的有限 VC 维数的范围空间. 这表明由有限维空间 Σ 的范围经过有限次 $\cap, \cup, -$ 得到的范围所构成的任何范围空间都具有有限的 VC 维数. 特别地, 该事实对下述范围空间成立:

(d) $X = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{R} = \{\mathbb{R}^d$ 中至多具有 k 个顶点的开多面体$\}$;

(e) $X = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{R} = \{\mathbb{R}^d$ 中的所有圆环$\}$;

(f) $X = \{\mathbb{R}^d$ 中的所有超平面$\}$. 给定任一 k 维单纯形 $S_k \subset \mathbb{R}^d$, 设 R_{S_k} 是与 S_k 的内部相交的所有超平面构成的集合. 令 $\mathcal{R} = \{R_{S_k} \mid$ 所有单纯形 $S_k\}$.

下面是一个 VC 维数为无限的几何范围空间的典型例子.

(g) $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{R} = \{\mathbb{R}^2$ 中所有的开凸集$\}$

(见习题 15.18 (i)).

15.4　小穿刺数的生成树

下面证明 Welzl (1988) 的一个完美的定理 (Chazelle, Welzl, 1989; Welzl, 1992), 并指出该定理的算法结果, 由此说明以上描述的概念和结论的重要作用.

设 S 是平面上的一个 n 点集. 若树 T 的顶点是 S 的点, 边是直线段, 则称其为 S 的**生成树**. 生成树 T 的**穿刺数**记为 $\sigma(T)$, 定义为 T 中能与一直线相交的最大线段数.

定理 15.12 (Welzl)　*对 $\mathbb{R}^2$ 中任一处于一般位置的 n 点集 S, 存在一生成树 T, 它的穿刺数至多为 $c\sqrt{n}\log n$, 其中 c 是一个适当的常数.*

定理的证明基于下面的选择引理.

引理 15.13　*给定平面上处于一般位置的 $n \geqslant 2$ 个点的集合 S, 以及不经过这些点的 m 条直线的多重集 L, 则总可以找到一对点 $x, y \in S$, 使得连接它们的线段至多与 L 中 $c' \dfrac{m}{\sqrt{n}} \log n$ 条直线相交, 其中 c' 是一个适当的常数.*

证明 不妨假设 L 是一个**集合** (即它不含重复的元素), 否则可以稍微改变一下某些直线的位置. 考虑例 15.11 (c) 中范围空间限制在 L $(d=2)$ 上的子空间, 即设

$$\Sigma_L = (L, \{R_s \cap L \mid 所有开线段\ s\}),$$

其中, $R_s \cap L$ 是 L 中所有与一条给定的线段 s 相交的直线所成的集合.

如前面所指出的, Σ_L 具有有限 VC 维数 D. 从而由推论 15.6 (i) 可知, 存在一个常数 $c_D \geqslant 1$, 使得对任一 $0 < \varepsilon < 1$, Σ_L 有一个大小至多为 $c_D \frac{1}{\varepsilon} \log \frac{1}{\varepsilon}$ 的 ε 网格.

令 $\varepsilon = c_D \frac{\log n}{\sqrt{n}}$, 可知存在一个子集 $L' \subseteq L$ 满足

$$|L'| \leqslant c_D \frac{1}{\varepsilon} \log \frac{1}{\varepsilon} < \frac{\sqrt{n}}{2},$$

且每个至少与 L 中 $\varepsilon m = c_D m \frac{\log n}{\sqrt{n}}$ 个元素交叉的开线段至少与 L' 中一条直线相交.

L' 中的直线将平面划分成个数少于 n 的胞腔. 由鸽笼原理, 这些胞腔中至少有一个包含两点 $x, y \in S$. 连接这两点的线段不与 L' 的任何直线相交, 因此该线段至多与 L 中 $c_D m \frac{\log n}{\sqrt{n}}$ 个元素相交. □

定理 15.12 的证明 固定平面中处于一般位置的 $n = n_0$ 个点的集合 $S = S_0$ 以及不经过这些点的 $m_0 = \binom{n}{2} + 1$ 条直线的集合 L_0, L_0 中的直线表示由一条直线将 S 划分成两部分的每个可能的划分 (见习题 15.10(iii)).

对 (S_0, L_0) 应用引理 15.13, 可找到两点 $x_0, y_0 \in S_0$, 连接这两点的线段至多与 L_0 中 $c' m_0 \frac{\log n_0}{\sqrt{n_0}}$ 个元素相交. 令 $S_1 = S_0 - \{x_0\}$, $n_1 = |S_1| = n - 1$, 并设 L_1 是复制 L_0 中与线段 $x_0 y_0$ 相交的每条直线所得到的多重集. 令 $m_1 = |L_1|$. 由引理 15.13, 存在一对点 $x_1, y_1 \in S_1$, 使得线段 $x_1 y_1$ 至多与 L_1 中 $c' m_1 \frac{\log n_1}{\sqrt{n_1}}$ 条直线相交.

令 $S_2 = S_1 - \{x_1\}$, $n_2 = |S_2| = n - 2$, 并设 L_2 是复制 L_1 中所有与线段 $x_1 y_1$ 相交的直线所得到的多重集. 令 $m_2 = |L_2|$.

对每个 $i \leqslant n - 1$ 如此进行下去, 可以递推地定义一个 $n_i = (n - i)$ 元集 $S_i \subseteq S$ 和一个直线的 m_i 元多重集 L_i. 由上述构造可知, 对每个 $0 \leqslant i \leqslant n - 2$, 有

$$m_{i+1} \leqslant m_i \left(1 + c' \frac{\log n_i}{\sqrt{n_i}}\right).$$

从而对某适当的常数 $c > 0$, 有

$$m_{n-1} \leqslant m_0 \prod_{i=0}^{n-2} \left(1 + c' \frac{\log n_i}{\sqrt{n_i}}\right)$$

$$\leqslant \left[\binom{n}{2}+1\right]\exp\left(\sum_{i=0}^{n-2} c'\frac{\log n_i}{\sqrt{n_i}}\right)$$
$$\leqslant \left[\binom{n}{2}+1\right]\exp\left(c'\log n\sum_{i=0}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{n-i}}\right)$$
$$\leqslant 2^{c\sqrt{n}\log n}.$$

注意到线段 $x_0y_0, \cdots, x_{n-2}y_{n-2}$ 形成 S 的一生成树 T. 设一直线 $\ell \in L_0$ 与 T 的 t 条边相交, 则 L_{n-1} 包含 ℓ 的 2^t 个拷贝, 从而由上面最后一个不等式可得 $t \leqslant c\sqrt{n}\log n$.

由于 L_0 的元素穷尽了使 S 被一直线划分为两部分的所有可能方法, 因此我们断定任何直线不可能与 T 的超过 $c\sqrt{n}\log n$ 条边相交. □.

定理 15.12 的陈述可以稍作加强如下:

推论 15.14　对平面上处于一般位置的任一 n 点集 S, 存在一条生成路 P, 它的穿刺数至多为 $C\sqrt{n}\log n$, 其中 C 是一个适当的常数. 此外, 可以假设 P 是一个简单 (不自交) 的多边形.

证明　设 T 是 S 的使得 $\sigma(T) \leqslant c\sqrt{n}\log n$ 的生成树, 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n-2} = x_1$ 是 S 的一个 (可重复) 点列, 使得

(i) 对 $i < 2n-2$, $\{x_i, x_{i+1}\}$ 是 T 的一条边;

(ii) 对 T 的每条边 e, 对 i 的恰好两个不同的值有 $e = \{x_i, x_{i+1}\}$.

在上述点列中若有某 $i < j$ 使得 $x_j = x_i$, 则从点列中删除所有点 x_j(图 15.1). 这样得到的点列 $x_{i_1} = x_1, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}$ 包含 S 的每个点恰好一次, 容易验证所得点列导出一条穿刺数不超过 $2\sigma(T)$ 的路 P.

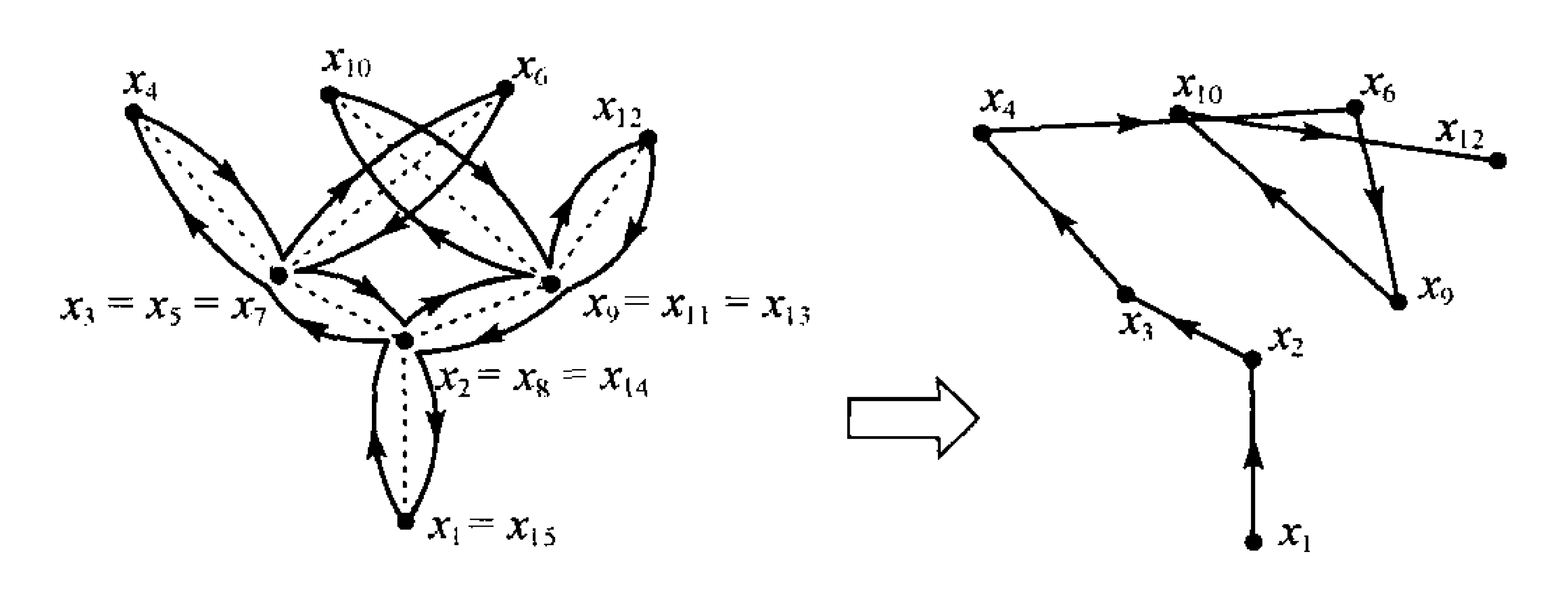


图 15.1　生成树转换为生成路

为了证明第二个陈述, 注意到如果 P 的两条边交叉, 那么这两条边必是一个凸四边形 Q 的对角线. 用 Q 的两条对边替换 P 的这两条边, 即得满足 $\sigma(P') \leqslant \sigma(P)$ 的另一条生成路 P'. 由于 P' 的边的总长度严格小于 P 的边的总长度, 因此这一算法将在有限步后终止. □

利用定理 11.6 的另一形式可以改进定理 15.12 和推论 15.14 中得到的界, 略去其中一个因子 $\log n$ (见习题 15.13).

15.5 范围搜索

上面的结果有一些重要的算法应用. 例如, 可以用来设计**半平面范围搜索**问题的有效算法. 现简要表述这一问题并概述一个解答.

设 S 是 $\mathbb{R}^2$ 中处于一般位置的 n 点集. 我们希望建立一个线性规模**数据结构**, 它使得能有效回答下述类型的问题 (**询问**): 给定一个开半平面 h, S 中落在 h 上的点的个数是多少?

设 $P = x_1x_2\cdots x_n$ 是 S 的一条穿刺数为 $\sigma(P) = O(\sqrt{n}\log n)$ 的生成路. 定义有根二叉树 T_P 如下. 设 T_P 的根 r 与整个路 $x_1\cdots x_n$ 相伴, 假设已经确定了 T_p 的一个顶点 v, 且它与子路 $P(v) = x_i\cdots x_j$ 相伴. 若 $j = i$, 则 v 是 T_P 的一片叶子. 否则, 设 v 有两个子顶点 v_1 和 v_2, 相伴子路为

$$P(v_1) = x_i\cdots x_{\lfloor\frac{i+j}{2}\rfloor}, \quad P(v_2) = x_{\lfloor\frac{i+j}{2}\rfloor+1}\cdots x_j\,.$$

于是 T_P 恰好有 n 片叶子.

经过适度处理, 可以在每个顶点 $v \in T_P$ 储藏下列信息:

(i) $|P(v)|$, $P(v)$ 的大小;

(ii) $P(v)$ 的凸包的按循环次序排列的顶点 (坐标).

给定一个开的询问半平面 h, 可确定 $|S\cap h|$ 如下. 访问 T_P 的根 r, 检查 h 的边界是否与 $P(r)$ 相交. 如果相交, 那么将问题传递给 r 的子顶点. 一般地, 访问 T_P 的一个顶点 v 时, 要确定 h 的边界是否与 $P(v)$ 相交. 若不相交, 则停止; 否则, 访问 v 的子顶点. 在这一程序中被访问的 T_P 的顶点形成子树 $T'_P \subseteq T_P$. 在 T'_P 的每片叶子 v 处可以确定是 $P(v)\subset h$ 还是 $P(v)\cap h = \varnothing$. 从 T'_P 的叶子开始反向操作, 容易计算出所有满足 $P(v)\subset h$ 的叶子的 $|P(v)|$ 的和. 显然这个和给出了落在 h 中 S 的点的个数.

注意到在 T_P 的每一层, 使 h 与 $P(v)$ 相交的顶点 v 的个数不超过 P 的穿刺数. 因为 T_P 中的层数至多是 $\lceil \mathrm{lb} n\rceil + 1$, 显然对任意询问半平面, 被访问的顶点数是

$$|V(T'_P)| \leqslant 3\lceil \mathrm{lb} n\rceil\sigma(P) = O(\sqrt{n}\log^2 n)\,.$$

另一方面, 在每个顶点 $v \in T'_P$ 处花费的时间与判断一条直线 ℓ 与 P_v 相交的时间是成比例的. 然而, 易知 ℓ 与 P_v 相交当且仅当 ℓ 与 P_v 的凸包相交, 而判定直线与凸 n 边形是否相交所需时间是 $O(\log n)$(见习题 15.14).

综上所述, 得到下述推论:

推论 15.15　给定平面上处于一般位置的 n 点集 S, 必存在占用 $O(n\log n)$ 空间的数据结构, 它允许我们对任意询问半平面耗费 $O(\sqrt{n}\log^3 n)$ 时间计算 $|S\cap h|$.

在计算几何中具有小穿刺数的生成树已被用来求得若干计算几何问题的快速算法. 相关工作见 Agarwal (1992), Edelsbrunner et al. (1989) 及 Welzl (1992).

最后, 注意如下推论, 这一推论是定理 11.6 的一个稍弱的形式, 也可以用 ε 网格证明 (见习题 15.20).

推论 15.16　给定处于一般位置的 n 条直线的集合 L 与一个整数 $r\geqslant 3$, 则平面可以被划分成至多 r^2 个三角形 (其中一些是无界的), 使得每个三角形的内部至多与 L 中 $c\frac{n}{r}\log r$ 条直线相交, 其中 c 是一个适当的常数.

习　题

15.1　对每个超图 H, 证明 (不用定理 15.1 或线性规划对偶定理) $\nu^*(H)\leqslant\tau^*(H)$.

15.2(König, 1936)　证明若 G 是一个二部图, 则 $\nu(G)=\tau(G)$.

15.3　证明不存在函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得对每个超图 H 有 $\tau(H)\leqslant f(\tau^*(H))$.

15.4(Erdős, 1964b; Lovász, 1975)

(i) 证明每个至多含 2^{r-1} 条边的 r 均匀超图 H 是 2 着色的, 即可以用 2 种颜色染它的顶点, 使得 H 的每条边含两种颜色的顶点;

(ii) 证明存在常数 $c>0$, 使得对每个 r, 都可以找到一个非 2 着色的至多含 $cr^2 2^r$ 条边的 r 均匀超图.

15.5(Frankl, Pach, 1984)　设 H 是顶点数为 n 且 VC 维数为 d 的 r 均匀超图. 证明 $|E(H)|\leqslant\binom{n}{d}$.

15.6(Vapnik, Chervonenkis, 1971)　给定 $\varepsilon>0$ 和顶点集为 $V=V(H)$ 的超图 H. 称子集 $A\subseteq V$ 是 H 的一个ε **逼近**, 如果对每条边 $E\in E(H)$, 有

$$\left|\frac{|A\cap E|}{|A|}-\frac{|E|}{|V|}\right|\leqslant\varepsilon,$$

即在任一边中 A 的点的相对个数以精度 ε 逼近该边的相对大小.

(i)* 证明存在一个绝对常数 C, 使得对任意 $0<\varepsilon<1$, 任何 VC 维数是 d 的超图都有一个至多含 $C(d/\varepsilon^2)\log(d/\varepsilon)$ 个元素的 ε 逼近;

(ii) 证明如果一个超图 H 的每条边所含点数大于 $\varepsilon|V(H)|$ (对某 $\varepsilon>0$), 那么 H 的每个 ε 逼近 A 与 H 的所有边相交, 即 A 是 H 的一个横截.

15.7* 判断以下陈述是否正确：设 H 是 VC 维数为 d 的超图，对某 $\varepsilon > d/|V(H)|$ 它的所有边至少有 $\varepsilon|V(H)|$ 个点，则存在 VC 维数为 d 的 $\lceil\varepsilon|V(H)|\rceil$ 均匀超图 H'，对任一 $E \in E(H)$ 都可以找到 $E' \in E(H)$，使得 $E' \subseteq E$.

15.8(Pach, Woeginger, 1990; Komlós et al., 1992) 设 H 是一个 VC 维数为 1 的超图，对某 $0 < \varepsilon < 1$，它的所有边至少含 $\varepsilon|V(H)|$ 个点. 证明：

$$\tau(H) \leqslant \max\{2, \lceil 1/\varepsilon\rceil - 1\},$$

且该界不能改进.

15.9(Komlós et al., 1992) 设 H 是一个 VC 维数为 d 的超图，$\varepsilon > 0$，μ 是 $V(H)$ 上的一个概率测度，使得对每条边 $E \in E(H)$ 有 $\mu(E) \geqslant \varepsilon$. 此外，设

$$\pi_H(T) = \max_{\substack{A\subseteq H\\ |A|=T}} \left|\{E \cap A \mid E \in E(H)\}\right|.$$

(i) 证明 $\tau(H) \leqslant t(d,\varepsilon)$，其中 $t(d,\varepsilon)$ 表示满足以下条件的最小正整数 t：对某整数 $T > t$，

$$2\pi_H(T)\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{(T-t)\varepsilon-1} < 1;$$

(ii) 证明对任一 $C > 2$，

$$\tau(H) \leqslant \frac{d}{\varepsilon}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon} + 2\ln\ln\frac{1}{\varepsilon} + C\right),$$

只要 $\varepsilon < \varepsilon_C$. 特别地，若 $d \geqslant 2$ 且 $C = 5$ (4 或 3)，则对 $\varepsilon_C = 1/3$ (1/6 或 1/50) 上述断言正确.

15.10(Schläfli, 1901)

(i) 证明任一处于一般位置的 n 个超平面的集合将 $\mathbb{R}^d$ 恰好划分为 $\sum_{i=0}^{d}\binom{n}{i}$ 个区域；

(ii) 证明任一处于一般位置的 n 个超平面的集合将 d 维射影空间恰好划分为 $\sum_{i=0}^{\lfloor d/2\rfloor}\binom{n}{d-2i}$ 个区域；

(iii) 证明 $\mathbb{R}^d$ 中处于一般位置的任一 n 点集可以被一个超平面用恰好 $\sum_{i=0}^{\lfloor d/2\rfloor}\binom{n}{d-2i}$ 种不同方法平分.

15.11 确定下列范围空间的 VC 维数：

(i) $X = \mathbb{R}^d$，$\mathcal{R} = \{\ \mathbb{R}^d$ 中所有开半空间 $\}$；

(ii) $X = \mathbb{R}^d$，$\mathcal{R} = \{\ \mathbb{R}^d$ 中所有开球 $\}$.

15.12(Naiman, Wynn, 1997)　给定处于一般位置的 n 点集 $S \subseteq \mathbb{R}^d$, 证明若 $n \geqslant d+3$, 则

$$|\{S \cap B^d \mid B^d \text{ 是一个球}\}| = \sum_{i=0}^{d+1} \binom{n}{i}.$$

15.13　给定 $\mathbb{R}^2$ 中处于一般位置的 n 点集 S, 证明存在一条穿刺数是 $c\sqrt{n}$ 的生成路, 其中 c 是一个适当的常数.

15.14　证明对任一边数为 n 的凸多边形, 可用 $O(\log n)$ 时间检验它是否与给定直线相交.

15.15　给定 $\mathbb{R}^2$ 中处于一般位置的 n 点集 S, 证明存在一个仅占用 $O(n)$ 空间的数据结构, 用它可以对任一半平面 h 耗费 $O(\sqrt{n}\log^3 n)$ 时间计算 $|S \cap h|$.

15.16

(i) 给定 $\mathbb{R}^2$ 中处于一般位置的 $4n$ 点集及任一具有如下性质的直线 ℓ: 在 ℓ 确定的两个开半平面内恰好有 $2n$ 个点. 证明存在直线 ℓ' 与 ℓ 交叉, 使得由这两条直线形成的每个象限恰好含 n 个点;

(ii) (Willard, 1982) 设 S 是 $\mathbb{R}^2$ 中处于一般位置的 n 点集. 用 (i) 构造一个需要线性空间的数据结构, 对任意半平面 h 可以耗费 $O(n^{\log 3/\log 4}) = O(n^{0.792\cdots})$ 时间计算 $|S \cap h|$;

(iii) (Edelsbrunner, Welzl, 1986b) 在 (ii) 中将询问时间的指数改进到 $\mathrm{lb}\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 0.695$.

15.17*(Matoušek, 1992)　设 S 是 $\mathbb{R}^2$ 中处于一般位置的 n 点集. S 的**几何划分**是指一个集类 $\{(S_1, \Delta_1), (S_2, \Delta_2), \cdots, (S_m, \Delta_m)\}$, 其中 $S_1, \cdots, S_m$ 是 S 的划分, Δ_i 是包含 S_i 的三角形. 证明存在常数 c, 使得对任一 r $(1 \leqslant r \leqslant n)$,

(i) 存在至少含 $n/2$ 个点的子集 $S' \subseteq S$ 和 S' 的几何划分 $\{(S'_1, \Delta_1), (S'_2, \Delta_2), \cdots, (S'_m, \Delta_m)\}$, 使得 $|S'_i| = \lfloor n/r \rfloor$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 且每条直线至多与 $c\sqrt{r}$ 个三角形相交;

(ii) 存在 S 的一个大小至多为 cr 的几何划分, 使得 $|S_i| \leqslant n/r$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, 且每条直线至多与 $\sqrt{r}$ 个三角形相交.

15.18　给定 $\mathbb{R}^2$ 中处于一般位置的任一 n 点集 S, $0 < \varepsilon < 1$, 设 $\mathcal{R}^\varepsilon$ 是由至少包含 S 的 εn 个元素的所有凸集构成的集族. 称点集 $T \subseteq \mathbb{R}^2$ 是 $\Sigma = (S, \mathcal{R}^\varepsilon)$ 的一个"弱 ε 网格", 若 $\mathcal{R}^\varepsilon$ 的每个成员至少含 T 的一个元素 (注意 T 的点不必属于 S). 证明:

(i) $\max\limits_{|S|=n} \text{VC-dim}(\Sigma) = \lfloor n(1-\varepsilon) \rfloor$;

(ii) 存在常数 c (与 n, S 和 ε 无关), 使得对每个 $0 < \varepsilon < 1$, Σ 恒存在由至多 $\dfrac{c}{\varepsilon^{\log 4/\log(4/3)}}$ 个点构成的弱 ε 网格;

(iii) (Alon et al., 1992) 在 (ii) 中的界可以改进到 c/ε^2;

(iv)* (Chazelle et al., 1993) 若 S 的点是一个正 n 边形的顶点, 则 Σ 有大小至多是 c/ε 的弱 ε 网格, 其中 c 是适当的常数;

(v) (Chazelle et al., 1993) 若 S 的点是一个凸 n 边形的顶点, 则 Σ 有一个阶至多是

$$(c/\varepsilon)\log^{\log 3}(1/\varepsilon)$$

的弱 ε 网格, 其中 c 是适当的常数.

15.19(Aronov et al., 1994; Pach, 1991)　称两条线段"无关", 若支撑两者之一的直线中任一直线与另一线段不交叉. 证明 $\mathbb{R}^2$ 中处于一般位置的 n 个点总能确定至少 $c\sqrt{n}$ 条相互无关的线段.

15.20　用推论 15.6 (i) 证明下面的陈述. 给定处于一般位置的 n 条直线的集合 L 和整数 $r \geqslant 3$, 平面可以划分成至多 r^2 三角形 (其中一些是无界的), 使得每个三角形的内部至多与 L 的 $c\frac{n}{r}\log r$ 条直线相交, 其中 c 是某固定常数.

15.21(Bárány, Lehel, 1987; Pach, 1997)　给定两点 $p, q \in \mathbb{R}^d$, 设 $\mathrm{Box}(p,q)$ 表示包含 p 和 q 的平行于坐标轴的最小长方体. 证明从任一有限点集 $S \subseteq \mathbb{R}^d$ 中可以选取至多 $2^{2^{d+2}}$ 个点 p_i $(1 \leqslant i \leqslant 2^{2^{d+2}})$, 使得

$$\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant 2^{2^{d+2}}} \mathrm{Box}(p_i, p_j) \supseteq S\,.$$

15.22(Ding et al., 1994)　用定理 15.9 求解习题 14.11.

15.23(Gyárfás Lehel, 1969)　证明对任意正整数 k 和 ν, 存在一个数 $f(k,\nu)$ 具有下述性质: 设 H 是 $\mathbb{R}$ 的一个有限子集族, 每个子集是至多 k 个区间的并. 若 H 中没有 $\nu+1$ 个两两不交的成员, 则可以找到至多 $f(k,\nu)$ 个点, 使得 H 的每个成员含有这些点中的一个点.

第16章 几何偏差

设 H 是顶点集为 $V(H)$, 边集为 $E(H)$ 的超图, c 为使用两种颜色 $+1$, -1 的顶点着色, 即 $c: V(H) \to \{+1, -1\}$. 给定任意边 E, 令

$$c(E) = \sum_{x \in E} c(x)\,,$$

$$\operatorname{disc}(H, c) = \max_{E \in E(H)} |c(E)|\,.$$

H 的**偏差**定义为

$$\operatorname{disc}(H) = \min_{c} \operatorname{disc}(H, c)\,,$$

其中 $\min_c$ 表示对顶点的所有 2 着色取得的最小值. 换言之, 我们希望求得一个尽可能“一致”的 2 着色: H 的每条边所含颜色为 $+1$ 的点数与颜色为 -1 的点数大致相同.

一致分布理论, 特别是偏差理论, 已有很长历史, 在数论、几何学和数值分析中都有若干应用 (Beck, chen, 1987; Kuipers, Niederreiter, 1974; Hlawka, 1984; Beck, Sós, 1994; Sós, 1989). 概率论方法和组合论方法在这一领域起着至关重要的作用是不足为奇的. 然而, 为什么谐波分析和积分几何也成为偏差理论中的工具, 直觉上则不那么显然. 本章旨在通过对几个典型问题的集中讨论来阐明这些方法. 特别地, 要证明, 对于 n 个顶点均在平面上, 边可由顶点集与半平面相交得到的任何超图, 其偏差至多为 $cn^{1/4}$, 并且这个界除常数 c 值外是渐近紧的. 这些结果分别由 Matoušek (1995) 和 Alexander (1990) 得到, 改进了 Beck (1983b, 1991) 用多对数因子得到的一些较早的估计.

对独立随机变量和的分布经常用到下面的所谓**尾估计**.

引理 16.1 (Chernoff 不等式) 设 $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_N$, 其中 ξ_i 是相互独立的随机变量, 且 $Pr\{\xi_i = +1\} = Pr\{\xi_i = -1\} = 1/2$, 则对任何 $t > 0$,

$$Pr\{\xi > t\} < \exp\left(-\frac{t^2}{2N}\right).$$

证明 设 c 为一个待定正数, 则 $\mathrm{e}^{c\xi_i}$ 的期望

$$E\left[\mathrm{e}^{c\xi_i}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{c} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-c} < \mathrm{e}^{c^2/2}\,.$$

因为 ξ_i 是相互独立的, 所以

$$E[\mathrm{e}^{c\xi}] = \prod_{i=1}^{N} E[\mathrm{e}^{c\xi_i}] < \mathrm{e}^{Nc^2/2},$$

从而

$$Pr\{\xi > t\} = Pr\{\mathrm{e}^{c\xi} > \mathrm{e}^{ct}\} < \frac{E[\mathrm{e}^{c\xi}]}{\mathrm{e}^{ct}} = \mathrm{e}^{N\frac{c^2}{2}-ct}.$$

令 $c = t/N$, 即得欲求的 $Pr\{\xi > t\}$ 的上界. □

16.1 浮动着色法

定理 16.2 *设 H 为 n 个顶点 m 条超边的超图, 则有*

$$\operatorname{disc}(H) \leqslant \sqrt{2n\ln 2m}$$

证明 对顶点采用随机着色 c, 即对 H 的每个顶点 地以概率 $1/2$ 赋值 $+1$ 或 -1.

由引理 16.1, 对任意 $E \in E(H)$,

$$Pr\{\,|c(E)| > t\,\} < 2\exp\left(-\frac{t^2}{2|E|}\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right).$$

因此, 若 $t = \sqrt{2n\ln 2m}$, 则

$$\begin{aligned} Pr\{\operatorname{disc}(H,c) > t\,\} &\leqslant \sum_{E\in E(H)} Pr\{\,|c(E)| > t\,\} \\ &< 2m\exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right) = 1, \end{aligned}$$

从而有一种着色 c, 使得 $\operatorname{disc}(H,c) \leqslant \sqrt{2n\ln 2m}$. □

一种简单的概率构造表明, 一般情况下此上界不可能有较大改进 (见习题 16.1). 然而如果假定 H 的每个顶点只包含在少数超边中, 那么 H 可以有更一致的着色, 即使得偏差更小的着色.

含顶点 x 的边数称为 x 在 H 中的**度**, 记作 $d_H(x)$ (或 $d(x)$).

定理 16.3 (Beck, Fiala, 1981) *若超图 H 的每个顶点的度至多为 D, 则* $\operatorname{disc}(H) \leqslant 2D$.

证明 证明思路如下: 放宽一种着色仅能取两个值 $+1$ 和 -1 这一条件, 改为考虑**拟着色** $c: V(H) \to [-1,+1]$, 其值可取闭区间 $[-1,+1]$ 上的任何值. 由偏差为 0 的平凡拟着色 $c \equiv 0$ 开始, 然后指定某些值为 $+1$ 或 -1, 对拟着色逐步加以

修正, 直至得到一个真正的着色. 此过程即为众所周知的“浮动着色法” (Spencer, 1987).

假设在上述构造的某阶段有拟着色 c. 若 $c(x)=+1$ 或 -1, 则称之为**终值**, 后面不再加以修正. 如果 $-1<c(x)<+1$, 那么称 x 具有**浮动色**. 如果超边 $E\in E(H)$ 中浮动色的点数超过 D, 则称 E 为**活动的**. 另外, 假设所有的活动边有 0 偏差, 即对任何活动边 E,

$$c(E)=\sum_{x\in E}c(x)=0.$$

假设并非 H 的所有边都是非活动的, 令 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 表示活动边. 对顶点重新编号, 使得 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 有浮动色且 c 在 $x_{p+1},\cdots,x_n$ 上取终值. 因为每一条活动边中具有浮动色的点数大于 D, 且每个点至多属于 D 条边, 所以 $m<p$.

下一步修正拟着色 c, 方法如下: 考虑 p 个变量 $(y_1,y_2,\cdots,y_p)$ m 个方程构成的方程组

$$\sum_{\substack{x_j\in E_i\\ 1\leqslant j\leqslant p}}y_j+\sum_{\substack{x_j\in E_i\\ p<j\leqslant n}}c(x_j)=0\quad(1\leqslant i\leqslant m).$$

满足所有这些方程的点 $(y_1,y_2,\cdots,y_p)$ 的轨迹是 $\mathbb{R}^p$ 的一个与立方体 $C^p=[-1,+1]^p$ 的交非空的 k 维平坦集 $(k\geqslant p-m\geqslant 1)$. 因此, 至少存在一个交点 $(y_1',y_2',\cdots,y_p')$ 落在 C^p 的一个刻面 [$(p-1)$ 维面] 上, 即对某个 j , 有 $y_j'=+1$ 或 -1.

令

$$c'(x_j)=\begin{cases}y_j', & 1\leqslant j\leqslant p\,,\\ c(x_j), & \text{其他},\end{cases}$$

则得到一个对任意活动边 E 均有 $c'(E)=0$ 的拟着色 c', 且 c' 的终值个数至少增加 1.

如此进行下去, 直到得出一个没有活动边的拟着色 c^*. 如果并非 c^* 的所有取值均为 $+1$ 和 -1, 就把所有的浮动色改为, 如 $+1$. 这样即可得到一个真正的着色 $\hat{c}:V(H)\to\{-1,+1\}$. 我们断言, 对任意边 $E\in E(H)$, 都有 $|\hat{c}(E)|\leqslant 2D$.

事实上, 在 E 变成非活动边时, 已有 $c'(E)=\sum_{x\in E}c'(x)=0$, 随后又在至多 D 个点 $x\in E$ 上改变了 c' 的值. 因此,

$$|\hat{c}(E)|\leqslant\sum_{x\in E}|\hat{c}(x)-c'(x)|+|c'(E)|\leqslant 2D+0.\qquad\square$$

下述定理是以上结果的一个非常好的几何结论, 它部分解决了 G. Tusnády 提出的一个问题.

定理 16.4 (Beck, 1981a)　设 S 为 $\mathbb{R}^d$ $(d\geqslant 2)$ 中的 n 点集, 其中任意两点的 x_i 坐标都不相同 $(1\leqslant i\leqslant d)$, 则存在具有下述性质的着色 $c:S\to\{+1,-1\}$: 对任意

边平行于坐标轴的长方体 B, 均有

$$\left|\sum_{p\in B\cap S} c(p)\right| \leqslant (2\log 2n)^{2d}.$$

证明 对任意 $i \leqslant d$, 定义 x_i 轴上的**正则区间族** $\mathcal{I}_i$ 如下: 设 $x_i^1 < x_i^2 < \cdots < x_i^n$ 表示 S 中的点以递增顺序排列的 x_i 坐标. 令 $[x_i^1, x_i^n] \in \mathcal{I}_i$. 此外, 对任意非单点集的 $[x_i^j, x_i^k] \in \mathcal{I}_i$ $(k > j)$, 添加两个附加元 $[x_i^j, x_i^{\lfloor (j+k)/2 \rfloor}]$, $[x_i^{\lfloor (j+k)/2 \rfloor+1}, x_i^k]$ 至 $\mathcal{I}_i$. 显然, $x_i^1 < x_i^2 < \cdots < x_i^n$ 的任意邻接子列 (contiguous subsequence) 中的元素可以被至多 $2\lceil \log n \rceil$ 个不交正则区间覆盖.

一个**长方体** $I_i \times I_2 \times \cdots \times I_d$ 称为是**正则的**, 如果对每一个 i $(1 \leqslant i \leqslant d)$, 都有 $I_i \in \mathcal{I}_i$. 任一点 $p \in S$ 至多包含于 $(\lceil \log n \rceil + 1)^d$ 个正则长方体中. 因此, 由定理 16.3 可知, 存在着色 $c : S \to \{+1, -1\}$, 使得对任意正则长方体 B',

$$\left|\sum_{p\in B'\cap S} c(p)\right| \leqslant 2(\lceil \log n \rceil + 1)^d.$$

为完成证明, 只须注意到, 对任意边平行于坐标轴的长方体 B, 可将 $B \cap S$ 分解为至多 $(2\lceil \log n \rceil)^d$ 个不相交的集合

$$B \cap S = (B^1 \cap S) \cup (B^2 \cap S) \cup \cdots \cup (B^k \cap S),$$

其中, 每个 B^j 都是一个正则长方体. □

16.2 偏差与 VC 维数

上面的论证必须用到这样一个事实: 长方体处于平行位置. 没有这个假定就不能得出偏差的多对数上界. 然而, 即使在这种情况下, 也能够利用一些结构信息导出非平凡的上界 (优于由定理 16.2 得到的上界).

我们需要一些定义. 对任意超图 $H = (V(H), E(H))$, 可以通过顶点与边互换定义**对偶超图** H^*, 即令

$$V(H^*) = E(H),$$

$$E(H^*) = \{\{E \in E(H) \mid E \ni x\} \mid x \in V(H)\}.$$

显然, $(H^*)^* = H$.

H 的**断裂函数**定义为

$$\pi_H(m) = \max_{\substack{A \subseteq V(H) \\ |A|=m}} |\{ E \cap A \mid E \in E(H) \}|.$$

定理 15.4 表明, 如果 H 有 VC 维数 d, 那么对所有的 $m \leqslant |V(H)| = n$,

$$\pi_H(m) \leqslant \sum_{i=0}^{d} \binom{m}{i} = O(m^d).$$

H^* 的断裂函数往往称作 H 的**对偶断裂函数**. 对任意的 $m \leqslant |E(H)|$, $\pi_{H^*}(m)$ 为 m 条边 $E_1, \cdots, E_m \in E(H)$ 分拆 $V(H)$ 可得到的等价类的最大个数, 其中属于相同 E_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 的两个顶点视为是等价的.

引理 16.5　(i) *如果* $\text{VC-dim}(H) < d$, *那么* $\text{VC-dim}(H^*) < 2^d$;

(ii) *如果对某个* $C > 0, d > 1$ *及所有的* $m \leqslant |V(H)|$, *有* $\pi_H(m) \leqslant Cm^d$, *那么*

$$\text{VC-dim}(H) \leqslant 4d \log(Cd + 2).$$

证明　(i) 采用反证法, 假设 $\text{VC-dim}\ (H^*) \geqslant 2^d$. 则存在 2^d 元子集 $U \subseteq E(H)$, 使得对任意的 $W \subseteq U$, 可选取 $x_W \in V(H)$ 使得 $\{E \in U \mid x_W \in E\} = W$. 用 $\{1, 2, \cdots, d\}$ 的互异子集对 U 的元素标号, 令 W_i 表示 U 的标号中含 i $(1 \leqslant i \leqslant d)$ 的所有元素组成的集合.

可以断言 $\{x_{W_1}, x_{W_2}, \cdots, x_{W_d}\}$ 在 H 中是断裂的. 事实上, 对任意子集 $A \subseteq \{1, 2, \cdots, d\}$, 存在一个标号为 A 的元素 $E \in U \subseteq E(H)$, 且

$$E \cap \{x_{W_1}, \cdots, x_{W_d}\} = \{ x_{W_i} \mid i \in A \}.$$

因此, $\text{VC-dim}\ (H) \geqslant d$, 矛盾.

(ii) 注意到若 $\text{VC-dim}(H) = D$, 则有 $\pi_H(D) = 2^D \leqslant CD^d$. □

特别地, 由引理 16.5 (i) 可知, 如果 $\text{VC-dim}\ (H) < d$, 那么 H 对偶超图的断裂函数 $\pi_{H^*}(n) = O(n^{2^d-1})$. 然而, 对几何结构中出现的大多数超图而言, 可以得到 $\pi_{H^*}(n)$ 更好的上界.

设 H 为超图, 图 G 有相同的顶点集 $V(G) = V(H)$. 称 G 的一条边**穿刺**超边 $E \in E(H)$, 若这条边的一个端点在 E 中, 另一端点不在 E 中. G (关于 H) 的**穿刺数**是指一个最小数 s, 使得 H 的每条超边至多被 G 的 s 条边穿刺.

Chazelle, Welzl (1989) 指出定理 15.12 和推论 15.14 的证明容易扩展到任意超图 H, 只要这些超图的对偶断裂函数使得 $\pi_{H^*}(m) \leqslant Cm^d$ 对所有 m 成立. 此外, Haussler (1991) 甚至在这种更一般的情况下设法去掉了这些上界中的对数因子 (Wernisch, 1994 和习题 16.7).

这样, 就有推论 15.14 的如下意义深远的推广.

定理 16.6 对任意 $C > 0, d > 1$, 存在具有如下性质的常数 $C'' = C''(C, d)$: 设 H 为有 n 个顶点的超图, 且对所有 m, 其对偶断裂函数满足 $\pi_{H^*}(m) \leqslant Cm^d$, 则存在 $V(H)$ 上的一个生成路 P, P 关于 H 的穿刺数 $\sigma(P)$ 满足

$$\sigma(P) \leqslant C''n^{1-\frac{1}{d}}.$$

定理 16.6 的如下重要推论是由 Matoušek, Welzl, Wernisch(1993) 指出的. 在 H 具有较小 VC 维数时, 它给出了定理 16.3 中一般界的一个明确的改进. 此外, 对 $d = 2, 3$, 已知这个界是渐近最佳可能的 (Matoušek, 1994).

定理 16.7 对任意 $C > 0, d > 1$, 存在具有如下性质的常数 $C'' = C''(C, d)$: 设 H 为超图, 且对所有 m, 均有 $\pi_{H^*}(m) \leqslant Cm^d$, 则

$$\mathrm{disc}\,(H) \leqslant C''n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})}\sqrt{\log n}.$$

证明 应用定理 16.6 找出一个 (关于 H 的) 穿刺数不超过 $C'n^{1-\frac{1}{d}}$ 的生成路 $P = x_1x_2\cdots x_n$ $(1 \leqslant i \leqslant n/2)$.

选取随机着色 $c = \{x_1, x_3, x_5, \cdots\} \to \{+1, -1\}$, 对每个点独立地以概率 1/2 着色为 +1 或 −1. 对每个 $i\,(1 \leqslant i \leqslant n/2)$, 令 $c(x_{2i}) = -c(x_{2i-1})$, 从而将 c 扩展为整个顶点集上的着色.

如果点对 x_{2i-1}, x_{2i} 不穿刺边 $E \in E(H)$, 那么它对 $c(E) = \sum_{x\in E} c(x)$ 的贡献为 0. 穿刺 $E \in E(H)$ 的点对 x_{2i-1}, x_{2i} 的个数至多为 $C'n^{1-\frac{1}{d}}$. 如果 n 是奇数, $x_n \in E$, 那么 x_n 也对 $c(E)$ 有贡献.

因此, $c(E)$ 可以写成至多 $C'n^{1-\frac{1}{d}} + 1$ 个相互独立的随机变量的和, 这些随机变量以概率 1/2 取值 +1 或 −1. 由 Chernoff 不等式 (见引理 16.1) 可知, 对任意固定的 $E \in E(H)$,

$$Pr\{\,|c(E)| > t\,\} < 2\exp\left(-\frac{t^2}{2(C'n^{1-\frac{1}{d}} + 1)}\right).$$

应用引理 16.5 (ii) 和 (i), 有

$$\text{VC-dim}(H) \leqslant 2^{5d\log(Cd+2)} = (Cd+2)^{5d}.$$

由此又可推知

$$|E(H)| \leqslant \sum_{i=0}^{(Cd+2)^{5d}} \binom{n}{i} < n^{(Cd+2)^{5d}}.$$

因此, 如果 $t = C''n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})}\sqrt{\log n}$, 那么

$$Pr\{\mathrm{disc}\,(H, c) > t\} \leqslant \sum_{E\in E(H)} Pr\{|c(E)| > t\}$$

$$< 2n^{(Cd+2)^{5d}} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2(C'n^{1-\frac{1}{d}}+1)}\right)$$
$$= 2\exp\left((Cd+2)^{5d}\ln n - \frac{t^2}{2(C'n^{1-\frac{1}{d}}+1)}\right) < 1,$$

其中 C'' 为仅依赖于 C, d 的充分大常数. □

设超图 H 的顶点集为 $\mathbb{R}^d$ 中的 n 点集, 且

$$E(H) = \{E \subseteq V(H) \mid \exists \text{球 } B, \text{使得 } B \cap V(H) = E\}.$$

将定理 16.7 应用到超图 H, 可得如下结果 (见习题 16.8).

推论 16.8 设 S 为 $\mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 2)$ 中的 n 点集, 则存在着色 $c: S \to \{+1, -1\}$, 使得对任意球 B, 均有

$$\left|\sum_{p \in B \cap S} c(p)\right| \leqslant C n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})}\sqrt{\log n},$$

其中, C 为仅依赖于 d 的常数.

球改为长方体有类似结果 (见习题 16.9).

推论 16.9 设 S 为 $\mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 2)$ 中的 n 点集, 则存在着色 $c: S \to \{+1, -1\}$, 使得对任意长方体 B (不必平行于坐标轴), 均有

$$\left|\sum_{p \in B \cap S} c(p)\right| \leqslant C n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})}\sqrt{\log n},$$

其中, C 为依赖于 d 的常数.

16.3 部分着色方法

前一节给出了超图 H 偏差的用 $\pi_{H^*}(n)$ 表示的上界, 这里 $\pi_{H^*}(n)$ 是 H 的对偶超图的断裂函数 (定理 16.7). 由引理 16.5, 这意味着 $\operatorname{disc}(H)$ 存在另外一个非平凡的用“初始”断裂函数 $\pi_H(n)$ 表示的上界. 然而, 对这个界可以做很大改进.

定理 16.10 (Matoušek, 1995) 对任意 $C > 0, d > 1$, 存在具有如下性质的常数 $C'' = C''(C, d)$: 设 H 为具有 n 个顶点的超图, 对所有 $m \leqslant n$, 其断裂函数满足 $\pi_H(m) \leqslant Cm^d$, 则有

$$\operatorname{disc}(H) \leqslant C'' n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})}.$$

此结果略去一个对数因子, 改进了 Matoušek et al. (1993) 的一个较早的估计, 是渐近紧的.

下面给出的证明有两个要素. 其一是 Haussler (1991) 得到的 **填装引理** , 它将 Chazelle, Welzl (1989) 的一个重要几何结果推广到了超图, 另一重要工具是 Beck (1981b) 与 Spencer (1985) 提出的部分着色方法, 这种方法的基础是概率论方法和鸽笼原理的巧妙结合.

令 $A \triangledown B$ 表示集合 A 和 B 的 **对称差** , 即

$$A \triangledown B = (A - B) \cup (B - A).$$

A 与 B 的 **距离**(在 Hamming 度量下)为 $|A \triangledown B|$. 如果一个集族的任意两个成员之间的距离至少是 r, 则称之为 r 分离的.

引理 16.11 (Haussler) *对任意 $C > 0, d > 1$, 存在具有如下性质的常数 $C' = C'(C,d)$: 设 H 为具有 n 个顶点的超图, 且对所有 $m \leqslant n$, 其断裂函数 $\pi_H(m) \leqslant Cm^d$, 那么对每个 $r \geqslant 1$, H 超边的任意 r 分离族至多有 $C'(n/r)^d$ 个元.*

证明(梗概) 仅在下述特殊情况下证明这个引理. $V(H)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中处于一般位置的点集, $E(H)$ 为 $V(H)$ 与半空间的交所成集合的全体. 因为 $V(H)$ 的 m 元子集被超平面分成两部分的方法数为 $\sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \binom{m}{d-2i}$ [见习题 15.10(iii)], 所以

$$\pi_H(m) = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \binom{m}{d-2i} \leqslant m^d.$$

因此在这种情况下, 引理 16.11 的条件对 $C = 1$ 成立.

现考虑由超边 $E_i (1 \leqslant i \leqslant I)$ 构成的 r 分离族. 对每一个 i, 选取半空间 S_i, 使得 $S_i \cap V(H) = E_i$. 记界定 S_i 的超平面为 h_i. 不妨假设 S_i 与 x 轴正半轴的交对至少 $I/2$ 个下标是无界的 (例如, 对所有的 $1 \leqslant i \leqslant I/2$). 由几何对偶性, 每一个顶点 $x \in V(H)$ 对应于一个超平面 x^*, 每一个超平面 h_i 对应于 $\mathbb{R}^d$ 的一个点 h_i^*, 使得 $|E_i \triangledown E_j|$ 等于与线段 $h_i^* h_j^*$ $(1 \leqslant i, j \leqslant I/2)$ 相交的超平面 x^* 的个数.

对任意两点 $p, q \in \mathbb{R}^d$, 令 $\operatorname{dist}(p,q)$ 表示与闭线段 pq 相交的超平面 x^* $(x \in V(H))$ 的个数 [注意, $\operatorname{dist}(p,q)$ 不是 $\mathbb{R}^d$ 上的真度量, 因为即使 $p \neq q$ 也会有 $\operatorname{dist}(p,q) = 0$; 只要 p 属于一个超平面, 就有 $\operatorname{dist}(p,p) \neq 0$. 不过, 它满足三角不等式]. 此外, 令 $B^d(p,k)$ 表示超平面的配置 $\{x^* \mid x \in V(H)\}$ 中满足 $\operatorname{dist}(p,v) \leqslant k$ 的所有顶点 v 构成的集合. 因为 $\operatorname{dist}(h_i^*, h_j^*) \geqslant r$, 所以集合 $B^d(h_i^*, r/2)$, $1 \leqslant i \leqslant I/2$ 是两两不交的. 考虑到上述超平面配置的顶点总数是 $\binom{n}{d}$, 为了在这一特殊情况下证明引理 16.11, 只须证明

$$\left| B^d\left(h_i^*, \frac{r}{2}\right) \right| \geqslant c_d \left(\frac{r}{2}\right)^d.$$

断言 对不属于任意超平面 x^* $(x \in V(H))$ 的点及任意整数 k $\left(d \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}\right)$, 存在适当选取的常数 $c_d > 0$, 使得 $|B^d(p,k)| \geqslant c_d k^d$.

当 $d=1$ 时, 断言显然为真. 设 $d \geqslant 2$, 并假设对所有小于 d 的维数断言已得证. 今任选一条从 p 点出发的射线, 此射线至少与配置的 $n/2$ 个超平面交于不同的点 $p_1, \cdots, p_{\lceil n/2 \rceil}$ (依此顺序). 取包含 p_i 的超平面与其他 $n-1$ 个超平面的交 ($1 \leqslant i \leqslant k-d+1$), 得到一个 $(d-1)$ 维配置, 对这个 $(d-1)$ 维配置应用归纳假设, 可得

$$\begin{aligned}|B^d(p,k)| &\geqslant \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{k-d+1}|B^{d-1}(p_i,k-i)| \\ &\geqslant \frac{c_{d-1}}{d}\sum_{i=1}^{k-d+1}(k-i)^{d-1} \\ &\geqslant c_d k^d .\end{aligned}$$

这就证明了断言, 从而也在所考虑的特殊情况下证明了引理 16.11. □

定理 16.10 的证明　类似于定理 16.4 的证明, 首先定义一个将 H 的每条边分解为相对少的 "正则" 片段的 **正则分解** , 然后证明在这些具有小偏差的正则子集族上存在一个合乎要求的 2 着色, 由此立即可得欲证结果.

正则分解依据的是引理 16.11. 为简单起见, 假设 n 是 2 的方幂, 且 $\varnothing \in E(H)$. 对任意的 i, $0 \leqslant i < \log n$, 令 H_i 为顶点集 $V(H)=V$ 上的一个超图, 其边取自 $E(H)$, 并形成了一个 **最大** 2^i 分离族. 于是 $H_0 = H$, 由引理 16.11 可知, 对每一个 i,

$$|E(H_i)| < C'\left(\frac{n}{2^i}\right)^d . \tag{16.1}$$

为便于表示, 令 $H_{\log n}$ 表示仅含一条边即空集的超图.

对每个 i, $1 \leqslant i \leqslant \log n$, 另外定义两个超图 H_i' 和 H_i'' 如下: 对任意的 $E \in E(H_{i-1})$, 固定一条满足 $|E \bigtriangledown E^*| \leqslant 2^i$ 的边 $E^* \in E(H_i)$, 且令

$$\begin{aligned}E(H_i') &= \{E - E^* \mid E \in E(H_{i-1})\} , \\ E(H_i'') &= \{E^* - E \mid E \in E(H_{i-1})\} .\end{aligned}$$

按照约定, $H'_{\log n} = H_{\log n-1}$ 且 $E(H''_{\log n}) = \{\varnothing\}$. 这样一来每个 $E \in E(H) - E(H_0)$ 就可写成

$$E = (E^* \cup (E - E^*)) - (E^* - E) .$$

换句话说, 存在 $E_1 \in E(H_1), E_1' \in E(H_1'), E_1'' \in E(H_1'')$, 使得

$$E = (E_1 \cup E_1') - E_1''.$$

同理, 存在 $E_2 \in E(H_2), E_2' \in E(H_2'), E_2'' \in E(H_2'')$, 使得 E_1 可表示为

$$E_1 = (E_2 \cup E_2') - E_2''.$$

如此进行下去, $\log n$ 步以后, 就得到 E 的一个正则分解

$$E = ((((\cdots(E_{\log n} \cup E'_{\log n})\cdots) \cup E'_2) - E''_2) \cup E'_1) - E''_1,$$

其中 $E_{\log n} = \varnothing$, $E'_i \in E(H'_i)$, $E''_i \in E(H''_i)$. 这个分解的一个至关重要的性质是, 我们总是取不交集合的并, 或者从一个集合中减去它的**子集**. 因此, 对任意的着色 $c: V \to \{+1, -1\}$, 有

$$|c(E)| \leqslant \sum_{i=1}^{\log n} (|c(E'_i)| + |c(E''_i)|). \tag{16.2}$$

设 $\widehat{H}_i$ 为 $V(\widehat{H}_i) = V$, $E(\widehat{H}_i) = E(H'_i) \cup E(H''_i)$ 的超图, 其中 $1 \leqslant i \leqslant \log n$. 由定义及 (16.1) 可知, 对任何 $E \in E(\widehat{H}_i)$, 有

$$\begin{aligned} &|E(\widehat{H}_i)| \leqslant 2|E(H_{i-1})| \leqslant 2C'\left(\frac{n}{2^{i-1}}\right)^d, \\ &|E| \leqslant 2^i. \end{aligned} \tag{16.3}$$

现只须证明以下引理.

引理 16.12 *存在具有如下性质的 3 着色 $c: V \to \{+1, -1, 0\}$:*

(i) $\sum_{i=1}^{\log n} \max\limits_{E \in E(\widehat{H}_i)} |c(E)| \leqslant K n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})}$, *其中 $K = K(C, d)$ 为适当的常数;*

(ii) *V 中至少有 $n/3$ 个点 x, 使得 $c(x) \neq 0$.*

事实上, 重复应用这一引理很容易证得定理 16.10. 设 c 为满足上述条件的着色, 令

$$V_1 = \{x \in V \mid c(x) = 0\}.$$

在第二次迭代时, 对 V_1 导出的 H 的子超图 $H[V_1]$ 重复全过程, $H[V_1]$ 定义如下:

$$\begin{aligned} &V(H[V_1]) = V_1, \\ &E(H[V_1]) = \{E \cap V_1 \mid E \in E(H)\}. \end{aligned}$$

到此就得到一个着色 $c_1: V_1 \to \{+1, -1, 0\}$. 令 $V_2 = \{x \in V_1 \mid c_1(x) = 0\}$, 如此等等. 一旦得到一个 0 的个数小于 $n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})}$ 的着色, 就停止这个过程, 同时将全部这些点着色 $+1$.

令 $\bar{c}: V \to \{+1, -1\}$ 为以上着色的 "叠加", 即

$$\bar{c}(x) = \begin{cases} c(x), & x \in V - V_1, \\ c_1(x), & x \in V_1 - V_2, \\ c_2(x), & x \in V_2 - V_3, \\ \cdots\cdots & \\ +1, & \text{其他}. \end{cases}$$

由 (16.2) 和引理 16.12 (i) 可知, 对每个 $E \in E(H)$, 有

$$\begin{aligned}|\bar{c}(E)| &< |c(E)| + |c_1(E \cap V_1)| + |c_2(E \cap V_2)| + \cdots + n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})} \\ &< 2K \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^i n\right]^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})} + n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})} \\ &< \frac{2K+1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})}} n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})},\end{aligned}$$

如此就完成了定理的证明. □

因此下面仅须证明引理 16.12, 为此须作一些准备.

定义 16.13 设 ξ 为仅在有限集 S 上取值的随机变量, 定义

$$H(\xi) = -\sum_{s \in S} p_s \log p_s$$

为 ξ 的**熵**, 其中 $p_s = Pr\{\xi = s\}$, 且和式仅对满足 $p_s > 0$ 的 s 求和.

由定义可直接得到熵的下列性质, 证明比较容易, 留给读者.

(a) $H(\xi) \leqslant -\sum_{s \in S} \frac{1}{|S|} \log \frac{1}{|S|} = \log |S|$;

(b) 如果 $H(\xi) \leqslant h$, 则存在 $s \in S$, 使得 $p_s \geqslant 2^{-h}$;

(c) 对任意由两个分量构成的随机变量 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, 有 $H(\xi) \leqslant H(\xi_1) + H(\xi_2)$ (见习题 16.10)

现在即可证明引理 16.12.

引理 16.12 的证明 设 M 为一充分大的正值常数 (稍后即予说明). 为简单起见, 假设

$$m = \log\left(M^{\frac{1}{d}} n^{1-\frac{1}{d}}\right)$$

为一整数. 对任意的 i, $1 \leqslant i \leqslant \log n$, 令

$$D_i = M n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})} 2^{-|i-m|/4}.$$

设 $c: V \to \{+1, -1\}$ 为一随机 2 着色, 对其中顶点以概率 1/2 独立着色为 +1 或 −1. 对任意的 i 和任意 $E \subseteq E(\widehat{H}_i)$, 定义随机变量 $b_{i,E} = b_{i,E}(c)$ 为

$$b_{i,E} = \left[\frac{c(E)}{D_i}\right],$$

其中 $[x]$ 表示距离 x 最近的整数. 最后令

$$b = b(c) = \left(b_{i,E} \mid 1 \leqslant i \leqslant \log n, E \in E(\widehat{H}_i)\right),$$

即 b 为有 $\sum_{i=1}^{\log n}|E(\widehat{H}_i)|$ 个整数坐标的向量.

断言 如果 M 充分大, 那么 $H(b)\leqslant n/20$.

假定断言为真, 则由熵函数的性质 (b) 可知, 存在一个特殊的向量 b_0, 使得

$$Pr\{b(c)=b_0\}\geqslant 2^{-\frac{n}{20}}\,.$$

换言之, 满足 $b(c)=b_0$ 的不同着色 $c:V\to\{+1,-1\}$ 至少有 $2^{19n/20}$ 个. 选取其中任意一个, 如 c_1. 显然, 在至多 $n/3$ 个点上与 c_1 着色不同的 2 着色的总数为

$$\sum_{i=0}^{n/3}\binom{n}{i}<2^{\frac{19n}{20}}\,.$$

因此, 存在一个满足 $b(c_2)=b(c_1)=b_0$ 的 2 着色 c_2, 使得 c_1 与 c_2 在多于 $n/3$ 个顶点处着色不同. 从而可知 $\bar{c}=(c_1-c_2)/2$ 是 V 的一个 $(+1,-1,0)$ 着色, 满足引理 16.12 的条件 (ii). 注意 $\bar{c}$ 同时也满足条件 (i). 事实上, 对任意的 $E\in E(\widehat{H}_i)$, 均有 $b_{i,E}(c_1)=b_{i,E}(c_2)$, 所以

$$\left|\frac{c_1(E)}{D_i}-\frac{c_2(E)}{D_i}\right|\leqslant 1\,,$$

$$|\bar{c}(E)|=\left|\frac{c_1(E)-c_2(E)}{2}\right|\leqslant\frac{D_i}{2}\,.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{\log n}\max_{E\in E(\widehat{H}_i)}|\bar{c}(E)|\leqslant\sum_{i=1}^{\log n}\frac{D_i}{2}<\frac{M}{1-2^{-1/4}}n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})}\,.$$

引理 16.12 成立.

最后来证明上面的断言. 由熵函数的性质 (c), 可知

$$H(b)\leqslant\sum_{i=1}^{\log n}\sum_{E\in E(\widehat{H}_i)}H(b_{i,E})\,,$$

故仅须给出 $H(b_{i,E})$ 的界即可.

固定一个下标 i 与一条边 $E\in E(\widehat{H}_i)$, 对任意整数 s, 令 $p_s=Pr\{b_{i,E}=s\}$. 由于 $c(E)$ 为 $|E|$ 个相互独立的随机变量之和, 且这些随机变量只取值 $+1$ 或 -1, 考虑到 (16.3), 由 Chernoff 不等式 (引理 16.1) 可得

$$\begin{aligned}p_s&\leqslant Pr\left\{c(E)\geqslant\left(s-\frac{1}{2}\right)D_i\right\}\\&<\exp\left(-s^2\frac{M^{2-\frac{1}{d}}}{8}2^{m-i-\frac{|i-m|}{2}}\right)\,.\end{aligned}$$

如果 $i \leqslant m$, 且 M 充分大, 由上式可知

$$
\begin{aligned}
H(b_{i,E}) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} p_s \log p_s \\
&\leqslant -\log p_0 + 2\sum_{s=1}^{\infty} \exp\left(-s^2 M 2^{\frac{m-i}{2}}\right)(\log \mathrm{e}) s^2 M 2^{\frac{m-i}{2}} \\
&\leqslant -\log p_0 + \exp\left(-2^{\frac{m-i}{2}}\right) \\
&\leqslant -\log\left(1 - 2Pr\left\{c(E) \geqslant \frac{D_i}{2}\right\}\right) + \exp\left(-2^{\frac{m-i}{2}}\right) \\
&\leqslant -\log\left(1 - 2\exp(-M2^{\frac{m-i}{2}})\right) + \exp(-2^{\frac{m-i}{2}}) \\
&\leqslant 2\exp\left(-2^{\frac{m-i}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

因此, 应用 (16.3) 中 $|E(\widehat{H}_i)|$ 的上界, 得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \sum_{E \in E(\widehat{H}_i)} H(b_{i,E}) &\leqslant \sum_{i=1}^{m} 4C' \left(\frac{n}{2^{i-1}}\right)^d \exp\left(-2^{\frac{m-i}{2}}\right) \\
&= \frac{4C'}{M} n \sum_{i=1}^{m} 2^{d(m-i+1)} \exp\left(-2^{\frac{m-i}{2}}\right) \\
&\leqslant \frac{n}{40}.
\end{aligned}
$$

如果 $i > m$, 则可应用熵的性质 (a). 在这种情况下,

$$
\begin{aligned}
H(b_{i,E}) &= -\sum_{|s| \leqslant 2^{3(i-m)/4}} p_s \log p_s - \sum_{|s| > 2^{3(i-m)/4}} p_s \log p_s \\
&\leqslant \log\left(2 \cdot 2^{\frac{3}{4}(i-m)} + 1\right) \\
&\quad + 2\sum_{|s| > 2^{3(i-m)/4}} \exp\left(-s^2 M 2^{-\frac{3}{2}(i-m)}\right) \cdot (\log \mathrm{e}) s^2 M 2^{-\frac{3}{2}(i-m)} \\
&\leqslant \left(\frac{3}{4}(i-m) + 2\right) + 1.
\end{aligned}
$$

因此, 如果 M 充分大, 由 (16.3) 可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=m+1}^{\log n} \sum_{E \in E(\widehat{H}_i)} H(b_{i,E}) &\leqslant \sum_{i=m+1}^{\log n} 2C' \left(\frac{n}{2^{i-1}}\right)^d (i - m + 3) \\
&= \frac{2C'}{M} n \sum_{i=m+1}^{\log n} \frac{i-m+3}{2^{(i-m-1)d}} \\
&\leqslant \frac{n}{40}.
\end{aligned}
$$

这样就证明了断言, 从而也证明了引理 16.12. □

由定理 16.10 立即可知推论 16.8 与 16.9 中界的对数因子在某些特殊情况下可以略去.

推论 16.14 设 S 为 $\mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 2)$ 中的 n 点集, 则存在着色 $c: S \to \{+1,-1\}$ 具有下述性质: 对任意单位球 B,

$$\left|\sum_{p\in B\cap S} c(p)\right| \leqslant Cn^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})},$$

其中 C 为仅依赖于 d 的常数. 相应地, 单位球换为半空间结论同样成立.

对定理 16.10 中的界一般不能加以改进. 例如, 众所周知, 对有 $n = q^d + q^{d-1} + \cdots + 1$ 个顶点的超图 H_d, 若它的边由 q 阶有限 d 维射影空间的超平面构成, 则

$$\operatorname{disc}(H) \geqslant C_d n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})}.$$

当 $d = 2$ 时, Di Paola 给出了这个事实的一个简单证明. 注意 $H = H_2$ 满足定理 16.10 的条件, 因为对所有的 $m \leqslant n$, 均有 $\pi_H(m) \leqslant \binom{m}{2}$. 现考虑任意着色 $c: V(H) \to \{+1,-1\}$. 显然,

$$\begin{aligned}
\sum_{E\in E(H)} c^2(E) &= \sum_{E\in E(H)}\left(\sum_{x\in E} c(x)\right)^2 \\
&= \sum_{E\in E(H)}\sum_{x\in E} c^2(x) + \sum_{x\in V(H)}\sum_{\substack{y\in V(H)\\ y\neq x}} c(x)c(y) \\
&= (q+1)\sum_{x\in V(H)} c^2(x) + \sum_{x\in V(H)}\sum_{y\in V(H)} c(x)c(y) - \sum_{x\in V(H)} c^2(x) \\
&= q\sum_{x\in V(H)} c^2(x) + \left(\sum_{x\in V(H)} c(x)\right)^2 \\
&\geqslant qn.
\end{aligned}$$

由于 $|E(H)| = n$, 故存在一条边 $E \in E(H)$, 使得 $|c(E)| \geqslant \sqrt{q} > (n-\sqrt{n}-1)^{1/4}$. 以上论证可以推广至高维空间.

16.4 偏差与积分几何

Alexander (1990) 改进了 Beck (1983b) 的一个稍弱的结果, 进而证明了推论 16.14 中的界是渐进紧的. 当然, 这也意味着推论 16.8 与 16.9 中的结论已近乎最优. 本节集中讨论这个问题的二维情况. 我们将证明, 对整数点 $\{(i,j) \mid 1 \leqslant i,j \leqslant \sqrt{n}\}$

的任意 2 着色, 存在一个半平面 h, 在此半平面上, 一种颜色的数目比另一种颜色至少多 $cn^{1/4}$.

下面 Chazelle (1993) 的简单证明和 Alexander 的原有证明一样, 依据的也是积分几何的一些简单结果. 这个学科起源于著名的 **Buffon 针问题**和一系列有关几何概率的悖论问题 (Buffon, 1770). Santaló (1952, 1976) 奠定了精确理论的基础.

我们从 Cauchy 公式 (1850) 一个重要的特殊情形开始 (Crofton, 1868, 1885; Blaschke, 1955). 设 K 为平面上一内部含原点的凸体. 对任意 $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, 令 $h(\varphi)$ 为原点到 K 的正交于方向 φ 的支撑直线的距离, 即

$$h(\varphi) = \sup_{P\in K} \langle P, (\cos\varphi, \sin\varphi) \rangle ,$$

函数 $h(\varphi)$ 称为 K 的**支撑函数**.

定理 16.15 (Cauchy) *设 $K \subseteq \mathbb{R}^2$ 是支撑函数为 $h(\varphi)$ 的凸体, 记其周长为 $\operatorname{Per} K$, 则有*

$$\operatorname{Per} K = \int_0^{2\pi} h(\varphi) \mathrm{d}\varphi .$$

证明 设 $\mathbf{0} \in K$. 不妨假设 K 的支撑函数的二阶导函数 $h''(\varphi)$ 存在且连续. 对任意给定的 $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, 令 $\ell(\varphi)$ 表示与方向 φ 正交的支撑直线. 此外, 记 $P(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi))$ 为 $\ell(\varphi)$ 与 K 的边界的交点, $H(\varphi) = (h(\varphi)\cos\varphi, h(\varphi)\sin\varphi)$ 为 $\mathbf{0}$ 在 $\ell(\varphi)$ 上的正交投影 (图 16.1).

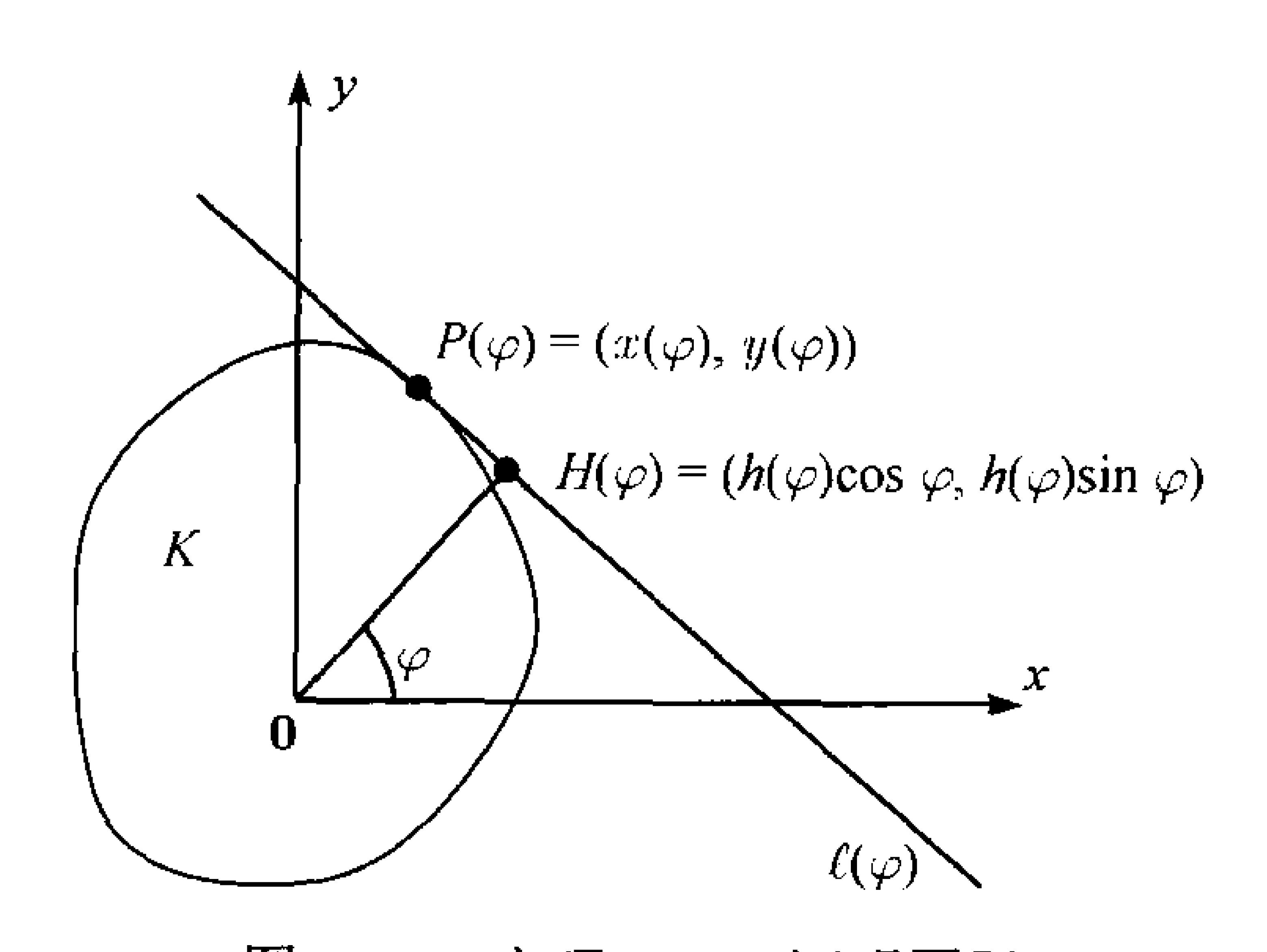


图 16.1 定理 16.15 证明图示

于是有

$$\begin{aligned} h(\varphi) &= \langle P(\varphi), (\cos\varphi, \sin\varphi)\rangle \\ &= x(\varphi)\cos\varphi + y(\varphi)\sin\varphi , \\ h'(\varphi) &= \langle P'(\varphi), (\cos\varphi, \sin\varphi)\rangle + \langle P(\varphi), (-\sin\varphi, \cos\varphi)\rangle \\ &= 0 - x(\varphi)\sin\varphi + y(\varphi)\cos\varphi . \end{aligned}$$

等价地,

$$x(\varphi) = h(\varphi)\cos\varphi - h'(\varphi)\sin\varphi\,,$$
$$y(\varphi) = h(\varphi)\sin\varphi + h'(\varphi)\cos\varphi\,.$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{Per} K &= \int_0^{2\pi} \left\{[x'(\varphi)]^2 + [y'(\varphi)]^2\right\}^{1/2} \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{[-h(\varphi)\sin\varphi - h''(\varphi)\sin\varphi]^2 + [h(\varphi)\cos\varphi + h''(\varphi)\cos\varphi]^2\right\}^{1/2} \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \Big[h(\varphi) + h''(\varphi)\Big] \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} h(\varphi)\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

(见习题 16.11). □

下面给出 Cauchy 公式的两个直接推论.

(i) 设 $K' \subseteq K$ 均为平面上的凸体, 则

$$\operatorname{Per} K' \leqslant \operatorname{Per} K\,;$$

(ii)(Barbier, 1860) 设 K 是**等宽**为 1 的凸体, 即对任意的 φ, 均有 $h(\varphi) + h(\varphi + \pi) = 1$, 则 $\operatorname{Per} K = \pi$.

每条不经过原点的直线 ℓ 由该直线上到 $\mathbf{0}$ 的最近点唯一确定. 令 $\rho(\ell)$ 与 $\varphi(\ell)$ 表示这个点的极坐标, $\rho(\ell)$, $\varphi(\ell)$ 分别为 $\mathbf{0}$ 到 ℓ 的距离和 x 轴与 ℓ 法线的夹角.

这样, 任意直线集 $\mathcal{L}$ 都可用 (ρ, φ) 平面上的一个子集来刻画. 设 $\mu(\mathcal{L})$ 表示这个子集的勒贝格测度, 则测度 μ 在 $\mathbb{R}^2$ 的运动群下是不变的, 并且与给定凸集 $K \subseteq \mathbb{R}^2$ 相交的直线集的测度等于 $\operatorname{Per} K$ (根据定理 16.15).

下面令 $U = [0, 1/4]^2$ 表示周长为 1 的正方形, 考虑所有与 U 相交的直线构成的集合 $\mathcal{L}$. 于是 $\mu(\mathcal{L}) = 1$, 所以 μ 是 $\mathcal{L}$ 上的**概率测度**. 对于子集 $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ 和一条与 U 相交的**随机直线** ℓ, 可以说

$$Pr\{\ell \in \mathcal{L}'\} = \mu(\mathcal{L}') \leqslant 1\,.$$

同样地, 可以讨论宽度为 w 的**随机板**, 它是一条以随机直线 $\ell \in \mathcal{L}$ 为中心线的平行带

$$\operatorname{slab}(\ell, w) = \left\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{dist}(p, \ell) \leqslant \frac{w}{2}\right\}.$$

以上定义为提出 (和回答) 几何概率中的具体问题提供了一个可行框架. 例如, 令 p, p' 为 U 中相互间距离 $s \geqslant w$ 的两个点, 假设它们到 U 的边界的距离均大于

$w/2$, 那么宽度为 w 的随机板包含这两个点的概率为

$$
\begin{aligned}
Pr\{p,p' \in \mathrm{slab}(\ell,w)\} &= \int_{-\arcsin\frac{w}{s}}^{+\arcsin\frac{w}{s}} (w - s|\sin\varphi|)\mathrm{d}\varphi \\
&= 2w\arcsin\frac{w}{s} + 2s\sqrt{1-\left(\frac{w}{s}\right)^2} - 2s\,. \qquad (16.4)
\end{aligned}
$$

现在来证明这一节的主要结果, 这个证明是 Chazelle 给出的.

定理 16.16 (Alexander)　*存在平面上的 n 点集 S, 对任意 2 着色 $c: S \to \{+1,-1\}$, 总可找到半平面 h, 使得*

$$
\Big||\{p \in S\cap h \mid c(p)=+1\}| - |\{p \in S\cap h \mid c(p)=-1\}|\Big| \geqslant Cn^{1/4},
$$

其中 C 为一正值常数.

证明　不妨假设 $n=m^2$, 其中 $m>0$ 为整数. 令

$$
S = \left\{ \left(\frac{i}{4(m+1)}, \frac{j}{4(m+1)}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant i,j \leqslant m \right\} \subseteq U\,.
$$

设 $w=\varepsilon/m$, 其中 $\varepsilon>0$ 为一稍后即将确定的小常数. 设 $c: S \to \{+1,-1\}$ 为 S 中点的 2 着色. 在以下证明中, 把 $+1,-1$ 分别视为 “蓝色” 和 “红色”.

设 ℓ 为与 U 相交的任一直线, ℓ^+ (ℓ^-) 表示由 ℓ 界定的包含 (不包含) 原点的开半平面. 此外令

$$
\begin{aligned}
R_\ell^+ &= \{p \in S \mid p \in \ell^+ \cap \mathrm{slab}(\ell,w),\ p \text{ 是红色的}\},\\
R_\ell^- &= \{p \in S \mid p \in \ell^- \cap \mathrm{slab}(\ell,w),\ p \text{ 是红色的}\},\\
B_\ell^+ &= \{p \in S \mid p \in \ell^+ \cap \mathrm{slab}(\ell,w),\ p \text{ 是蓝色的}\},\\
B_\ell^- &= \{p \in S \mid p \in \ell^- \cap \mathrm{slab}(\ell,w),\ p \text{ 是蓝色的}\}.
\end{aligned}
$$

显然, 只须证明对某一 $\ell \in \mathcal{L}$,

$$
\Delta(\ell) = (|R_\ell^+| - |B_\ell^+|) - (|R_\ell^-| - |B_\ell^-|)
$$

的绝对值至少为 $Cn^{1/4}$. 事实上, 我们将证明, 在上面定义的概率空间中, $\Delta^2(\ell)$ 的期望值至少为 $C'n^{1/2}$. 估计这个量的思想使人联想到上一节末尾的证明, 那个证明给出了有限射影空间偏差的一个类似的下界.

注意到一条随机直线经过 S 中某个点的概率为 0. 给定一条不经过 S 的任何点的直线 ℓ, 如果 p_i, p_j 位于 ℓ 的异侧, 则称线段 p_ip_j $(p_i \neq p_j \in S)$ 为**交叉的**.

$$
\Delta^2(\ell) = \left(\sum_{p_i\in R_\ell^+} 1 - \sum_{p_i\in B_\ell^+} 1 - \sum_{p_i\in R_\ell^-} 1 + \sum_{p_i\in B_\ell^-} 1\right)^2
$$

$$
\begin{aligned}
&= |S \cap \mathrm{slab}(\ell, w)| \\
&\quad + 2\Big|\{\, p_ip_j \subset \mathrm{slab}(\ell, w) \ :\ p_ip_j \text{ 为单色不交叉 } \}\Big| \\
&\quad - 2\Big|\{\, p_ip_j \subset \mathrm{slab}(\ell, w) \ :\ p_ip_j \text{ 为单色交叉 } \}\Big| \\
&\quad + 2\Big|\{\, p_ip_j \subset \mathrm{slab}(\ell, w) \ :\ p_ip_j \text{ 为双色交叉 } \}\Big| \\
&\quad - 2\Big|\{\, p_ip_j \subset \mathrm{slab}(\ell, w) \ :\ p_ip_j \text{ 为双色不交叉 } \}\Big| .
\end{aligned}
$$

在所有的直线 $\ell \in \mathcal{L}$ 上积分即得

$$
E[\Delta^2(\ell)] \geqslant \sum_{i=1}^{n} Pr\{p_i \in \mathrm{slab}(\ell, w)\} - 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P_{ij} , \tag{16.5}
$$

其中

$$
P_{ij} = \Big| Pr\{\, p_ip_j \subseteq \mathrm{slab}(\ell, w) \text{ 交叉 } \} - Pr\{\, p_ip_j \subseteq \mathrm{slab}(\ell, w) \text{ 不交叉 } \} \Big| .
$$

由 Cauchy 公式可知, p_i 含于一宽度为 w 的随机板的概率等于半径为 $w/2$ 的圆的周长. 设 ℓ', ℓ'' 表示与 ℓ 距离为 $w/2$ 的平行线, $d_{ij} = |p_i - p_j|$. 由 (16.4) 可得

$$
\begin{aligned}
P_{ij} = \Bigg| & Pr\{p_ip_j \subseteq \mathrm{slab}(\ell, w)\} - 2\Bigg(Pr\left\{ p_ip_j \subseteq \mathrm{slab}\left(\ell', \frac{w}{2}\right)\right\} \\
& + Pr\left\{ p_ip_j \subseteq \mathrm{slab}\left(\ell'', \frac{w}{2}\right) \right\} \Bigg)\Bigg| \\
= {} & 2w \left(\arcsin \frac{w}{d_{ij}} - 2 \arcsin \frac{w/2}{d_{ij}} \right) \\
& + 2d_{ij} \left(3 + \sqrt{1 - \left(\frac{w}{d_{ij}}\right)^2} - 4\sqrt{1 - \left(\frac{w/2}{d_{ij}}\right)^2} \right) .
\end{aligned}
$$

因为

$$
w = \frac{\varepsilon}{m} < \frac{1}{4(m+1)} \leqslant d_{ij} ,
$$

我们发现 (例如, 由在 $w = 0$ 的 Taylor 展开式) 只要 ε 充分小, 上式中最后的表达式有上界 $\frac{w^4}{2d_{ij}^3}$, 从而由 (16.5) 可得

$$
E[\Delta^2(\ell)] \geqslant n\pi w - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{w^4}{2d_{ij}^3} .
$$

利用 S 形成边长为 $\frac{1}{4(m+1)}$ 的网格这一事实, 对任意的 $p_i \in S$, 存在至多 $8k$ 个异于 p_i 的点 $p_j \in S$, 它们与 p_i 的 Manhattan 距离 (L_1-距离) 为 $\frac{k}{4(m+1)}$. 因此, 如果 ε 充分小, 则有

$$
\begin{aligned}
E[\Delta^2(\ell)] &\geqslant n\pi w - \frac{n}{2}\sum_{1\leqslant k<m}\frac{8kw^4}{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{k}{4(m+1)}\right]^3}\\
&\geqslant n\pi w - 10^4 n(m+1)^3 w^4\\
&\geqslant \frac{n\pi w}{2}\\
&= \frac{\varepsilon\pi}{2}n^{1/2}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

对具有性质

$$\max_{i\neq j}|p_i-p_j|/\min_{i\neq j}|p_i-p_j|<C\sqrt{n}$$

的任意点集 $S=\{p_1,\cdots,p_n\}\subseteq\mathbb{R}^2$, 上面的论证依然成立. 证明也可推广至高维空间 (Chazelle et al., 1995).

16.5 偏差与 ε 逼近

如前面所指出的, Vapnik, Chervonenkis (1971) 提出有关横截问题的创新研究是超图理论、组合与计算几何、偏差理论等领域许多研究的起点. 这篇论文提出的一个特别值得注意的问题是一个统计问题: 给定一个具有 n 个顶点的集族 (超图) H, 试从它的顶点集 $V(H)$ 中抽取一个相对小的"样本", 使得任何集合 (边) $E\in E(H)$ 的大小近似于 $n|E\cap T|/|T|$. 现在回到这一问题, 并根据相关研究的最新进展改进 Vapnik-Chervonenkis 的最初结果 (见习题 15.6), 以此结束本节, 从而也结束本书.

定义 16.17 设 $H=(V(H),E(H))$ 为具有 n 个顶点的超图, $\varepsilon>0$. $T\subseteq V(H)$ 称为 H 的ε **逼近**, 如果对任意 $E\in E(H)$, 均有

$$\left|\frac{|E\cap T|}{|T|}-\frac{|E|}{n}\right|\leqslant\varepsilon.$$

显然, 对任意 $\varepsilon'>\varepsilon$, H 的一个 ε 逼近也是一个 ε' 网格 (见定义 15.10).

引理 16.18 设 $H=(V(H),E(H))$ 为有 n 个顶点的超图, 假定 $V(H)\in E(H)$. 设 $c: V(H)\to\{+1,-1\}$ 为满足 $\mathrm{disc}\,(H,c)=D\leqslant n/2$ 的顶点着色, 集合 $T=\{x\in V(H)\mid c(x)=+1\}$, 则

(i) $n/4\leqslant|T|\leqslant 3n/4$;

(ii) T 是 H 的 $(4D/n)$ 逼近.

证明 因为 $|c(E)|\leqslant D$, 所以对任意的 $E\in E(H)$, 有

$$\Big|2|E\cap T|-|E|\Big|\leqslant D\leqslant\frac{n}{2}.$$

特别地, 对 $E = V(H)$, 有

$$\Big|2|T| - n\Big| \leqslant D \leqslant \frac{n}{2},$$

从而 (i) 得证.

另一方面, 对任意超边 E,

$$\begin{aligned}\left|\frac{|E\cap T|}{|T|} - \frac{|E|}{n}\right| &\leqslant \left|\frac{2|E\cap T| - |E|}{2|T|}\right| + \left|\frac{|E|}{2|T|} - \frac{|E|}{n}\right| \\ &\leqslant \frac{D}{2|T|} + \frac{|E|}{n}\left|\frac{n-2|T|}{2|T|}\right| \\ &\leqslant \frac{D}{|T|} \leqslant \frac{4D}{n}.\end{aligned}$$

□

本章已确立了超图 H 偏差的各种上界, 将这些结果与引理 16.18 结合, 就得到 H 的一个非常好的 ε 逼近 (在"误差限"ε 非常小的意义下). 问题是这些"样本"的容量非常大. 但是可通过迭代此过程来克服这个困难, 即用一个更小的样本来逼近一个好样本.

定理 16.19 (Matoušek et al., 1993) *设 H 为具有 n 个顶点的超图, $0 < \varepsilon < 1$, $\pi_H(m)$, $\pi_{H^*}(m)$ 分别表示 H 的断裂函数和对偶断裂函数. 对任意的 $C > 0, d > 1$, 存在常数 $C' = C'(C,d)$, 使得*

(i) *如果 $\pi_H(m) \leqslant Cm^d$, 则 H 有一个 ε 逼近 T, 使得*

$$|T| \leqslant C'\varepsilon^{-\frac{2d}{d+1}};$$

(ii) *如果 $\pi_{H^*}(m) \leqslant Cm^d$, 则 H 有一个 ε 逼近 T, 使得*

$$|T| \leqslant C'\varepsilon^{-\frac{2d}{d+1}}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{d}{d+1}}.$$

证明 不妨假设 $V(H) \in E(H)$. 为证明 (i) 成立, 首先对超图 $H_0 = H$ 应用定理 16.10. 若 $n_0 = n$ 充分大, 则存在着色 $c_0 : V(H_0) \to \{+1, -1\}$, 使得

$$\operatorname{disc}(H_0, c_0) = D_0 \leqslant C'' n_0^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})} \leqslant \frac{n_0}{2}.$$

由引理 16.18, 集合 $T_1 = \{x \in V(H_0) \mid c_0(x) = +1\}$ 为 H_0 的 $(4D_0/n_0)$ 逼近. 设 $H_1 = H_0[T_1]$ 为 T_1 导出的 H_0 的子超图, 即

$$E(H_1) = \{E \cap T_1 \mid E \in E(H_0)\}.$$

令 $n_1 = |V(H_1)| = |T_1|$, 则有 $n_0/4 \leqslant n_1 \leqslant 3n_0/4$.

如果 n_1 仍充分大, 那么存在着色 $c_1 : V(H_1) \to \{+1, -1\}$, 使得

$$\operatorname{disc}(H_1, c_1) = D_1 \leqslant C'' n_1^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})} \leqslant \frac{n_1}{2},$$

因此 $T_2 = \{x \in V(H_1) \mid c_1(x) = +1\}$ 为 H_1 的 $(4D_1/n_1)$ 逼近. 令 $H_2 = H_1[T_2]$, $n_2 = |V(H_2)| = |T_2|, \cdots$. 一旦

$$|T_k| \leqslant C' \varepsilon^{-\frac{2d}{d+1}} = t,$$

就终止此过程, 此处 C' 选得充分大, 使得

$$t^{-\frac{d+1}{2d}} < \frac{1 - \sqrt{3}/2}{4C''} \varepsilon.$$

于是, 对任意 $0 \leqslant i < k$,

$$\begin{aligned}\operatorname{disc}(H_i, c_i) = D_i &\leqslant C'' n_i^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{d})} \\ &\leqslant C'' n_i t^{-\frac{d+1}{2d}} \\ &\leqslant \frac{(1-\sqrt{3}/2)\varepsilon}{4} n_i \\ &< \frac{n_i}{2},\end{aligned}$$

故引理 16.18 中的条件成立.

为完成 (i) 的证明, 只须注意到, 如果 C' (从而每个 n_i) 充分大, T_k 就是 H 的一个满足如下条件的 D 逼近:

$$\begin{aligned}D &= \frac{4D_{k-1}}{n_{k-1}} + \frac{4D_{k-2}}{n_{k-2}} + \cdots + \frac{4D_0}{n_0} \\ &\leqslant 4C'' \left(n_{k-1}^{-\frac{d+1}{2d}} + n_{k-2}^{-\frac{d+1}{2d}} + \cdots + n_0^{-\frac{d+1}{2d}} \right) \\ &\leqslant 4C'' t^{-\frac{d+1}{2d}} \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{d+1}{2d}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2(d+1)}{2d}} + \cdots \right] \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

用完全相同的方法由定理 16.6 可推得 (ii). □

对满足 VC-dim$(H) = d$ 和 VC-dim$(H^*) = d$ 的任意超图 H, 定理 16.19 中 (i) 和 (ii) 的条件均成立.

习 题

16.1 证明若相对于 n 而言 m 充分大, 则存在一个顶点数为 n 边数为 m 的超图 H, 使得 H 满足 $\operatorname{disc}(H) > C\sqrt{n \log m}$, 其中 $C > 0$ 为某一适当选取的常数.

16.2　证明至多 2^{r-1} 条边的 r 一致超图 H 的顶点可用两种颜色着色, 使得所有 $E\in E(H)$ 都不是单色的.

16.3*(Erdős, Lovász, 1975)　证明如果 r 一致超图 H 的每条边至多与其他 2^{r-3} 条边相交, 那么存在顶点的一个 2 着色, 使得任何边 $E\in E(H)$ 都不是单色的.

16.4(Las Vergnas, Lovász, 1972)　设 H 是一个具有如下性质的超图: 对每个 k, 任意 k 条边的并至少有 $k+1$ 个顶点. 证明 H 的点可以用两种颜色着色, 使得任何边都不是单色的.

16.5　证明在定理 16.3 的假设下, 有 $\operatorname{disc}(H)\leqslant 2D-1$.

16.6(国际数学奥林匹克, 1986)　设 S 为平面上的有限点集. 证明存在 2 着色 $c: S\to\{+1,-1\}$, 使得在每条水平线和垂直线上, c 值的和是 $+1,-1$ 或 0.

16.7(Wernisch, 1994)　由引理 16.11 推证定理 16.6.

16.8　设 H 为超图, 其 n 个顶点在 $\mathbb{R}^d$ 中, 且

$$E(H)=\{E\subseteq V(H)\mid \text{存在一个球或半空间 } B, \text{使得 } B\cap V(H)=E\}.$$

证明对任意 $d\geqslant 2$, 存在仅依赖于 d 的常数 C_d, 使得 $\pi_{H^*}(n)\leqslant C_d n^d$.

16.9　证明对任意 $C>0$, $d\geqslant 1$, 及任意正整数 k, 存在具有如下性质的常数 $C'=C'(C,d,k)$:

设 H 为有 n 个顶点的超图, 且对所有 m, 均有 $\pi_{H^*}(m)\leqslant Cm^d$, 又设

$$E(H')=\{\varphi(E_1,E_2,\cdots,E_k)\mid E_1,E_2,\cdots,E_k\in E(H)\},$$

其中 φ 为一固定的 k 个变元的集论公式, 则

$$\operatorname{disc}(H')\leqslant C'n^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{d}\right)}\sqrt{\log n}.$$

16.10　设 ξ 和 $H(\xi)$ 的含义同定义 16.13. 证明:

(i) $H(\xi)\leqslant -\sum_{s\in S}\dfrac{1}{|S|}\log\dfrac{1}{|S|}=\log|S|$;

(ii) 如果 $H(\xi)\leqslant h$, 则存在数 $s\in S$, 使得 $p_s\geqslant 2^{-h}$;

(iii) 对任意由两个分量构成的随机变量 $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, 有 $H(\xi)\leqslant H(\xi_1)+H(\xi_2)$.

16.11　设 $K\subseteq\mathbb{R}^2$ 为有二次可微支撑函数 $h(\varphi)$ 的凸体. 证明 $h(\varphi)+h''(\varphi)\geqslant 0$.

16.12(Hansen, 1978; Lutwak, 1979)　设 γ 是平面上长度为 π 的简单闭 Jordan 曲线, 证明:

(i) γ 含于一个单位面积的矩形中;

(ii) γ 含于一个面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ 的三角形中.

16.13(Spencer, 1985)　设 H 为 n 个顶点 n 条边的超图. 证明存在一个适当选取的常数 C, 使得 $\operatorname{disc}(H)\leqslant C\sqrt{n}$.

16.14*(Beck, 1981b; Matoušek, Spencer, 1994) 令 H_n 为顶点集 $V=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的超图, 其边集由 V 中所有等差数列构成. 证明存在一个适当的常数 C, 使得 $\operatorname{disc}(H_n)\leqslant Cn^{1/4}\log n$.

16.15 设 π_1 和 π_2 是 $V=\{1,2,\cdots,n\}$ 的两个置换, 其中 n 是偶数. 令 H_n 表示顶点集 V 上的超图, 其边为所有形如 $\{\pi_i(j),\pi_i(j+1),\cdots,\pi_i(k)\}$, $i=1,2$, $1\leqslant j<k\leqslant n$ 的集合.

(i) 证明 $\operatorname{disc}(H_n)\leqslant 2$;

(ii) 如果是 3 个置换, 又会有什么结果?

习 题 提 示

本附录提供了大多数习题的提示. 标有星号的问题更具挑战性, 鼓励聪明勤奋的读者尝试独立解决, 不要在此前查阅相关参考文献与本书给出的提示. 未标星号也无提示的习题应该说都相当简单.

第 1 章

[1.1] 证明每个 u_i 可写成 $\sum_{j=1}^{d} a_{ij}v_j$, 其中 $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.

[1.2] 对格$\mathbf{\Lambda} = \{(n, \alpha n - m) \in \mathbb{R}^2 \mid m$ 和 n 是整数 $\}$ 和由直线 $x = k$, $x = -k$, $y = \frac{1}{k}$, $y = -\frac{1}{k}$ 界定的矩形 C 应用 Minkowski 定理 (定理 1.7).

[1.3] 按

$$|n\alpha - m| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}n}$$

的形式应用推论 1.6.

[1.4] 对 $S = \frac{1}{2}C$ 应用定理 1.8.

[1.5] 注意到满足不等式 $|l_i(n_1, \cdots, n_d)| \leqslant b_i$ 的所有实数 d 元组 $(n_1, n_2, \cdots, n_d)$ 形成的集合是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个平行体. 应用 Minkowski 定理 (定理 1.7).

[1.6] 为证明 (ii), 注意到 $\mathbb{Z}_p^+$ 一定含一个阶是 $4 = (p-1)/m$ 的元 b. 因此 $b^2 \equiv -1 \pmod p$, 因为 -1 是循环群中唯一的元素, 循环群的阶是 2.

[1.7] 为了证明一个满维的离散子群 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ 是格, 选取 d 个线性无关向量 $x_1, \cdots, x_d$. 令 H 表示由 $\{x_1, \cdots, x_{d-1}\}$ 导出的子空间, 以对 d 进行归纳的方式, 可假设 $X \cap H$ 是一个由某些向量 $u_1, \cdots, u_{d-1}$ 生成的 $(d-1)$ 维格. 证明存在 $u_d \in X - H$, 它到 H 的距离最小, 且 $X = \mathbf{\Lambda}(u_1, \cdots, u_d)$.

[1.8] 利用习题 1.7 证明

$$\det \mathbf{\Lambda} = \lim_{R \to \infty} \frac{|\mathbb{Z}^d \cap B^d(R)|}{|\mathbf{\Lambda} \cap B^d(R)|} = k\,,$$

其中 $B^d(R)$ 是一个半径为 R 中心在原点的球.

[1.9] 尝试形如 $8m + 7$ 的数即可.

[1.10] 综合引理 1.10 和 Wilson 定理(1.2 式).

第 2 章

[2.1] 利用定理 2.1 的证明思路.

[2.2] 设 P 是一个外切于 C 的面积最小的凸 n 边形, P_i 表示旋转角为 $2i\pi/k$, $0 \leqslant i < k$ 的旋转下 P 的象. 如果不存在 i 和 j 使得 P_i 的一个冠严格包含于 P_j 的一个冠, 那么 P 具有 k 重旋转对称. 否则, 采用定理 2.5 证明中的论证方法.

[2.3] 不成立, 试考虑椭圆.

[2.4] (i) 确定 Q_n 的边的无穷小平移和旋转过程中 $\text{dev}_\text{A}(C, Q_n)$ 的变化情况.

[2.5] (i) 用小扰动变分法即得;

(ii) 利用 (i) 和定理 2.4.

[2.6] 将 (2.1) 与 (2.2) 代入

$$A(C) = \left|\int_0^\pi y(\phi)x'(\phi)\mathrm{d}\phi\right| + \left|\int_\pi^{2\pi} y(\phi)x'(\phi)\mathrm{d}\phi\right|.$$

[2.7] 利用 $y(\phi)$ 的傅里叶级数.

[2.8] 设 Q_n 是一个所有角都是$\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\pi$ 的外切 n 边形, q_n 表示 Q_n 与 C 的相接触的点导出的 n 边形.

[2.9] 假设 C 关于 B 和 B' 的公共中心是中心对称的, 且包含一个内接于 B' 的正则单纯形. 利用下述事实: 一个宽度为 W 的中心对称凸体恒包含一个直径为 W 的球. 仿照推论 2.12 的证明.

[2.10] (i) 先证明内切于 S 的最大球的半径至多为 $1/d$, 由此证明 $k = d-1$ 时的结论. 对 $d-k$ 用归纳法证明 $k < d-1$ 时的结论;

(ii) 对 $k \approx d/(2\ln n)$ 考虑由 p_n^d 的顶点导出的 k 维单纯形的集合 F_k. 由 (i) 知, p_n^d 的每个点至少与这些单纯形中的一个接近, 于是

$$\text{Vol}\,(p_n^d) \leqslant \binom{n}{k+1}\left(\max_{F_k}\,\text{Vol}_k(F_k)\right)\text{Vol}_{d-k}(B^{d-k}(\rho)),$$

其中, $\rho = \sqrt{(d-k)/(dk)}$, $B^{d-k}(\rho)$ 是半径为 ρ 的 $(d-k)$ 维球. 利用

$$\text{Vol}_i(B^i) = \frac{2\sqrt{\pi}}{i\Gamma(i/2)},$$

其中 Γ **函数**由 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ 定义.

第 3 章

[3.2] 为了证明第一个结论, 在圆盘 $D(n)$ 中构造一个由 C 的全等拷贝形成的填

装 $\mathcal{C}_n$, 对任何 n 其密度

$$d(\mathcal{C}_n, D(n)) \geqslant \delta(C) - \frac{O(1)}{n}.$$

选取一子序列 $n_1, n_2, \cdots$, 使得限制在 $D(1)$ 中的 $\mathcal{C}_{n_i}$ 当 $i \to \infty$ 时收敛. 继续选取子序列, 使得限制在 $D(2)$ 中的 $\mathcal{C}_n$ 收敛, 如此进行下去. 证明极限填装满足要求.

[3.4] 设 $\mathcal{C}$ 为凸锥中单位圆盘形成的最稠密填装. 选取 P, P' 分别为圆盘与正三角形.

[3.5] 仿照定理 3.7 的证明.

[3.6] 尝试正八边形.

[3.7] 利用紧性论证.

[3.8] (ii) 利用 (i) 和 Dowker 定理 (定理 2.1), 方法与定理 3.2 的证明完全相同; (iii) 由 (ii) 即得, 注意到对于中心对称凸体 C, 可选 P_4 为平行四边形.

[3.9] 推广定理 3.14 的证明.

第 4 章

[4.2] 为了证明 $D(C)$ 的凸性, 注意到对任意一对点 $p_1 = q_1 - q_1', p_2 = q_2 - q_2' \in D(C)$, 以及任意 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 有

$$\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2 = (\lambda q_1 + (1-\lambda)q_2) - (\lambda q_1' + (1-\lambda)q_2').$$

[4.3] 首先证明对任何方向 v, 存在一仿射正六边形 $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$, 除 p_6 外其所有顶点均落在凸体的边界上, 且 p_1p_2 平行于 v.

[4.4] 不妨假设沿 x 轴方向的半长平行四边形 $p_1p_2p_3p_4$ 是一矩形, 令 q_1q_2 (r_1r_2) 表示最长的水平 (垂直) 弦. 进而假设 q_1q_2 与 r_1r_2 的交点为原点. 对 $x_1^* < x_1 < 0 < x_2 < x_2^*$, $y_1^* < y_1 < 0 < y_2 < y_2^*$, 令 $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_1)$, $p_3 = (x_2, y_2)$, $p_4 = (x_1, y_2)$, $q_1 = (x_1^*, 0)$, $q_2 = (x_2^*, 0)$, $r_1 = (0, y_1^*)$, $r_2 = (0, y_2^*)$, 其中 $x_2^* - x_1^* = 2(x_2 - x_1)$. 由凸性, p_3 在弦 q_2r_2 的上方, 这就表明 $y_2 \geqslant y_2^*(1 - x_2/x_2^*)$. 类似地, 可得其他三个不等式, 综合以上不等式得到 $y_2^* - y_1^* \leqslant 2(y_2 - y_1)$.

[4.5] 设 $D(C)$ 表示 C 的差区域. 对任意集 $P \subseteq \mathbb{R}^2$, 证明 $\mathcal{C} = \{C + p \mid p \in P\}$ 是一填装, 当且仅当

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{D(C)}{2} + p \,\middle|\, p \in P \right\}$$

是一填装. 于是, 由推论 3.6 即得结论.

[4.6] 证明在任意最稠密的双格填装中, C 的一个拷贝接触 $-C$ 的四个拷贝, 且这四个交点构成一广延平行四边形.

第 5 章

[5.2] 利用两个凸集的交仍为凸集这一事实.

[5.4] 利用定理 5.5 的证明思路.

第 6 章

[6.1] (i) 对 d 用归纳法. 设 B 是半径为 $\sqrt{2}$ 且包含所有 c_i 的球. 首先证明可将所有点移至 B 的边界而不减小彼此间的距离. 假设 $c_1 = (\sqrt{2}, 0, \cdots, 0)$. 设 B' 为 B 与平面 $x_1 = 0$ 的交. 证明可将每个点 c_i $(i > 1)$ 映射到 B' 边界上的一点 c_i', 使得 $|c_i' - c_j'| > 2$.

[6.2] 设 $p, q \in C_{-\rho}$. 利用 C 的凸性证明球 ρB^d 与线段 pq 的 Minkowski 和含于 C.

[6.3] 设 $\{\varphi_i \mid i = 1, 2, \cdots\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的等距映射族, 且 $\{\varphi_i(C) \mid i = 1, 2, \cdots\}$ 形成一填装. 只须证明对于任一 $x \in \mathbb{R}^d$, 有

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(\varphi^{-1}(x)) \leqslant 1.$$

[6.4] 对推论 6.3 的证明中用到的密度函数应用定理 6.5, 且设 $\rho = r(C)$.

[6.6] 首先证明如果 p 为 C' 中元对应的闭 Dirichlet 胞腔的公共点, 则存在以点 p 为中心的球面通过 C' 的所有点. 再证明这个球的内部不含 C 的任何点.

[6.8] 设 S^d 为 $\mathbb{R}^d$ 中边长为 2 的正则单纯形. 证明任一顶点到 S^d 的形心的距离为 $\sqrt{2d/(d+1)}$.

[6.9] 从平面中密度非常接近于 1 的 (不等) 圆盘填装开始, 再将其转化为密度至多为 $1+\varepsilon$ 的覆盖. 此覆盖可扩展至 $\mathbb{R}^3$ 的一个全等球覆盖.

第 7 章

[7.1] 注意到 C 是对应的 Minkowski 空间中的单位球, 沿用命题 7.1 的证明.

[7.2] 利用紧性论证.

[7.3] (iii) 由 (ii) 可得;

(iv), (v) 由 (iii) 可得;

(vi) 分析乘积 $\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(i) \frac{1}{i^d}\right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^d}\right)$.

[7.4] (i) 仿照定理 7.7 的证明;

(ii) 考虑 C 与以 $\mathbf{0}$ 为中心以 R 为半径的大球的交.

[7.5] 利用分部积分法.

[7.6] 应用定理 7.11 及 Stirling 公式

$$d! \approx \sqrt{2\pi d}\left(\frac{d}{e}\right)^d .$$

[7.7] 假设 C 是严格凸的. 考虑 $\mathbf{0}, (x_1, \cdots, x_d)$, $(1, 0, \cdots, 0)$ 所生成平面与 C 的交, 利用本结论的平面情形.

[7.8] 不妨假设 $\|x_1\|_C = \|x_2\|_C = \|x_3\|_C = 1$. 还可设 (必要时作一线性变换)

$$\{(x, y) \mid |x| + |y| \leqslant 1\} \subseteq C \subseteq \{(x, y) \mid |x|, |y| \leqslant 1\}.$$

如果存在 $i \neq j$, 使得 x_i 与 x_j 之间的夹角至多为 $\pi/2$, 则 $\|x_i + x_j\|_C > 1$. 否则, 注意到对于所有的 $i \neq j$, $x_i + x_j$ 位于 $C + x_1 + x_2 + x_3$ 的边界上.

[7.9] 设 $a = \|x\|_{C,p}$, $b = \|y\|_{C,p}$. 选取 $u, v \in p\mathbb{Z}^d$ 满足 $(x-u)/a, (y-v)/b \in C$. 证明 $(x+y-u-v)/(a+b) \in C$. 须注意 $x+y$ 未必属于 $\mathbb{Z}_p^d$, 所以至此证明尚未证毕.

[7.10] 利用习题 1.7.

[7.11] (ii)~(iv) 对 n 用归纳法;
(v) 利用 (iv) 与习题 7.10.

[7.12] 考虑填装与圆柱底面平行的截面.

[7.13] (ii) 注意到最稠密的球的格填装中所有球的并集的余集含有无限多个圆柱.

[7.14] 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中单位球形成的最稀疏的格覆盖. 将每个球用半径为 $1-\varepsilon$ 的球替换. 未被覆盖的洞可被平行圆柱的离散集合覆盖, 继而这一集合又可被与半径为 $1-\varepsilon$ 的球体积相等的长椭圆体的平移 (有效地) 覆盖. 至此可利用习题 7.13 的结论 (i).

第 8 章

[8.1] 设 r_i 增大而 r_j 和 r_k 保持不变. 令 α, β 分别表示 $\angle v_j v_i v_k$ 与 $\angle v_i v_j v_k$. 由余弦定律,

$$\cos\alpha = 1 - \frac{2r_j r_k}{(r_i + r_j)(r_i + r_k)},$$
$$\cos\beta = 1 - \frac{2r_k}{r_j + r_k}\left(1 - \frac{r_j}{r_i + r_j}\right).$$

所以, $\cos\alpha$ 增大, 三角形 $v_i v_j v_k$ 的另外两个角的余弦减小.

[8.2] 设 $f(\mathbf{0}) = x$. 用反证法, 假设存在点 $y \in B^d$ 不属于 $f(B^d)$. 选取一个趋于 1 的单调增加的正实数序列 r_n $(n = 1, 2, \cdots)$, 令 $S(r) = \{p \in \mathbb{R}^d \mid |p - \mathbf{0}| = r\}$.

设 y_n 为 $f(S(r_n))$ 与线段 xy 的交点, 则对适当的 $p_n \in S(r_n)$, 有 $y_n = f(p_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 从而可选取一个无限子序列 $\{p_1, p_2, \cdots\}$ 收敛于 B^d 的一个边界点, 与假设矛盾.

[8.3] 令 $\overline{F}$ 表示所有顶点属于 $\overline{U} = V(G) - U$ 的面形成的集合. 因为这些面不构成顶点集 $\overline{U}$ 上的完全三角剖分, 由 (8.1) 有 $|\overline{F}| < 2|\overline{U}| - 4$, 即

$$2n - 4 - |F(U)| < 2(n - |U|) - 4\,.$$

[8.4] 用反证法, 假设 $|A(C)| \geqslant \dfrac{2}{3}n$. 令 G' 表示 C 的内部和 C 上的顶点所导出的 G 的子图. 首先证明对 C 中任意两个顶点都存在一条 G' 的最短路, 其边都在 C 中. 利用这一事实和最小性条件证明 C 恰有 $2k$ 个顶点, 其中 $k = \lfloor\sqrt{2n}\rfloor$. 这些顶点依次记为 $v_0, v_1, \cdots, v_{2k} = v_0$. 利用 Menger 定理 (Lovász, 1979) 证明在 $\{v_0, v_1, \cdots, v_k\}$ 与 $\{v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{2k}\}$ 之间存在 G' 的 $k+1$ 条顶点不交路, 记为 P_i $(0 \leqslant i \leqslant k)$, 其中 P_i 连接 v_i 与 v_{2k-i}. 因为 P_i 至少有 $\min\{2i+1, 2k-2i+1\}$ 个顶点, 从而 G' 的顶点数大于 n, 矛盾.

[8.5] (i) 按下述方式推广引理 8.4. 设 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 为有限集, 其元素具有非负权 $w(p)$, 且 $\sum\limits_{p \in P} w(p) = 1$. 证明存在点 $q \in \mathbb{R}^d$, 使得任意不含 q 的半空间 H 满足

$$\sum_{p \in H \cap P} w(p) \leqslant \frac{d}{d+1},$$

然后沿用定理 8.3 的证明;

(ii) 将 G 的每个度为 d_i 的顶点 v 替换为 $\lceil d_i/4 \rceil \times \lceil d_i/4 \rceil$ 网格, 如此构造图 G', 其顶点的度至多为 4. 对顶点 v_i 对应的网格的每个内部顶点赋以权 0, 并在其边界顶点之间均匀分配 $w(v_i)$. 对赋权图 G' 用 (i).

[8.6] 证明并利用 de Fraysseix 等 (1990) 给出的下述引理: 设 G 是三角剖分平面图, 其外部面为 uvw, 则可将 G 的顶点标号为 $v_1 = u, v_2 = v, v_3, \cdots, v_n = w$, 使得对任意 $k \geqslant 3$,

(a) 由 $v_1, \cdots, v_k$ 导出的 G 的子图 G_k 的外部面以含边 uv 的一个圈 C_k 为边界;

(b) v_{k+1} 位于 C_k 外部, 其邻点形成路 $C_k - uv$ 的一个至少含两个元素的子区间.

[8.8] 对平面图用 Euler 多面体公式, 证明存在一个度至多为 5 的顶点.

[8.9] 由引理 5.6, 只须证明结论对中心对称凸体成立. 证明任意中心对称凸体 C^* 的所有与 C 相接触的平移均包含在 $3C^*$ 中.

[8.10] 设 $C_1, \cdots, C_k$ 为中心对称凸体 C 的相互接触的平移, 其中心分别为

$O_1, \cdots, O_k$. 令 K 表示 $\{O_1, \cdots, O_k\}$ 的凸包 , m_{ij} 为 O_iO_j 的中点. 证明

$$K_i = \text{conv}\,(O_i \cup \{m_{ij} \mid 1 \leqslant j \neq i \leqslant k\}) \subseteq K \cap C_i\,,$$

且对每个 i, K_i 与 K 相似.

[8.11] 应用 Koebe 定理 (定理 8.1). 设 $\mathcal{C}$ 为实现一个三角剖分平面图 G 的圆盘填装. 证明可选取 $\mathcal{C}$, 使得对 $\mathcal{C}$ 的任意两个相邻圆盘, 较小半径与较大半径之比有下界, 该下界是仅依赖于 G 的最大度的常数.

[8.12] 设 G 为给定的图. 在同一顶点集上定义图 G', 两个顶点相邻, 当且仅当它们在 G 中相邻或在 G 中有一个公共邻点. 证明 G' 的色数至多为 d^2+1, 并将每个颜色类嵌入一个圆的短弧中.

[8.13] 令 $2\alpha_i$ 表示从 C 的中心出发与 C_i 相切的两条射线间的夹角 $(1 \leqslant i \leqslant k)$. 注意

$$r(C_i) = r(C)\frac{\sin\alpha_i}{1-\sin\alpha_i}.$$

证明 $\left(\dfrac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)^n$ 为 $(0,\pi/2)$ 中的凸函数, 并利用 Jensen 不等式.

[8.14] 证明对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$, 当 $\sum\limits_{j=1}^{i} e_j = \gamma i^2$ 时, 和 $\sum\limits_{j=1}^{n} 1/e_j$ 达到最小.

[8.15] 应用定理 8.9.

[8.16] (i) 考虑以有限个圆心的凸包的一个顶点为圆心的圆;
(ii) 考虑正十二面体的面的内切圆的球极平面投影.

[8.17] (i) 设 C 为单位正方形. 考虑填装 $\{C+(i,j) \mid i=0,1 \text{ 且 } j \in \mathbb{Z}\}$.

[8.18] 在 $\mathbb{R}^4$ 中构造一个有 120 个刻面的正多胞形 (Coxeter, 1962). 在到 $\mathbb{R}^3$ 的球极投影下这些刻面的内切球的象形成一个由 120 个非全等球构成的 12 相邻填装.

第 9 章

[9.1] 证明任意两个圈至多有一个公共顶点, 且图中的圈以类仙人掌样式连接 (图 9.2).

[9.2] 用反证法. 假设 G 不含 Hamilton 圈, 但添加一条新边 G 即成为 Hamilton 图, 在此意义下称 G 是极大图. 修改定理 9.1 的证明, 证明任意度 $\geqslant (n-1)/2$ 的顶点与每个度 $\geqslant n/2$ 的顶点相邻, 然后证明 G 有 Hamilton 圈, 推出矛盾.

[9.3] 利用习题 9.2.

[9.4] 定义图 G 如下: 令 $V(G) = V_1 \cup V_2, V_1 = \{1, 2, \cdots, \lfloor n^{2/3} \rfloor\}, V_2 = \{p \mid n^{2/3} \leqslant p \leqslant n,\ p \text{为素数}\}$; 对每个不是素数平方的数 n_i, 选取 $x, y \in V_1 \cup V_2$, 使得

$x \neq y$ 且 $xy = n_i$, 并在它们之间连一条边. 证明 G 不含圈.

[9.5] 设 V_1 和 V_2 为完全 $(r-1)$ 部图的两个部集, $|V_1| \geqslant |V_2| + 2$. 证明将 V_1 中的一个顶点转移到 V_2 后, 边数增加.

[9.6] (i) 利用 Turán定理 (定理 9.3) 和习题 9.5;
(ii) 对图 G 的补图用 (i).

[9.7] (i) 设 H 的有公共点的任意 k 个子集中都有两个子集, 其交至多含有 $d-1$ 个点. 对任意 x, 令 H_x 表示 H 的包含 x 的所有子集组成的子族. 由习题 9.6, 至少有 $|H_x|^2/(2k-2) - |H_x|/2$ 个对 $\{E_i, E_j\} \subset H_x$, $i \neq j$, 满足 $1 \leqslant |E_i \cap E_j| \leqslant d-1$. 另一方面, 任意这样的对至多属于 $d-1$ 个子族 H_x. 所以,

$$(d-1)\binom{m}{2} \geqslant \sum_x \left(\frac{|H_x|^2}{2k-2} - \frac{|H_x|}{2} \right),$$

由 Jensen 不等式即得结论;
(ii) 令 $N_G(x)$ 表示 $x \in V(G)$ 的所有邻点所成集合. 对集族 $H = \{N_G(x) \mid x \in V(G)\}$ 应用 (i), 其中 $m = n = |V(G)|$, $s = 2|E(G)|/n$, $d = \binom{k}{2} + k - 1$.

[9.8] 应用习题 7.8 和习题 9.6.

[9.9] 应用习题 9.8.

[9.10] 设 T 为 $V(G)$ 的最小子集, G 的任一条边至少与 T 的一个顶点关联. 注意任意顶点的度至多为 $\alpha(G)$.

[9.11] 如果 $|E(G)| > n^2/4$, 则由 Turán定理(定理 9.3) 知 G 含三角形. 如果 $|E(G)| = n^2/4$, 则不含三角形的图为完全二部图.

[9.12] 对 $n \geqslant r+2$, 选取最小度顶点 $x \in V(G)$. 设 $d_G(x) \leqslant \left\lfloor \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) n \right\rfloor$. 证明 $|E(G-x)| \geqslant |E(T_{r-1}(n-1))| + 1$, 对 n 用归纳法.

[9.13] 设 $\{(a_i, b_i, c_i),\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$ 为顶点不交三角形的极大集. 令 G_i 为 $V(G) - \bigcup_{j \leqslant i} \{a_j, b_j, c_j\}$ 的导出子图. 首先证明存在 i, 使得 $|E(G_{i-1})| - |E(G_i)| \geqslant cn$ 对某一常数 $c > 1$ 成立, 然后证明在 G_{i-1} 中有 $\approx (c-1)n/3$ 个三角形与 $\{(a_i, b_i), (b_i, c_i), (c_i, a_i)\}$ 的一条边关联.

[9.14] 设 (v_1, v_2, v_3) 为 G 中的三角形. 证明如果存在 $n+k$ 条边, 每条边至少与 v_1, v_2 和 v_3 中的一个关联, 则 G 至少有 k 个形如 (v_i, v_j, v_l), $1 \leqslant i, j \leqslant 3 < l$ 的三角形. 考虑由 $V(G) - \{v_1, v_2, v_3\}$ 导出的子图 G'. 如果 G' 至多有 $\lfloor (n-3)^2/4 \rfloor$ 条边, 则利用上述结论; 否则, 证明 G' 至少有 $\lfloor (n-3)/2 \rfloor$ 个三角形.

[9.15] 两次 (对 n 和 $n-2$) 应用 Turán定理 (定理 9.3), 证明在所有具有 n 个顶点不含三角形的图中, $T_2(n)$ 所含不交边对的个数最大. 注意任意一对不交

边至多包含在一个长为 4 的圈中.

[9.16] 设 $|V(G)|=n$. 随机选取一个 $\lfloor n/2\rfloor$ 元子集 $V_1\subseteq V(G)$. 证明连接 V_1 和 V_2 的期望边数为

$$\sum_{xy\in E(G)} 2\binom{n-2}{\lfloor n/2\rfloor-1}\Big/\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\geqslant |E(G)|/2.$$

[9.17] 利用定理 9.5 证明中求得的估计.

[9.20] 如设 $c=4$, 取定将 X 的所有 k 元组划分为 4 部分 C_i $(1\leqslant i\leqslant 4)$ 的划分. 如果 $|X|\geqslant n_0(n_0(r,k),k)$, 则定理 9.13 表明, 存在 $n_0(r,k)$ 元子集 $X'\subseteq X$, 其所有 k 元组或属于 $C_1\cup C_2$, 或属于 $C_3\cup C_4$. 在每种情形下, 再次应用定理 9.13 即得结论.

[9.21] (i) 令 $G_0=G$. 假设已经定义了无限子图 $G_i\subseteq G$. 任取 $x_i\in V(G_i)$. 根据 x_i 在 G_i 中是否有无限个邻点, 令 G_{i+1} 为与 x_i 相邻 (不相邻) 的顶点导出的 G_i 的子图;

(ii) 用反证法. 假设对任何 n, 存在顶点集 $\{1,\cdots,n\}$ 上的图 G_n, 不含 r 个顶点的完全子图或空子图. 定义 $\mathbb{N}$ 的无限子集形成的一个嵌套序列 $N_1\supseteq N_2\supseteq N_3\supseteq\cdots$, 使得对每个 $n\in N_i$, G_n 在 $\{1,\cdots,i\}$ 上的限制相同. 这些限制"收敛"于 (i) 的一个反例.

[9.22] 设 $V_1=\{v_1,v_2,\cdots\}$, $V_2=\{w_1,w_2,\cdots\}$, $E(G)=\{v_iw_j\mid i\leqslant j\}$.

[9.23] 对 $k=2$ 应用定理 9.13, 其中 $X=\{x_1,x_2,\cdots\}$; 对 $i<j$, 如果 $x_i\leqslant x_j$ $(x_i>x_j)$, 则 $\{x_i,x_j\}$ 属于第一 (第二) 类.

[9.24] 令 $R_k(r,s)$ 为具有下述性质的最小正整数 n: 对 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有 k 元组的任意红蓝 2 着色, 存在一个 r 元集, 其所有 k 元组为红色; 或存在一个 s 元集, 其所有 k 元组为蓝色. 证明, 对任意 $r,s>k$, 有

$$R_k(r,s)\leqslant R_{k-1}(R_k(r-1,s),R_k(r,s-1))+1.$$

[9.25] (i) 令 U_i $(1\leqslant i\leqslant k_r(G))$ 和 V_j $(1\leqslant j\leqslant k_{r-1}(G))$ 表示 $V(G)$ 的 r 元子集和 $(r-1)$ 元子集, 它们导出 G 的完全子图. 令 u_i 表示含 U_i 的 K_{r+1} 的个数, v_j 表示含 V_j 的 K_r 的个数. 令 N 表示形如 (U_i,W) 的对的个数, 其中 W 为 $V(G)$ 的不能导出 K_r 的 r 元子集, 且 $|U_i\cap W|=r-1$. 证明

$$\sum_{i=1}^{k_r(G)}(r-1)(n-r-u_i)\leqslant N\leqslant\sum_{j=1}^{k_{r-1}(G)}v_j(n-r+1-v_j);$$

(ii) 利用 (i), 用归纳法证明

$$\frac{k_r(G)}{k_{r-1}(G)} \geqslant \frac{x-r+1}{xr}n.$$

[9.26] 几乎与定理 9.19 的证明完全相同.

[9.27] 对 $r=3$ 利用习题 9.26. 要证 $d_4 = 1/\sqrt{2}$, 只须证明任意 4 点集确定一个非锐角三角形.

[9.28] 对任意 $c < c_r^*(P)$, 构造图 G_c 如下, 令顶点集 $V(G_c) = P$, 两点相邻当且仅当其距离大于 c. 对 G_c 应用习题 9.19.

[9.29] 只须证明当 $r = 4$ 时断言成立.

第 10 章

[10.1] (i) 假定对所有的 $0 \leqslant i < j \leqslant k$ 有 $|p_i - p_j| = 1$. 证明向量 $\overrightarrow{p_0p_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 线性无关;

(ii) 不能. 利用 Ramsey 定理 (定理 9.13) 及 (i).

[10.2] (i) 对于任意固定的 $p_1, p_2 \in P$, 所有其他的点 $p \in P$ 均具有下述性质: $|p - p_1| - |p - p_2|$ 是一整数, 其绝对值至多为 $|p_1 - p_2|$. 因此, $P - \{p_1, p_2\}$ 中所有的点落在有限多条双曲线或直线上. 注意到两条不同轴的双曲线至多有 4 个公共点;

(ii) 设 α 使得 $\tan\alpha$ 是有理数, 而 α/π 是无理数. 令点 p_i 的极坐标为 $\rho(p_i) = 1$, $\varphi(p_i) = 2i\alpha$ $(i = 1, 2, \cdots)$;

(iii) 由 (ii) 可得.

[10.3] 单位距离图由路、边、孤立顶点组成.

[10.4] 推广定理 10.5 的证明.

[10.5] 注意到任意两个不交的凸体至多有 4 条公共切线.

[10.6] 只要证明对任意选定的下标 $p_i - p_j$ 与 $q_g - q_h$ 正交即可. 注意到如果 $i \neq j$, 则 q_g 与 q_h 落在 p_i 与 p_j 的垂直平分超平面上.

[10.7] 将 H 随机分解成 k 部分, 证明满足要求的 k 元组的期望值是 $(k!/k^k)|E(G)|$.

[10.8] (i) 利用定理 10.12;

(ii) 用 (i) 及定理 10.2 证明结论对 $k = 4$ 成立.

[10.10] 设 P 为平面 n 点集. 对任意 $1 \leqslant \ell \leqslant k+2$, 定义图 G_ℓ, $V(G_\ell) = P$, 其两顶点以一条边连接, 当且仅当它们之间的距离属于区间 $[d_\ell, d_\ell + c\sqrt{n}\,]$. 利用 Szemerédi 正则性引理 (定理 9.16)的如下推广: 对任意 $0 < \delta < 1$ 及任意自然数 m, 存在 n_0 与 M, 使得 P 能被分解成 m' 个尽可能相等的类 $P_1, \cdots, P_{m'}$, 其中 $m \leqslant m' \leqslant M$, 且在每一个 G_ℓ $(1 \leqslant \ell \leqslant k+2)$ 中, 除至多 $\delta m'^2$ 个对以外, 所有的点对都是 δ 正则的. 然后利用引理 9.17, 按定理 10.14 的证明步骤证明.

[10.11] 见定理 10.14 证明中的断言 B.

第 11 章

[11.1] (i) 假设不存在寻常交叉点. 选取一条直线 $\ell \in \mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}$ 的直线的交点中与 ℓ 最近的交点 $p \notin \ell$ (图 A.1). 由此证明存在另一个交点 $q \neq p$ 使得 $d(\ell, p) > d(\ell, q)$, 从而推出矛盾;
(ii) 对 n 用归纳法.

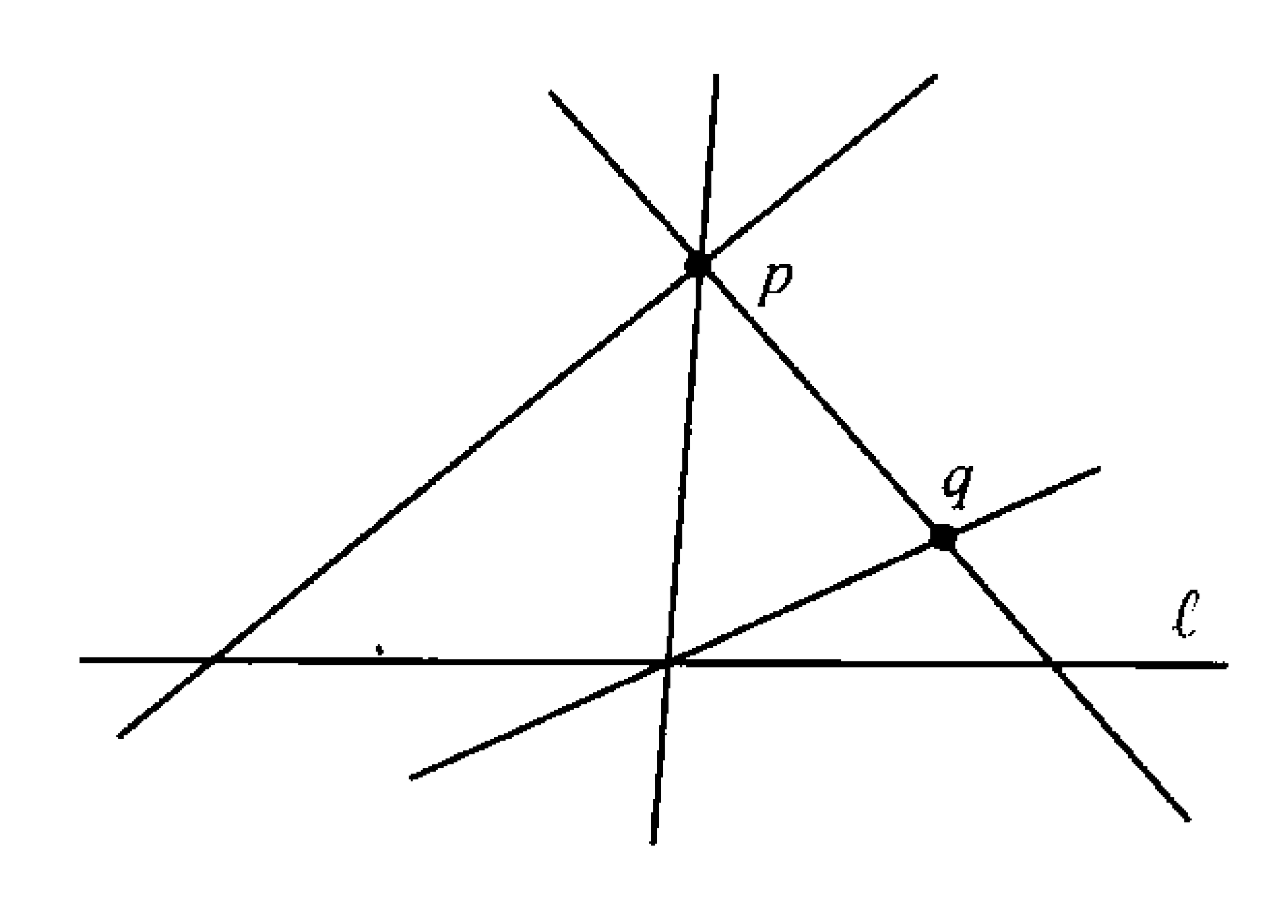


图 A.1 习题 11.1(i) 解答图示

[11.2] (i) 可以假设每条直线 $\ell \in \mathcal{L}$ 与其他直线至少有 3 个不同的交点. 若两个这样的交点属于同一直线 ℓ, 且位于直线 ℓ 上的所有其他交点或都在这两点之间, 或都不在它们之间, 则称这两点为**近邻 (点)**. 若直线 ℓ 恰好含 p 的两个近邻, 则令寻常交叉点 p 与 ℓ (未必含包 p) 相对应. 注意到任一寻常交叉点至多与 6 条直线相对应. 证明若与直线 ℓ 相对应的寻常交叉点少于 3 个, 则 ℓ 恰含 2 个寻常交叉点. 若恰含 2 个寻常交叉点的直线少于 $3n/7$ 条, 则对使得 p 与 ℓ 相对应的对 (p, ℓ) 的个数进行重复计数.

[11.3] 对 C 的每条边 s_i, 令 F_i 表示 $\mathcal{A}(\mathcal{L}) \cap C$ 中与 s_i 相交的面的集合, $\mathcal{L}_i \subseteq \mathcal{L}$ 表示与 s_i 相交的直线集. 称 F_i 的一个面的一条边是**红边**, 若该边落在 $\mathcal{L}_i$ 的一条直线上; 否则, 称之为**蓝边**. 分别求红边数和蓝边数的界. 求蓝边数的界用 Turán定理(定理 9.3).

[11.4] 利用引理 11.1.

[11.5] 利用 Jensen 不等式.

[11.6] 证明被加数等于 Δ 是一个恰好与一条直线 $\ell \in \mathcal{R}$ 相遇的梯形这一事件的概率, 且 $\Delta = \Delta_{\mathcal{R}-\{\ell\}}$. 因此和式等于这些梯形的期望值. 证明对 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$ 的任一选取, 这些梯形的实际个数至多为 4.

[11.7] (i) 与边 $q_{(i-1)d}q_{id}$ 的内部相交的直线与顶点 q_j 关联, 其中 $(i-1)d < j < id$;
(ii) 证明如果一条端点不是配置顶点的线段 pq 与 $\mathcal{L}$ 的 m 条直线相交, 那么 | 位级 $(p)-$ 位级 $(q)| \leqslant m$. 还应利用下述事实: 在 k 位级线的一个顶点

的充分小的邻域内, 顶点的位级在 $k-1$ 和 $k+2$ 之间.

[11.8] (i), (ii) 利用 Möbius 反演公式 (见习题 7.3);

(iii) 证明

$$\sum_{r=1}^{k}\frac{\phi(r)}{r^2}\geqslant \log k\sum_{r=1}^{k}\frac{\mu(r)}{r^2}-c_1 \text{ 和 } \sum_{r=1}^{k}\frac{\mu(r)}{r^2}\geqslant c_2\,,$$

其中, c_1, c_2 是正的常数.

[11.9] 对直线稍作扰动使所得直线配置是简单的.

[11.10] 对每条直线 ℓ_i, 作 $\left\lceil nw_i/\sum_{j=1}^{n}w_j\right\rceil$ 个 ℓ_i 的拷贝, 利用定理 11.6 构造多重直线集的一个划分.

[11.11] 随机选取含 $r\approx n/k$ 条直线的子集 $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{L}$. 给出用 $H_{\leqslant k}(\mathcal{L})$ 表示的 $H_0(\mathcal{R})$ 的期望值的一个下界, 并利用 $H_0(\mathcal{R})\leqslant r$.

[11.12] 令 $D_k(\mathcal{L})$ 表示满足要求的圆盘个数. 首先证明 $D_0(\mathcal{L})=\binom{n-1}{2}$ 等于配置 $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ 中有界胞腔的个数, 然后证明对每个 k,

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n-j-3}{k-j}D_j(\mathcal{L})=\binom{n}{k}\binom{n-k-1}{2}.$$

[11.13] 利用推论 11.8.

[11.15] (ii) 设 $f(n,d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中 n 个超平面的配置中丰富胞腔的最大个数. 证明递推关系

$$f(n,d)\leqslant f(n-1,d)+f(n-1,d-1)\,.$$

为证明这一界的紧性, 取 $(d+1)$ 维 **矩曲线** $M(t)=(t,t^2,\cdots,t^{d+1})$ 的 n 个点 (向量), 考虑经过原点且与这些向量垂直的 d 维超平面. 用另外一个 d 维超平面切割这些超平面形成的配置.

第 12 章

[12.1] 令 $k=\lfloor\sqrt{\log n}\rfloor$. 考虑整数网格的大小为 $\lceil n/k\rceil\times k$ 的部分. 证明存在 cn^2 个面积为 $k!/2$ 的三角形有一条水平边. 考虑所有其他具有相同面积的三角形 (如同定理 12.3 第二部分证明中那样), 即得一个下界 $cn^2\log\log n$.

[12.2] 设 S 是一平面 n 点集. 固定 S 中一点 p. 对任一其他点 q, 令 ℓ_q 表示 pq 的垂直平分线. 利用推论 11.8 给出直线 ℓ_q $(q\in S-\{p\})$ 与 $S-\{p\}$ 的点之间关联数的一个上界.

[12.3] (i) 定义一个 4 均匀超图 H, 其顶点集为 $V(H)=S_n$, 其边或者是含 3 个共线点的四元组, 或者是由确定两条平行线的不交点对构成的四元组. 用习题 11.8(iii) 证明这两种四元组的个数的上界为 $cn^3\log n$, 然后利用定理 10.11;

(ii) 设 $P\subseteq S_n$ 是具有命题所要求的性质的 m 点集. 对任意整数 k 和 $r\leqslant\sqrt{n}/k$, S_n 可被“子网格”

$$S^{k,r}=\{(rx,ry)\mid 0\leqslant x,y<k\}$$

的大约 n/k^2 个不交的平移所覆盖. 设 m_i $(i=1,2,\cdots)$ 为这些平移中 P 的点的个数, 证明由属于同一平移的 P 的点对确定的斜率总数是

$$\sum\binom{m_i}{2}\geqslant\frac{c(mk)^2}{n},$$

变动 r 的取值.

[12.4] 对任一点对 $\{p,q\}$, 考虑使三角形 pqr 满足要求的点 r 的轨迹. 证明这些曲线属于自由度为 2 的曲线族, 并应用定理 12.6.

[12.5] (i) 试求与下列点张成的单纯形位似的单纯形的个数:

$$(0,0,\cdots,0),(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1).$$

从 P 中删去使 $x_1+x_2+\cdots+x_d$ 最大的所有点, 并应用归纳法.

[12.6] 令 $T=\Delta abc$, 且 ϕ 是平面的保持方向的相似变换, $\phi(a)=a$, $\phi(b)=c$. 设 P_1 (P_2) 表示将边 bc (ac) 划分成 m 个相等部分的点的集合. 考虑集合

$$\{a\}\cup P_1\cup P_2\cup\{\phi(p)\mid p\in P_1\}.$$

[12.7] 固定 $s>2/\varepsilon$, $K=\left\lfloor\dfrac{n^{1/s}-1}{2}\right\rfloor$, 考虑集合

$$P=\left\{\sum_{i=0}^{s-1}k_i\alpha^i\mid k_i\in\mathbb{Z},\text{对每个 }i,\ |k_i|\leqslant K\right\}.$$

[12.8] 对 $1\leqslant i\leqslant k=\left\lceil\dfrac{2\pi}{\varepsilon/2}\right\rceil$, 构造一组正方形网格

$$\Lambda^i=\{n_1v_1^i+n_2v_2^i\mid n_1,n_2\in\mathbb{Z}\},$$

其中 v_1^i 是方向为 $\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}(i-1)\varepsilon/2}$ 长度为 1/2 的向量, v_2^i 是与 v_1 正交的长度为 1/2 的向量. 对每个 i, 计算点 $p\in P$ 的个数, 要求从 p 出发方向为 v_1^i 的射线至多与格 Λ^i 的 c/ε 个非空正方形相交; 再对每个点 p, 计算具有上述性质的指标 i 的个数.

[12.9] (i) 应用定理 10.12;

(ii) 设 P_1 为 x_1x_2 平面中单位圆上的 $\lfloor n/3 \rfloor$ 点集, $P_2 = \{(0,0,i,0) \mid 1 \leqslant i \leqslant n/3\}$, $P_3 = \{(-1,0,0,i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n/3\}$. 令 $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$.

[12.10] 设 $C_i' = C_i + \frac{1}{2}B^2$, 其中 B^2 表示以 $\mathbf{0}$ 为中心的单位圆盘. 证明两个扩大集 C_i', C_j' $(i \neq j)$ 的边界至多交于两个点.

[12.11] 证明在 $\mathbb{R}^3$ 中 m 个点与 n 个单位球面之间的最大关联数至多为 $c(m^{5/7}n^{6/7} + n\sqrt{m} + n)$. 为此, 设 σ_i 表示含第 i 个点的单位球面的个数, 利用定理 11.10 求 $\sum_{i=1}^{m} \binom{\sigma_i}{2}$ 的上界.

[12.12] 在平面中的平行线上取两个 P 的全等拷贝, 记为 P_1 和 P_2. 注意到 P_1 的 $\lfloor \varepsilon n \rfloor$ 元子集与 P_2 的一个子集相似, 当且仅当存在适当的中心将两者中的一个投影到另外一个. 用推论 11.8 证明这样的中心的个数不可能超过 $C'n$.

第 13 章

[13.1] 利用图 A.2 所示 Reuleaux 三角形, 其中多边形 $a_1b_1c_1a_2b_2c_2a_3b_3c_3$ 的每一个顶点与另外三个顶点等距离.

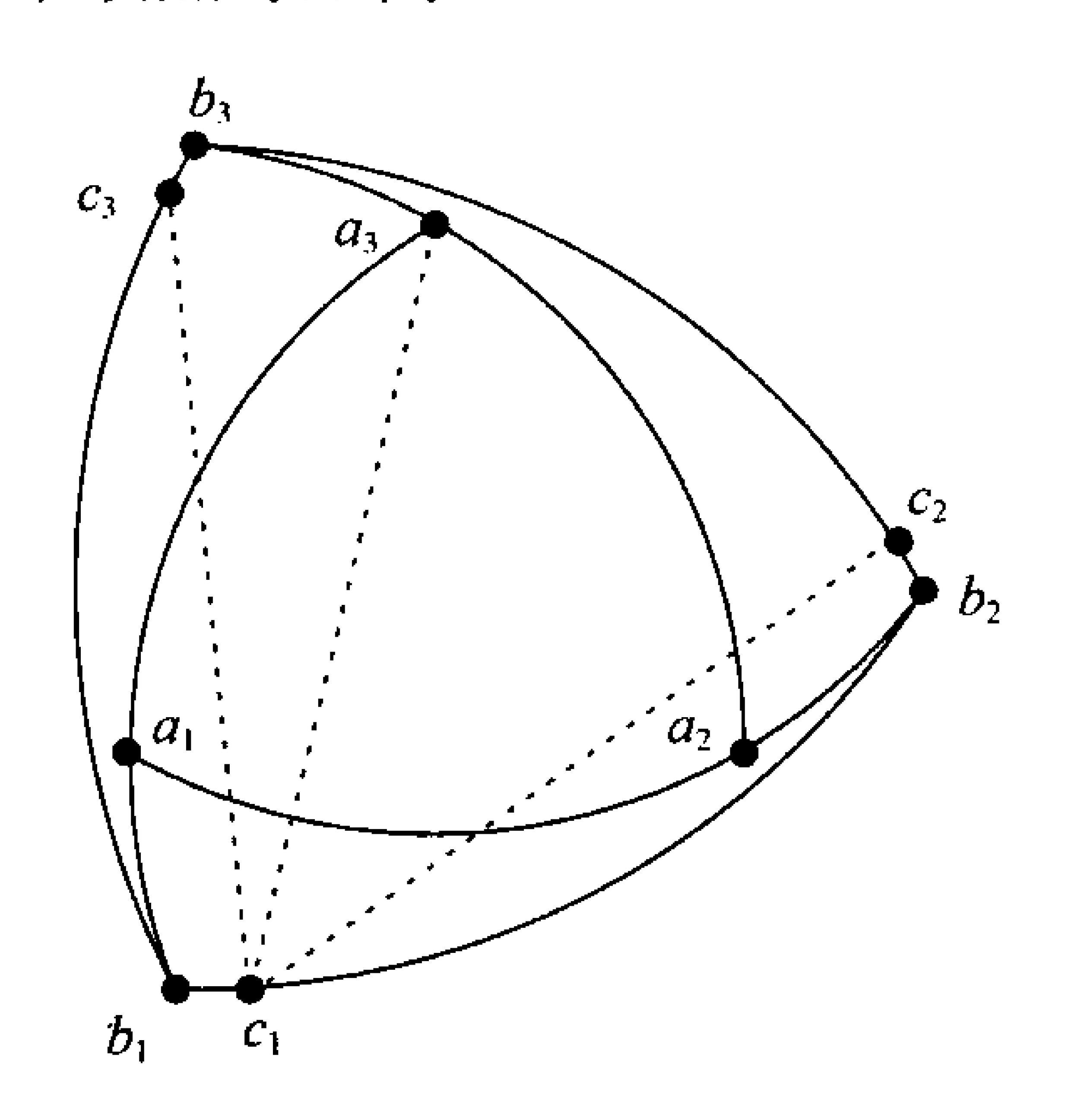


图 A.2 习题 13.1 解答图示

[13.2] 设 $c(q)$ 表示以 p 为圆心且过点 $q \in C$ 的圆. 注意到 $c(q)$ 在点 q 的切线与 pr 相交.

[13.4] 假设 C 的中心为原点. 在每一点 $(2i, 0)$ $(i \geqslant 1)$ 处放置一单位圆盘, 并将其扩张成单位圆盘形成的最稠密的六角填装. 设 $\mathcal{C}$ 为此填装落在张角为 $2\pi/n$ 的锥内的部分, 锥的锥顶为原点, 对称轴为 x 轴. 将 $\mathcal{C}$ 绕原点以角 $2\pi/n$ 旋转 n 次, 取旋转所得填装的并. 将其扩大为最大的填装, 并令 n 趋于无穷大.

[13.5] 设 $P(n)$ 为满足条件的 n 个点的构形. 设 $P(2n)$ 为 $P(n)$ 与 $P(n)$ 的沿某一般方向单位距离平移的并.

[13.6] (i) 对任何 $p \in C$, 设 p^+ (p^-) 表示 $\operatorname{conv} C$ 的按顺时针方向 (逆时针方向) 与 p 相邻的顶点. 设 $pq \in E(G_k)$. 如果 $|p^+ - q|(|p - q^-|)$ 大于 $|p - q|$, 则称边 p^+q (pq^-) **覆盖** pq. 选取一最大序列 $p_1q_1 = pq, p_2q_2, \cdots, p_jq_j$, 使得对每一个 $i < j$, $p_{i+1}q_{i+1}$ 覆盖 p_iq_i. 显然, $j \leqslant k$. 称边 $p_jq_j \in E(G_k)$ 为边 pq 的一个**控制边**. 对任意 $p \in C$, 令 $p_{\min}$ 与 $p_{\max}$ 表示 p 在 G_k 中按顺时针方向的最近近邻和最远近邻, 选取 p 使得 $\|p_{max}p\|$ 最大, 这里 $\|p_{max}p\|$ 表示 $\operatorname{conv} C$ 中按顺时针方向落在 $p_{\max}$ 之后 p 之前的边数. 设 uv 为 $p_{\min}p$ 的控制边, q 表示按逆时针方向从 v 开始的第 k 个顶点, $v'u'$ 是 $qq_{\max}$ 的一个控制边 (图 A.3), 则

$$\begin{aligned}||p_{min}p_{\max}|| &= ||p_{\min}u|| + ||uq_{\max}|| + ||q_{\max}p_{\max}|| \\ &\leqslant (k - 1 - ||vp||) + (k - 1) + (||vp|| + k) = 3k - 2;\end{aligned}$$

(ii), (iii) 从 C 中删去 $G_k(C)$ 的任一度至多为 $3k - 1$ 的顶点, 然后利用归纳法.

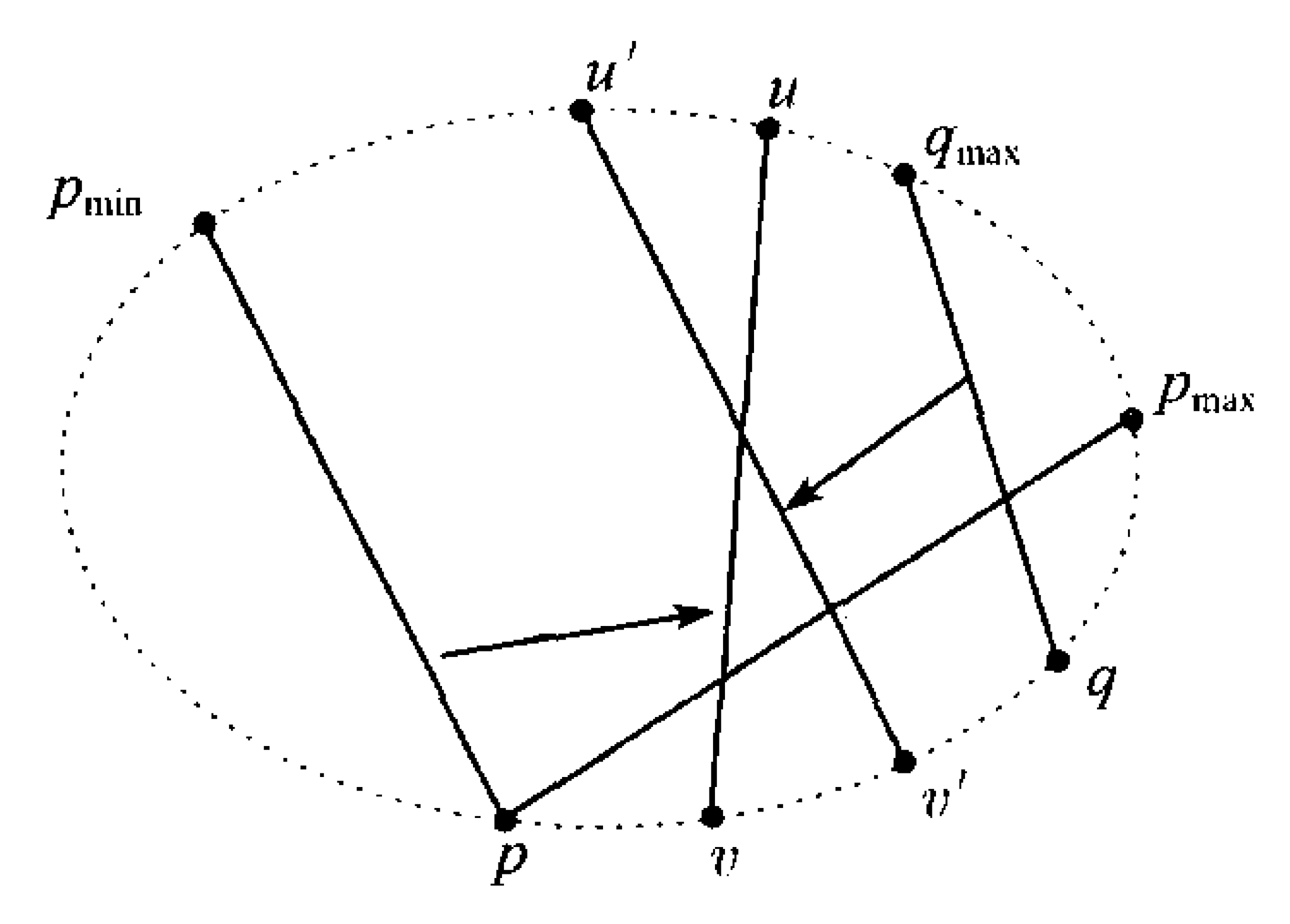


图 A.3 习题 13.6 解答图示

[13.7] (i) 利用平面图的可 4 着色性;

(ii) 见图 A.4.

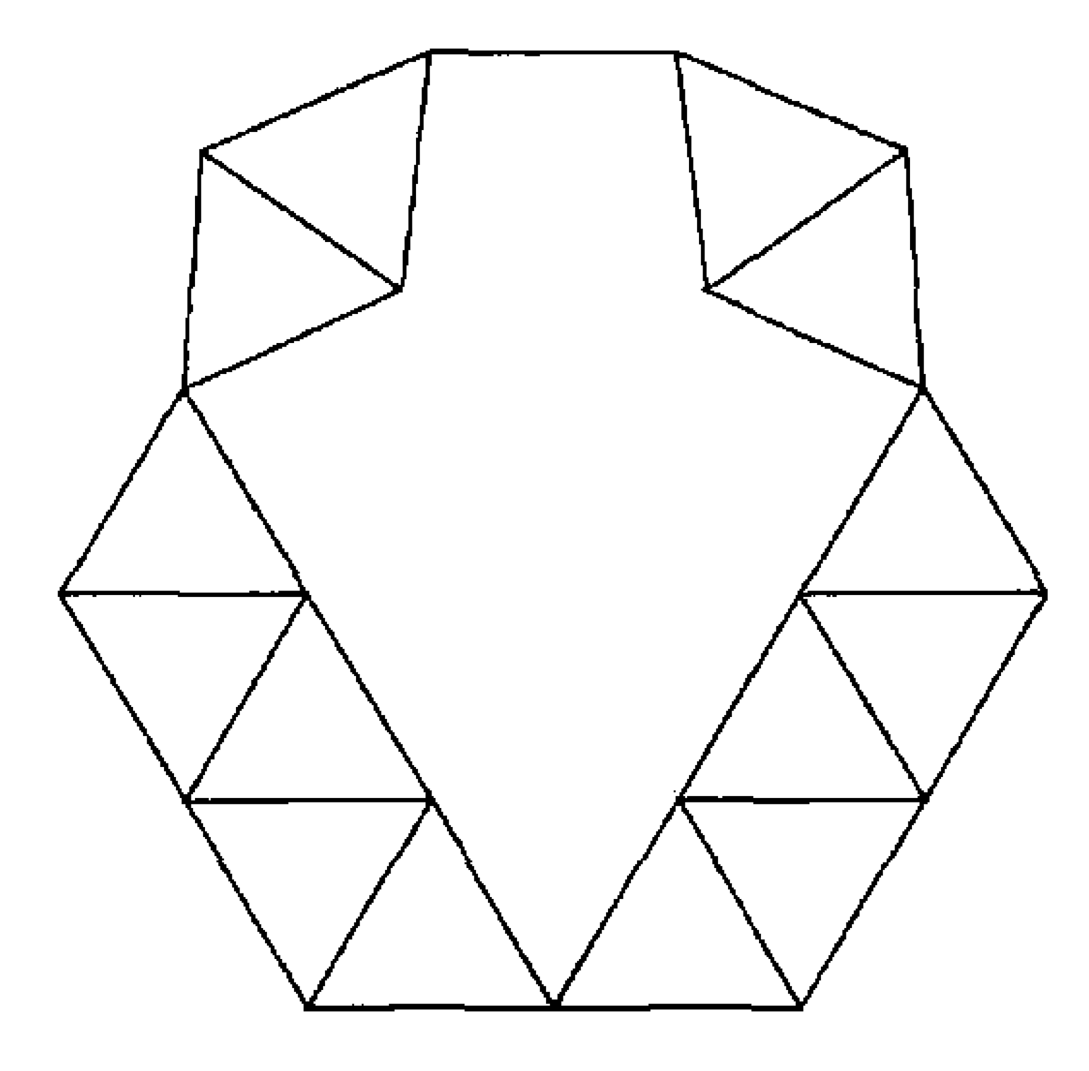


图 A.4 习题 13.7(ii) 解答图示

[13.8]　利用由相等圆盘构成的正则六角填装的中心 (见图 13.4).

[13.9]　(i) 如果 p_j 是 p_i 的最远近邻, 称数对 (i,j) 为**最远近邻对**. 设 d_i 表示 p_i 与其最远近邻的距离, D_i (C_i) 表示以 p_i 为圆心, d_i 为半径的圆盘 (圆). 假设对所有 i 有 $d_i \leqslant d_{i+1}$. 如果对某 $i' < i$ 有另一个最远近邻对 (i',j), 则对最远近邻对 (i,j) 做一标记. 如果 (i,j) 是有标记的对, 则 p_j 是 C_i 与 $\bigcup\limits_{k<i} D_k$ 的边界的交点. 证明至多存在两个这样的交点. 事实上, 如果格外细致的话, 可以证明

$$\Phi(n) = \begin{cases} 3n-3, & n \text{ 是偶数}, \\ 3n-4, & n \text{ 是奇数}; \end{cases}$$

(ii) 证明如果 $p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_m}$ 是按顺时针方向排列的 p_i 的最远近邻, 则 $p_{i_2}, \cdots, p_{i_{m-1}}$ 不能再是 P 中任何其他点的最远近邻.

[13.11]　利用 Lenz 结构 (图 10.4).

[13.12]　显然, 每一个距离 $d_i(n)$ 均出现在 $(0,0)$ 与三角形区域

$$T_n = \{\,(i,j) \mid 0 \leqslant j \leqslant i < n\,\}$$

中的某点之间. 设 π 表示 $\mathbb{R}^2$ 到一直线上的正交投影, 此直线过原点且斜率为 $1-\varepsilon$, 其中 $\varepsilon > 0$ 非常小. 按原点到 $\pi(p)$ 的距离对点 $p \in T_n$ 排序. 证明对每一个 $i < n$, 点 $(0,0)$ 与排序中第 i 个最大元之间的距离为 $d_i(n)$.

[13.13]　设 I 表示由 P 中的三元组张成的等腰三角形的个数. 由定理 13.7 的证明, 可得

$$\sum_{i=1}^{k} n\binom{2s_i/n}{2} \leqslant I \leqslant 2\binom{n}{2},$$

由 Jensen 不等式即得结论.

[13.14]　定义 P 的一胞腔剖分如下: 对 P 的每一个顶点 v 分配 P 的一个子集, 子集中任一点到 v 比到其他任何顶点更近. 对 P 的顶点集应用推论 13.15.

[13.15]　应用线性代数方法. 设 $V(H) = \{v_1, \cdots, v_n\}$, $E(H) = \{E_1, \cdots, E_m\}$. 对任意 $1 \leqslant j \leqslant m$, 令 $x_j = (x_{j1}, \cdots, x_{jn})$, 这里如果 $v_i \in E_j$ 则 $x_{ji} = 1$, 如果 $v_i \notin E_j$ 则 $x_{ji} = 0$. 于是 $\langle x_j, x_k \rangle \equiv 0 \pmod 2$, 除非 $j = k$. 证明向量 x_j 在域 $\mathrm{GF}(2)$ 上线性无关.

[13.16]　应用线性代数方法. 设 $V(H) = \{v_1, \cdots, v_n\}$, $E(H) = \{E_1, \cdots, E_m\}$, $|E_1| \leqslant |E_2| \leqslant \cdots \leqslant |E_m|$. 对任意 $1 \leqslant j \leqslant m$, 设 $a_j = (a_{j1}, \cdots, a_{jn})$, 这里如果 $v_i \in E_j$, 则 $a_{ji} = 1$; 如果 $v_i \notin E_j$, 则 $a_{ji} = 0$. 设 f_j 是 n 个变元 $(x_1, \cdots, x_m) = x$ 的多项式, 定义为

$$f_j(x) = \prod_{\substack{t \in T \\ t < |E_j|}} (\langle a_j, x \rangle - t) .$$

注意到, 如果 $k < j$, 则 $f_j(a_k) = 0$, 但 $f_j(a_j) \neq 0$. 设 $\hat{f}_j$ 表示由 f_j 通过多次应用关系式 $x_1^2 = x_1, \cdots, x_n^2 = x_n$ 所得到的多重线性多项式. 证明多项式 $\hat{f}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关.

[13.17] 为了确立下界, 要证明在最小距离图中不存在这样的顶点, 其度为 5, 且其所有近邻以及第二近邻的度也均为 5. 至于上界, 考虑一正方形格的变形.

第 14 章

[14.1] (ii) 证明在点集中表示最大距离的两条线段必相交.

[14.2] 如果 G 中存在一个顶点 x 只与一条边 $e \in E(G)$ 关联, 则令 $f(e) = x$ 并从图中删去 x. 如果每个顶点的度至少为 2, 则将每个尖顶点分配给与之关联的最左边 (术语参见定理 14.3 的证明).

[14.3] 推广图 A.5 所示构造. 图中所示为 $n = 9$ 个顶点的几何图.

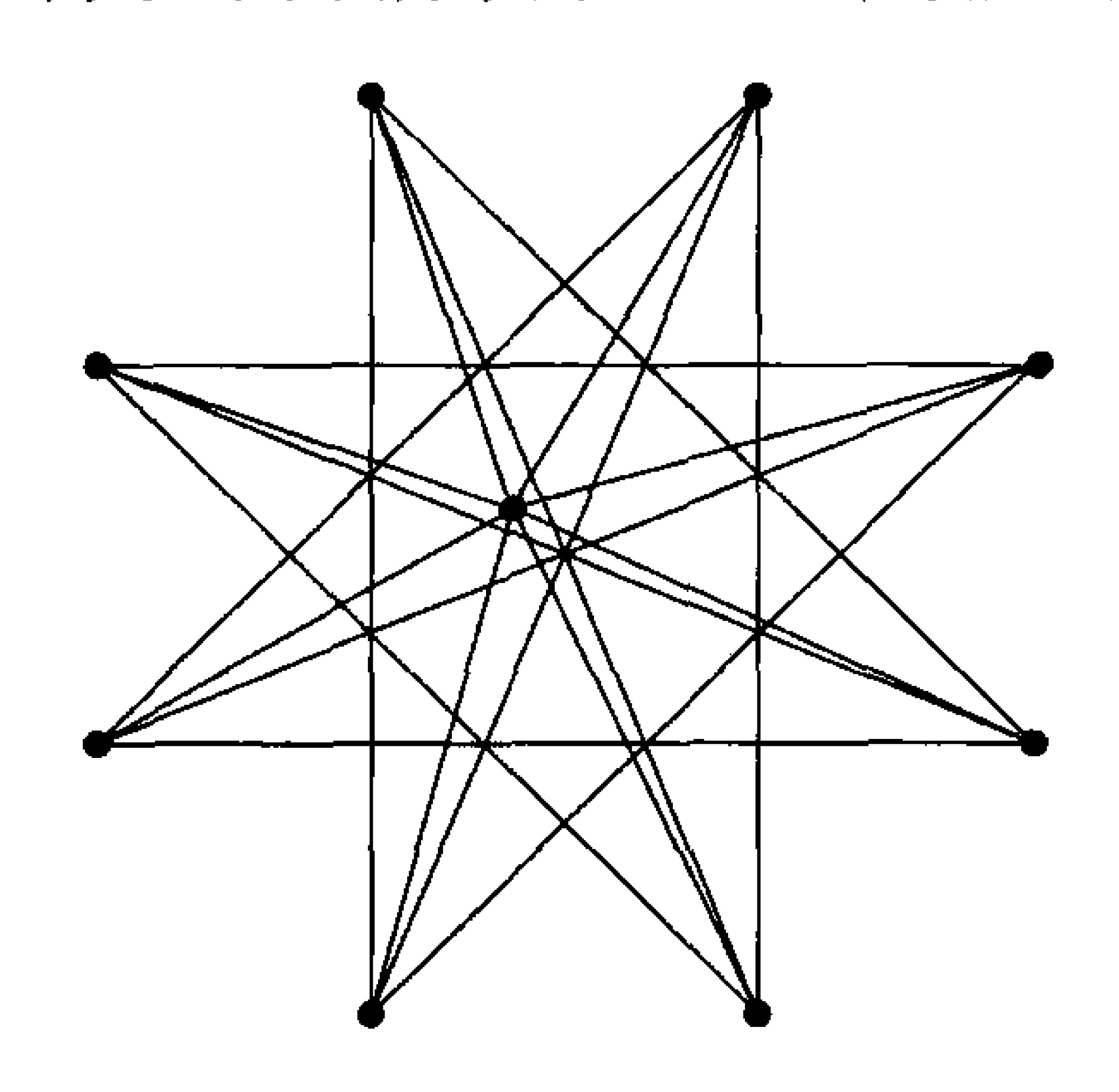


图 A.5 习题 14.3 解答图示

[14.4] 令 $x_1, \cdots, x_n$ 按顺时针方向表示一个凸 n 边形的顶点. 对 $i < j$, x_i 与 x_j 之间连一条边, 当且仅当 $j \leqslant 2k + 1$ 或 i 为不超过 $2k$ 的偶数.

[14.5] 将一个凸 n 边形的顶点集尽可能均匀地分解为 $k - 1$ 个由相继顶点组成的子集 $V_1, V_2, \cdots, V_{k-1}$, 以一条线段连接两个顶点, 当且仅当两者属于不同的子集.

[14.6] 令 $\binom{X}{r}$ 表示 X 的所有 r 元子集组成的集族. 要证明 (i), 只须证对任意 $r < n/2$, 存在 $\binom{X}{r}$ 与 $\binom{X}{r+1}$ 的一个子集间的双射 (匹配)f, 使得对任意

$A \in \binom{X}{r}$, 有 $f(A) \supseteq A$. 要证明这一点, 如可以利用**Hall 婚姻定理**(1935): 设 G 为定义在顶点集 $V_1 \cup V_2$ 上的二部图. 存在 V_1 与 V_2 的一个子集间的匹配, 当且仅当对每个 $U \subseteq V_1$, V_2 中与 U 的至少一点相邻的顶点个数至少为 $|U|$.

[14.7] (i) 仿照定理 14.10 的证明;

(ii) 构造五条单位线段 x_iy_i $(0 \leqslant i \leqslant 4)$, 使得对某个充分小的 $\varepsilon > 0$ 有 $\max\limits_{i,j}(|x_i - x_j|, |y_i - y_j|) < \varepsilon$; x_iy_i 与 x_jy_j 相交当且仅当 $|j-i| \equiv \pm 1 \pmod 5$. 将每条线段替换为与上述构造类似的五条线段, 然后用归纳法继续证明.

[14.8] 根据推论 14.13 对 k 用归纳法.

[14.9] (i) 如果凸 n 边形边界上所有边都着同一颜色, 则结论成立. 否则, 删去与着色互异的两条边关联的一个顶点, 然后用归纳法证明;

(ii) 用与 (i) 中类似的方法, 只是这里每次同时删去一个点与它的两个邻点.

[14.10] (i) 令 $f(G)$ 表示凸几何图 G 中由两两交叉边组成的 $(k+1)$ 元组的个数. 注意到

$$(n-2k-2)f(G) = \sum_{v \in V(G)} f(G-v)\,,$$

类似于定理 14.12 的证明, 对 n 用归纳法证明.

[14.11] 在基础集 $\mathcal{B}$ 上定义少数几个偏序, 使得 $\mathcal{B}$ 中两个集合的交不含 P 中点时, 这两个集合至少对一个偏序中是可比的. 每个这样的偏序应满足下述条件: 如果存在长为 $n+1$ 的链, 则 (a) 成立. 利用定理 14.10 的证明思想.

[14.12] 假设任三条弧无公共内点. 令 p 和 q 为弧 γ_1 和 γ_2 的两个相继交点. 用下述方式删去这两个交点: 将 γ_1 (γ_2) 介于 p 与 q 之间的部分替换为非常靠近 γ_2 (γ_1) 的曲线. 在这两个替换中必有一个会使交点总数减小.

[14.13] 设 $\{e_i, f_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 为 G 的所有无关边对. 对图 G 的每个满足 (a) 的画法指定一个 $(0,1)$ 向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_m)$, 其中 $x_i = 1$ 当且仅当 e_i 与 f_i 有奇数个交点. 此外, 对满足 $v \in V(G), e \in E(G), v \notin e$ 的对 (v, e), 令 $\boldsymbol{x}_{(v,e)}$ 表示如下 $(0,1)$ 向量: 除了 $\{e, f\}$ $(v \in f)$ 对应的坐标外, 所有其他坐标均为 0. 令 L 表示由向量 $\boldsymbol{x}_{(v,e)}$ 生成的模 2 子空间. 证明对 G 的任意两个满足条件 (a) 的画法, 对应向量的差 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' \pmod 2$ 属于 L.

[14.14] (ii) 考虑一个奇圈在一个 thrackle中的象, 该 thrackle 中任三条弧无公共内点. 这一闭曲线将平面分成有限个胞腔, 这些胞腔可用黑白两色着色, 使得任意两个有公共边界线段的胞腔都着不同颜色. 注意 $G - C$ 中任一条边的象连接两个不同颜色的点;

(iii) 由 Kuratowski 定理, 只须证明 G 不含 K_5 和 $K_{3,3}$ 的剖分. 要证 G 不

含 K_5 的剖分, 注意下述事实: 如果 C 和 C' 为 G 的两个恰有一个公共点的圈, 则表示 C 与 C' 的闭曲线在这一顶点处不交叉.

第 15 章

[15.1] 设 $t: V(H) \to \mathbb{R}^+$ $(p: E(H) \to \mathbb{R}^+)$ 是 H 的一个最优分数横截 (填装).对所有的对 (x, E) 估计 $\sum t(x)p(E)$, 其中 $x \in E$.

[15.2] 对网络利用最大流最小割定理.

[15.3] 对满足 $|V(H)| = n$ 和 $E(H) = \{E \subseteq V(H) \mid |E| = r\}$ 的完全 r 均匀超图计算 $\tau(H)$ 和 $\tau^*(H)$, 变动参数 r.

[15.4] (i) 用两种颜色对 H 的顶点随机着色;

(ii) 设 S 是一个 $2r^2$ 点集. 定义顶点是 S 的 r 元子集的超图 H. 对每个划分 $S = S_1 \cup S_2$ 赋予一条超边 E_s, 该超边由完全含于 S_1 或 S_2 的所有 r 元组构成. 利用定理 15.2 证明 $\tau(H) \leqslant cr^2 2^r$.

[15.5] 利用定理 15.4 第二个证明的思路.

[15.6] (i) 用定理 15.5 的证明思路.

[15.8] 删去不含于任一边的每个顶点. 对每对 $x, y \in X$, 记 $x \prec y$ $(y \prec x)$, 若不存在边 E 使得 $E \cap \{x, y\} = \{x\}$ $(\{y\})$. 称 x 与 y 是等价的, 若 $x \prec y$ 且 $y \prec x$. 证明 $\prec$ 确定 X 的等价类上的一个偏序, 该偏序至多有 $\lceil 1/\varepsilon \rceil - 1$ 个极大元.

[15.10] (i) 对任一固定的 d 用关于 n 的归纳法;

(ii) 设 $G_d(n)$ $(G'_d(n))$ 表示 $\mathbb{R}^d$(d 维投影空间) 被 n 个处于一般位置的超平面划分成的区域个数, 则

$$G'_d(n) = G_d(n) - G'_{d-1}(n);$$

(iii) 由对偶性, 结论与 (ii) 等价.

[15.11] (i) 利用下述 Radon 定理: 任一 $(d+2)$ 点集 $A \subseteq \mathbb{R}^d$ 可被划分成两部分 $A = A_1 \cup A_2$, 使得 A_1 的凸包与 A_2 的凸包至少有一个公共点 (见 Eckhoff, 1993).

[15.12] 对任一 $p_j \in S$, 设 $p'_j = (p_j, \|p_j\|^2)$ 表示 p_j 到 $(d+1)$ 维抛物面

$$\Pi = \{(p, r) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid \|p\|^2 = r\}$$

的投影. 由习题 15.10 (iii) 知, 存在 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中

$$\sum_{i=0}^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor} \binom{n+1}{d+1-2i} = \sum_{i=0}^{d+1} \binom{n}{i}$$

个超平面的集族, 使得其中每一个超平面以不同方式对分由点 p_i' 和 r 轴上相当远的点组成的集合. 考虑将 Π 与各个超平面的交投影到 $\mathbb{R}^d$ 所得的球面族.

[15.13] 用定理 11.6 而不用 ε 网格法, 将引理 15.13 中的界改进为 $c'm/\sqrt{n}$.

[15.14] 设 P 是一个凸 n 边形, ℓ 是一条直线. 通过对 P 的边的斜率的对分搜索, 计算 P 的与 ℓ 平行的两条切线, 并检验 ℓ 是否在它们之间.

[15.15] 利用推论 15.15 证明中的构造, 只是这里在每个顶点 v 处仅储存那些属于 $P(v)$ 的凸包但不属于 $P(w)$ 的凸包的顶点, 其中 w 是 v 的父顶点.

[15.16] (i) 直线 ℓ 将 S 平分为两个 $(2n)$ 元集 S_1 和 S_2. 对任一方向 θ, 设 $L_i(\theta)$ 表示平行于该方向且平分 S_i 为两个 n 元集的所有直线 ℓ' 的集合 $(i=1,2)$. 用连续性方法证明对某个 θ, $L_1(\theta)\cap L_2(\theta)\neq\varnothing$;

(ii) 构造一个 4 向树 T, 该树的每个顶点 v 与子集 $S_v\subseteq S$ 相伴, 方法是利用 (i) 用直线 ℓ,ℓ' 将 S_v 划分成 4 个子集 $S_v^1,\cdots,S_v^4$. 将 $|S_v|$ 和 ℓ,ℓ' 的方程储存在 v 处. 构作 v 的 4 个子顶点 $w_1,\cdots,w_4$, 并令 S_v^i 与 w_i 相伴;

(iii) 利用 (i) 构造二叉树, 使得对每个已被一个询问访问过的顶点 v, v 的一个子顶点及 v 的其他子顶点的仅一个子顶点也被访问.

[15.18] (ii) 利用习题 15.16(i);

(iii) 设 ℓ 是一条将 S 划分成大致相等的两部分的竖直直线. 对 ℓ 左侧与右侧的 $(n/2)$ 点集分别以递推方式构造两个弱 $(3\varepsilon/2)$ 网格 T_1 与 T_2. 注意到, 除了那些包含 ℓ 两侧多于 $\varepsilon n/4$ 个点的凸集外, $T_1\cup T_2$ 覆盖所有的凸集. 而所有这样的集合可被 ℓ 的

$$\frac{n^2/4}{(\varepsilon n/4)\cdot(3\varepsilon n/4)}$$

个点大致覆盖, 这些点取自 ℓ 与连结 S 中点的线段的交点的集合;

(v) 设 $S=\{p_0,\cdots,p_{n-1}\}$. 对一个固定的 k, 令 $S_i=\{p_j|(i-1)k<j<ik\}$, $1\leqslant i\leqslant n/k$. 对每个 S_i 以递推方式求出一个小的弱 $(\varepsilon n/3k)$ 网格, 在这些网格中添加点 p_0 , p_{ik}, 以及所有可作为 p_0p_{ik} 与 $p_{jk}p_{(i+1)k}$ $(1\leqslant j\leqslant i<n/k)$ 交点的点. 证明这些点形成 S 的一个弱 ε 网格. 令 $k=\lfloor n\sqrt{\varepsilon}/3\rfloor$.

[15.19] 应用定理 15.12 和不等式 (10.1).

[15.20] 对任一三角形 $\triangle$, 设 $R_\triangle$ 是与 $\triangle$ 相交的所有直线的集合. 范围空间

$$X=\{\mathbb{R}^2\text{中所有直线}\},\quad \mathcal{R}=\{R_\triangle\mid\triangle\text{是三角形}\}$$

具有有界的 VC 维数. 取 $\varepsilon=(c\log r)/r$ 应用推论 15.6 (i), 对由 L 导出 $(X,\mathcal{R})$ 的子空间求一个 ε 网格 $\mathcal{L}'$, 然后对配置 $\mathcal{A}(\mathcal{L}')$ 进行三角剖分.

[15.21] 定义超图 H, 设 $V(H)=\{\text{Box}(p,q)\mid p,q\in P\}$, $E(H)=\{E_r\mid r\in P\}$, 其中 $E_r=\{\text{Box}(p,q)\mid r\in\text{Box}(p,q)\}$. Erdős–Szekeres (1935) 引理指出, 任何 k^2+1 个实数构成的序列含有一个长度为 $k+1$ 的单调子序列. 利用这一引理证明 $\lambda(H)\leqslant 2^{2^{d-1}}$. 然后应用定理 15.9.

[15.22] 构造超图 H, 设 $V(H)=P$, $E(H)=\{B\cap P\mid B\in\mathcal{B}\}$. 证明 $\lambda(H)$ 由一个仅依赖于 d 的常数界定, 应用定理 15.9.

[15.23] 应用定理 15.9. 为求 $\lambda(H)$ 的界, 选取 H 的某些元 (边) $E_1,\cdots,E_\lambda$, 使得对任一 $i<j$, $E_i\cap E_j$ 有一点 x_{ij} 不属于任何其他的 E_h $(h\neq i,j)$. 将每个 E_i $(1\leqslant i\leqslant\lambda)$ 写成 k 个区间的并, $E_i=I_{i1}\cup\cdots\cup I_{ik}$. 如果对某 $i<j$ 有 $x_{ij}\in I_{ip}\cap I_{jq}$, 则称 (E_i,E_j) 为 (p,q) 型的对. 证明不存在 4 条边, 使得由它们确定的 6 个对属同一型, 然后应用定理 9.13.

第 16 章

[16.1] 试考虑随机超图.

[16.2] 利用随机着色. 一个巧妙的算法证明见 Erdős–Selfridge (1973).

[16.3] 利用下述结论, 称之为**Lovász 局部引理** (Alon–Spencer, 1992). 设 $A_1,\cdots,A_n$ 为概率空间中的随机事件, G 为顶点集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的图, 其具有下述性质:

(i) 对于 G 中与 i 不相邻的所有 j, 每一 A_i 与所有事件 A_j 所成的集族独立;

(ii) 对任一 i 均有 $Pr\{A_i\}\leqslant\dfrac{1}{4D}$, 其中 D 为图 G 的顶点的最大度,

则 $Pr\{\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n\}>0$, 即所有事件均不发生的概率为正.

[16.4] 构造 $V(H)$ 上的树 T, 使得每个 $E\in E(H)$ 都至少含有 T 的一条边.

[16.5] 分析原有证明.

[16.6] 删去顶点属于 S 且所有边为水平竖直交替的闭多边形, 然后用归纳法.

[16.7] 先由引理 16.11 推证对于适当选取的常数 C, 存在一对点 $p,q\in V(H)$, 使得边 $\{p,q\}$ 至多穿刺 H 的 $Cn^{1-1/d}$ 条超边. 再沿用定理 15.12 的证明.

[16.8] 利用下述事实: $\mathbb{R}^d$ 中 n 个球或半空间将整个空间划分为 C_dn^d 个胞腔.

[16.9] 适当改动定理 16.7 的证明. 注意到生成树 P 的每条穿刺 $\varphi(E_1,\cdots,E_k)\in E(H')$ 的边至少穿刺一个 $E_i, 1\leqslant i\leqslant k$, 且对于任一 m, 均有 $\pi_{H'}(m)\leqslant(\pi_H(m))^k$.

[16.11] 利用定理 16.15 中的记法证明

$$h(\varphi)+h''(\varphi)=\langle P'(\varphi),u(\varphi)\rangle,$$

其中 $u(\varphi)$ 为与直线 $\ell(\varphi)$ 平行的单位向量.

[16.12]　(i) 利用定理 16.15 和 Cauchy–Schwarz 不等式界定, 如

$$\int_0^{2\pi}[h(\varphi)+h(\varphi+\pi)]^{1/2}\left[h\Big(\varphi+\frac{\pi}{2}\Big)+h\Big(\varphi+\frac{3\pi}{2}\Big)\right]^{1/2}\mathrm{d}\varphi,$$

这里 γ 包围一个支撑函数为 h 的凸区域.

[16.13]　设 $c:V(H)\to\{+1,-1\}$ 为一随机 2 着色, 令 $b_E=[c(E)/(100\sqrt{n})]$, 其中 $[x]$ 表示距离 x 最近的整数. 另设 $b=b(c)=(b_E\mid E\in E(H))$. 参照引理 16.12 的证明, 证明 $H(b)\leqslant n/20$. 因此存在 3 着色 $\bar{c}:V(H)\to\{+1,-1,0\}$, 使得至少对 $n/3$ 个点有 $\bar{c}(x)\neq 0$, 且对于每一个 E, 均有 $|\bar{c}(E)|\leqslant 50\sqrt{n}$. 反复利用此结论.

[16.14]　形如 $\{a+kd\mid j2^i\leqslant k<(j+1)2^i\}$, $1\leqslant a\leqslant d$, $i,j\geqslant 0$ 的等差级数称为**标准级数**. 显然任何等差级数都可分解为标准级数. 令 H_i 表示所有长度为 2^i 的标准级数形成的超图. 利用引理 16.12 的证明方法可得到满足下列条件的 3 着色 $c:V(H)\to\{+1,-1,0\}$: 至少有 $n/3$ 个点使得 $c(x)\neq 0$, 且

$$\sum_{i=1}^{\log n}\operatorname{disc}(H_i,c)\leqslant Cn^{1/4}.$$

反复利用此结论.

[16.15]　(i) 对 $i=1,2$, 将 V 划分成 $n/2$ 组满足 $\pi_i(p_i^m)=q_i^m$ $(1\leqslant m\leqslant n/2)$ 的不交点对 $(p_i^1,q_i^1),\cdots,(p_i^{n/2},q_i^{n/2})$. 用 $+1$ 和 -1 对点进行着色, 同一点对中的点着以不同的颜色;

(ii) 仿照定理 16.4 的证明, 将每一置换分解为 “基本区间”, 应用定理 16.3 得到 H 偏差的界 $c\log^2 n$, 再将此界改进至 $c\log n$.

参考文献

B. M. Ábrego and S. Fernández-Merchant (2005), A lower bound for the rectilinear crossing number. *Graphs and Combinatorics* 21, 293–300.

E. Ackerman (2006), On the maximum number of edges in topological graphs with no four pairwise crossing edges, in: *Proc. 22th Annual Symposium on Computational Geometry*, ACM Press, 259–263.

E. Ackerman and G. Tardos (2007), On the maximum number of edges in quasi-planar graphs, *J. Combinatorial Theory, Series A* 114, 563–571.

P. Agarwal (1992), Ray shooting and other applications of spanning trees with low stabbing number, *SIAM J. Computing* 22, 540–570.

P. Agarwal, B. Aronov, J. Pach, R. Pollack, and M. Sharir (1997), Quasi-planar graphs have a linear number of edges, *Combinatorica* 17, 1–9.

P. Agarwal, E. Nevo, J. Pach, R. Pinchasi, M. Sharir, and S. Smorodinsky (2004), Lenses in arrangements of pseudo-circles and their applications, *J. ACM* 51, 139–186.

A. Aho, J. Hopcroft, and J. Ullman (1974), *Design and Analysis of Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, MA.

M. Ajtai, V. Chvátal, M. Newborn, and E. Szemerédi (1982), Crossing-free subgraphs, *Ann. Discrete Mathematics* 12, 9–12.

J. Akiyama and N. Alon (1989), Disjoint simplices and geometric hypergraphs, in: *Combinatorial Mathematics* (G. Bloom et al., eds.), *Ann. New York Academy of Sciences*, vol. 555, New York Academy of Sciences, New York, 1–3.

R. Alexander (1990), Geometric methods in the study of irregularities of distribution, *Combinatorica* 10, 115–136.

N. Alon and P. Erdős (1989), Disjoint edges in geometric graphs, *Discrete and Computational Geometry* 4, 287–290.

N. Alon and E. Győri (1986), The number of small semispaces of a finite set of points in the plane, *J. Combinatorial Theory, Series A* 41, 154–157.

N. Alon and J. Spencer (1992), *The Probabilistic Method*, Wiley-Interscience, New York.

N. Alon, L. Babai, and H. Suzuki (1991), Multilinear polynomials and Frankl Ray-Chaudhuri Wilson type intersection theorems, *J. Combinatorial Theory, Series A* 58, 165–180.

N. Alon, P. Seymour, and R. Thomas (1990), A separator theorem for nonplanar graphs, *J. American Mathematical Society* 3, 801–808.

N. Alon, P. Seymour, and R. Thomas (1994), Planar separators, *SIAM J. Discrete Mathematics* 7, 184–193.

N. ALON, I. BÁRÁNY, Z. FÜREDI, AND D. KLEITMAN (1992), Point selection and weak ε-nets for convex hulls, *Combinatorics, Probability and Computing* 1, 189–200.

N. ALON, R. DUKE, H. LEFMANN, AND V. RÖDL (1994), The algorithmic aspect of the regularity lemma, *J. Algorithms* 16, 80–109.

E. ALTMAN (1963), On a problem of Erdős, *American Mathematical Monthly* 70, 148–157.

E. ALTMAN (1972), Some theorems on convex polygons, *Canadian Mathematical Bull.* 15, 329–340.

E. ANDREEV (1970a), On convex polyhedra in Lobačevskiĭ spaces, *Matematicheskiĭ Sbornik, Nov. Ser.* 81, 445–478. [English translation appears in *Mathematics of the USSR, Sbornik* 10 (1970), 413–440.]

E. ANDREEV (1970b), On convex polyhedra of finite volume in Lobačevskiĭ spaces, *Matematicheskiĭ Sbornik, Nov. Ser.* 83, 256–260. [English translation appears in *Mathematics of the USSR, Sbornik* 12 (1970), 255–259.]

H. ANNING AND P. ERDŐS (1945), Integral distances, *Bull. American Mathematical Society* 51, 598–600.

R. ANSTEE (1985), General forbidden configuration theorems, *J. Combinatorial Theory, Series A* 40, 108–124.

R. ANSTEE AND Z. FÜREDI (1986), Forbidden submatrices, *Discrete Mathematics* 62, 225–243.

M. ANTHONY AND N. BIGGS (1992), *Computational Learning Theory*, Cambridge University Press, New York.

D. APPLEGATE AND R. KANNAN (1991), Sampling and integration of near log–concave functions, *Proc. 23rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 156–163.

B. ARONOV AND M. SHARIR (2002), Cutting circles into pseudo-segments and improved bounds for incidences, *Discrete and Computational Geometry* 28, 475–490.

B. ARONOV, D. NAIMAN, J. PACH, AND M. SHARIR (1993), An invariant property of balls in arrangements of hyperplanes, *Discrete and Computational Geometry* 10, 421-425.

B. ARONOV, B. CHAZELLE, H. EDELSBRUNNER, L. GUIBAS, M. SHARIR, AND R. WENGER (1991), Points and triangles in the plane and halving planes in space, *Discrete and Computational Geometry* 6, 435–442.

B. ARONOV, P. ERDŐS, W. GODDARD, D. KLEITMAN, M. KLUGERMAN, J. PACH, AND L. SCHULMAN (1994), Crossing families, *Combinatorica* 14, 127–134.

D. AVIS (1984), The number of furthest neighbour pairs of a finite planar set, *American Mathematical Monthly* 91, 417–420.

D. AVIS, P. ERDŐS, AND J. PACH (1988), Repeated distances in the space, *Graphs and Combinatorics* 4, 207-217.

D. AVIS, P. ERDŐS, AND J. PACH (1991), Distinct distances determined by subsets of a point set in space, *Computational Geometry: Theory and Applications* 1, 1–11.

S. Avital and H. Hanani (1966), Graphs, *Gilyonot Lematematika* 3, 2–8.

L. Babai and P. Frankl (1988), Linear algebra methods in combinatorics, Part I, Tech. Rept., University of Chicago, July 1988. Expanded edition, 1992.

K. Ball (1992), A lower bound for the optimal density of lattice packings, *Duke J. Mathematics*, 68, 217–221.

J. Balogh and G. Salazar (2006), k-sets, convex quadrilaterals, and the rectilinear crossing number of K_n, *Discrete and Computational Geometry* 35, 671–690.

R. Bambah and H. Davenport (1952), The covering of n–dimensional space by spheres, *J. London Mathematical Society* 27, 224–229.

R. Bambah and C. Rogers (1952), Covering the plane with convex sets, *J. London Mathematical Society* 27, 304–314.

R. Bambah, C. Rogers, and H. Zassenhaus (1964), On coverings with convex domains, *Acta Arithmetica* 9, 191–207.

E. Baranovskiĭ (1964), On packing n–dimensional Euclidean space by equal spheres I, *Izvestija Visših Učebnnyh Zavedeniĭ Matematika* (2) 39, 14–24.

I. Bárány and Z. Füredi (1987), Computing the volume is difficult, *Discrete and Computational Geometry* 2, 319–326.

I. Bárány and J. Lehel (1987), Covering with Euclidean boxes, *European J. Combinatorics* 8, 113–119.

I. Bárány, Z. Füredi and L. Lovász (1990), On the number of halving planes, *Combinatorica* 10, 175–183.

I. Bárány, Z. Füredi, and J. Pach (1984), Discrete convex functions and proof of the six circle conjecture of Fejes Tóth, *Canadian J. Mathematics* 36, 569–576.

I. Bárány, H. Bunting, D. Larman, and J. Pach (1995), Rich cells in an arrangement of hyperplanes, *Linear Algebra and Its Applications* 226–228, 567–576.

E. Barbier (1860), Note sur le probléme de l'aiguille et le jeu du joint couvert, *J. Mathématiques Pures et Appliquées* (2) 5, 273–286.

P. Bateman and P. Erdős (1951), Geometric extrema suggested by a lemma of Besicovitch, *American Mathematical Monthly* 58, 306–314.

J. Beck (1981a), Balanced two-colourings of finite sets in the square I, *Combinatorica* 1, 327–335.

J. Beck (1981b), Roth's estimate of the discrepancy of integer sequences is nearly sharp, *Combinatorica* 1, 319–325.

J. Beck (1983a), On the lattice property of the plane and some problems of Dirac, Motzkin and Erdős in combinatorial geometry, *Combinatorica* 3, 281–297.

J. Beck (1983b), On a problem of K.F. Roth concerning irregularities of distribution, *Inventiones Mathematicae* 74, 477–487.

J. Beck (1991), Quasi-random 2-colorings of point sets, *Random Structures and Algorithms*

2, 289-302.

J. Beck and W. Chen (1987), *Irregularities of Distribution*, Cambridge University Press, New York.

J. Beck and T. Fiala (1981), Integer making theorems, *Discrete Applied Mathematics* 3, 1–8.

J. Beck and V.T. Sós (1995), Discrepancy theory, in: *Handbook of Combinatorics,* vol. 2 (R.L. Graham, M. Grötschel, L. Lovász, eds.), North-Holland, 1405–1446.

J. Beck and J. Spencer (1984), Unit distances, *J. Combinatorial Theory, Series A* 37, 231–238.

C. Benson (1966), Minimal regular graphs of girth eight and twelve, *Canadian J. Mathematics* 18, 1091–1094.

E. Berlekamp (1969), On subsets with intersections of even cardinality, *Canadian Mathematical Bull.* 12, 363–366.

M. Bern, D. Eppstein, P. Plassmann, and F. Yao (1991), Horizon theorems for lines and polygons, in: *Discrete and Computational Geometry: Papers from DIMACS Special Year*, DIMACS Series, vol. 6 (J. Goodman et al., eds.), American Mathematical Society, Providence, RI, 45–66.

A. Bezdek (1984), On the section of lattice-coverings of balls, in: *Rend. Circ. Math. Palermo, Ser. II, Suppl.* 3, 23–45.

A. Bezdek and G. Kertész (1987), Counter-examples to a packing problem of L. Fejes Tóth, in: *Intuitive Geometry, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, vol. 48 (K. Böröczky and G. Fejes Tóth, eds.), North–Holland, Amsterdam, 29–36.

A. Bezdek and W. Kuperberg (1991), Packing Euclidean space with congruent cylinders and with congruent ellipsoids, in: *Applied Geometry and Discrete Mathematics: The Victor Klee Festschrift* (P. Gritzmann and B. Sturmfels, eds.), DIMACS Series, vol. 4, American Mathematical Society, Providence, RI, 71–80.

D. Bienstock and E. Győri (1991), An extremal problem on sparse 0-1 matrices, *SIAM J. Discrete Mathematics* 4, 17–27.

W. Blaschke (1923), *Vorlesungen über Differentialgeometrie II*, Berlin.

W. Blaschke (1955), *Vorlesungen über Integralgeometrie*, 3rd ed., Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

H. Blichfeldt (1914), A new principle in the geometry of numbers with some applications, *Trans. American Mathematical Society* 15, 227–235.

H. Blichfeldt (1921), Note on geometry of numbers, *Bull. American Mathematical Society* 27, 152–153.

H. Blichfeldt (1929), The minimum value of quadratic forms, and the closest packing of spheres, *Mathematische Ann.* 101, 605–608.

G. Blind (1969), Über Unterdeckungen der Ebene durch Kreise, *J. reine und angewandte*

Mathematik 236, 145–173.

G. Blind (1983), Problem No. 34, Research problems, *Periodica Mathematica Hungarica* 14, 309–312.

A. Blumer, A. Ehrenfeucht, D. Haussler, and M. Warmuth (1989), Learnability and the Vapnik-Chervonenkis dimension. *J. Association for Computing Machinery* 36, 929–965.

B. Bollobás (1976), On complete subgraphs of different orders, *Mathematical Proc. Cambridge Philosophical Society* 79, 19–24.

B. Bollobás (1978), *Extremal Graph Theory*, Academic Press, New York.

B. Bollobás (1979), *Graph Theory: An Introductory Course*, Graduate Texts in Mathematics 63, Springer-Verlag, New York.

B. Bollobás (1985), *Random Graphs*, Academic Press, London.

B. Bollobás (1986), *Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge.

V. Boltyansky and I. Gohberg (1985), *Results and Problems in Combinatorial Geometry*, Cambridge University Press, New York.

J. Bondy (1971), Large cycle graphs, *Discrete Mathematics* 1, 121–132.

J. Bondy and M. Simonovits (1974), Cycles of even lengths in graphs, *J. Combinatorial Theory, Series B* 16, 97–105.

T. Bonnesen and W. Fenchel (1934), *Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Mathematik* 3, vol. 1, Springer-Verlag, New York.

K. Böröczky (1986), Closest packing and loosest covering of the space with balls, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 21, 79–89.

K. Böröczky, Jr. (2004), *Finite Packing and Covering*, Cambridge University Press, Cambridge.

K. Borsuk (1933), Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre, *Fundamenta Mathematicae* 20, 177–190.

P. Borwein and W. Moser (1990), A survey of Sylvester's problem and its generalizations, *Aequationes Mathematicae* 40, 111–135.

J. Bourgain and J. Lindenstrauss (1991), On covering a set in $\mathbb{R}^d$ by balls of the same diameter, in: *Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1469 (J. Lindenstrauss and V. Milman, eds.), Springer-Verlag, New York, 138–144.

P. Brass (1992a), The maximum number of second smallest distances in finite planar sets, *Discrete and Computational Geometry* 7, 371–379.

P. Brass (1992b), *Beweis einer Vermutung von Erdős und Pach aus der kombinatorischen Geometrie,* Ph.D. Thesis, Department of Discrete Mathematics, Technical University Braunschweig, Braunschweig.

P. Brass (1992c), On the maximum densities of the jth smallest distances, in: *Sets, Graphs and Numbers, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, vol. 60, North-Holland,

Amsterdam, 119–126.

P. BRASS (1997), On the maximum number of unit distances among n points in dimension four, in: *Intuitive Geometry, Bolyai Society Mathematical Studies*, vol. 6, Budapest, 277–290.

P. BRASS AND J. PACH (2001), The maximum number of times the same distance can occur among the vertices of a convex n-gon is $O(n \log n)$, *J. Combinatorial Theory, Series A* 94, 178–179.

P. BRASS, G. KÁROLYI, AND P. VALTR (2003), A Turán-type extremal theory of convex geometric graphs, in: *Discrete and Computational Geometry* (B. Aronov et al., eds.), *Algorithms Combin.* 25, Springer-Verlag, Berlin, 275–300.

P. BRASS, W. MOSER, AND J. PACH (2005), *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, New York.

G. BRIGHTWELL AND E. SCHEINERMAN (1993), Representation of planar graphs, *SIAM J. Discrete Mathematics* 6, 214–229.

W. BROWN (1966), On graphs that do not contain a Thomsen graph, *Canadian Mathematical Bull.* 9, 281–285.

W. BROWN (1983), On an open problem of Paul Turán concerning 3-graphs, in: *Studies in Pure Mathematics: To the Memory of Paul Turán* (P. Erdős, ed.), Birkhäuser Verlag, Basel, 91–93.

W. BROWN AND F. HARARY (1970), Extremal digraphs, in: *Combinatorial Theory and Its Applications, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai,* vol. 10 (P. Erdős et al., eds.), North–Holland, Amsterdam, 135–198.

W. BROWN AND M. SIMONOVITS (1984), Digraph extremal problems, hypergraph extremal problems, and the densities of graph structures, *Discrete Mathematics* 48, 147–162.

W. BROWN, P. ERDŐS, AND M. SIMONOVITS (1973), Extremal problems for directed graphs, *J. Combinatorial Theory, Series B* 15, 77–93.

G. BUFFON (1770), Essai d'arithmétique morale, *Supplément á l'Histoire Naturelle*, vol. 4.

D. DE CAEN (1983a), Extension of a theorem of Moon and Moser on complete hypergraphs, *Ars Combinatoria* 16, 5–10.

D. DE CAEN (1983b), A note on the probabilistic approach to Turán's problem, *J. Combinatorial Theory, Series B* 34, 340–349.

D. DE CAEN (1983c), Linear constraints related to Turán's problem, *Proc. 6th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium* 39, 291–303.

R. CANHAM (1969), A theorem on arrangements of lines in the plane, *Israel J. Mathematics* 7, 393–397.

V. CAPOYLEAS AND J. PACH (1992), A Turán-type theorem on chords of a convex polygon, *J. Combinatorial Theory, Series B* 56, 9–15.

J. CASSELS (1953), A short proof of the Minkowski-Hlawka theorem, *Proc. Cambridge Philosophical Society* 49, 165–166.

J. CASSELS (1959), *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer-Verlag, New York.

A. CAUCHY (1850), Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes, *Mem. Academie des Sciences, Paris* 22, 3–15.

J. ČERNÝ (2005), Geometric graphs with no three disjoint edges, *Discrete and Computational Geometry* 34, 679–695.

B. CHAZELLE (1993), Geometric discrepancy revisited, *Proc. 34th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 392–399.

B. CHAZELLE AND J. FRIEDMAN (1990), A deterministic view of random sampling and its use in geometry, *Combinatorica* 10, 229–249.

B. CHAZELLE AND E. WELZL (1989), Quasi optimal range searching in spaces of finite VC-dimension, *Discrete and Computational Geometry* 4, 467–489.

B. CHAZELLE, L. GUIBAS, AND D. T. LEE (1985), The power of geometric duality, *BIT* 25, 76–90.

B. CHAZELLE, J. MATOUŠEK, AND M. SHARIR (1995), An elelmentary approach to lower bounds in geometric discrepancy, *Discrete and Computational Geometry* 13, 363–381.

B. CHAZELLE, H. EDELSBRUNNER, M. GRIGNI, L. GUIBAS, M. SHARIR, AND E. WELZL (1993), Improved bounds on weak ε-nets for convex sets, *Proc. 25th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 495–504. Also in *Discrete and Computational Geometry* 13 (1995), 1–15.

H. CHERNOFF (1952), A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations, *Ann. Mathematical Statistics* 23, 493–507.

F. CHUNG (1984), The number of different distances determined by n points in the plane, *J. Combinatorial Theory, Series A* 36, 342–354.

F. CHUNG (1989), Sphere-and-point incidence relations in higher dimensions with applications to unit distances and furthest neighbor pairs, *Discrete and Computational Geometry* 4, 183–190.

F. CHUNG (1990), Separator theorems and their applications, in: *Paths, Flows, and VLSI-Layout* (B. Korte et al., eds.), Springer-Verlag, New York, 17–34.

F. CHUNG, R. GRAHAM, AND J. PACH (1987), see P. Erdős, Some combinatorial and metric problems in geometry, in: *Intuitive Geometry, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai,* vol. 48 (K. Böröczky and G. Fejes Tóth, eds.), North-Holland, Amsterdam, 167–177.

F. CHUNG, E. SZEMERÉDI, AND W. TROTTER JR. (1992), The number of distinct distances determined by a set of points in the Euclidean plane, *Discrete and Computational Geometry* 7, 1–11.

V. CHVÁTAL (1979), A greedy heuristic for the set covering problem, *Mathematical Opera-*

tions Research 4, 233–235.

V. CHVÁTAL (1983), *Linear Programming*, Freeman, New York.

V. CHVÁTAL AND E. SZEMERÉDI (1981), On the Erdős–Stone theorem, *J. London Mathematical Society* (2) 23, 207–214.

K. CLARKSON (1987), New applications of random sampling in computational geometry, *Discrete and Computational Geometry* 2, 195–222.

K. CLARKSON AND P. SHOR (1989), Applications of random sampling in computational geometry, II, *Discrete and Computational Geometry* 4, 387–421.

K. CLARKSON, H. EDELSBRUNNER, L. GUIBAS, M. SHARIR, AND E. WELZL (1990), Combinatorial complexity bounds for arrangements of curves and surfaces, *Discrete and Computational Geometry* 5, 99–160.

Y. COLIN DE VERDIÈRE (1989), Empilements de cercles: Convergence d'une méthode de point fixe, *Forum Mathematicum* 1, 395-402.

D. CONLON (2007), A new upper bound for diagonal Ramsey numbers, to appear in *Annals of Mathematics*, in press.

J. CONWAY AND N. SLOANE (1988), *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer-Verlag, New York.

J. CONWAY, H. CROFT, P. ERDŐS, AND M. GUY (1979), On the distribution of values of angles determined by coplanar points, *J. London Mathematical Society* (2) 19, 137–143.

T. COREMAN, C. LEISERSON, AND R. RIVEST (1990), *Introduction to Algorithms*, McGraw-Hill, New York.

J. VAN DER CORPUT (1936), Verallgemeinerung einer Mordellschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen II, *Acta Arithmetica* 1, 62–66.

R. COURANT (1965), The least dense lattice packing of two–dimensional convex bodies, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 18, 339–343.

H. COXETER (1948), A problem of collinear points, *American Mathematical Monthly* 55, 26–28.

H. COXETER (1962), *Regular Polytopes*, 3rd ed., Dover, New York.

H. COXETER (1969), *Introduction to Geometry*, 2nd ed., Wiley, New York.

H. COXETER, L. FEW, AND C. ROGERS (1959), Covering space with equal spheres, *Mathematika* 6, 147–157.

H. CROFT (1967), Some geometrical thoughts II, *Mathematical Gazette* 51, 125–129.

M. CROFTON (1868), On the theory of local probability, *Philosophical Trans. Royal Society of London* 158, 181–199.

M. CROFTON (1885), Probability, in: *Encylopedia Britannica*, 9th ed., vol. 19, 768–788.

J. CSIMA AND E. SAWYER (1993), There exist $6n/13$ ordinary points, *Discrete and Computational Geometry* 9, 187–202.

J. CSIMA AND E. SAWYER (1995), The $6n/13$ theorem revisited, *Proc. Seventh International*

Conference in Graph Theory, Combinatorics, Algorithms, and Applications, Kalamazoo, MI (Y. Alavi and A. Schenk, eds.), Wiley, New york, 235–249.

I. CSISZÁR AND J. KÖRNER (1981), *Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems*, Academic Press, New York, and Akadémiai Kiadó, Budapest.

G. CSIZMADIA (1996), Furthest neighbors in space, *Discrete Mathematics* 150, 81–88.

L. DANZER (1987) see P. Erdős, Some combinatorial and metric problems in geometry, in: *Intuitive Geometry, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, vol. 48 (K. Böröczky and G. Fejes Tóth, eds.), North-Holland, Amsterdam, 167–177.

L. DANZER AND B. GRÜNBAUM (1962), Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdős und von V. Klee, *Mathematische Zeitschrift* 79, 95–99.

L. DANZER, B. GRÜNBAUM, AND V. KLEE (1963), Helly's theorem and its relatives, in: *Convexity, Proc. Symposia Pure Applied Mathematics,* vol. 7 (V. Klee, ed.), American Mathematical Society, Providence, RI, 101–181.

H. DAVENPORT (1952), The covering of space by spheres, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (2) 1, 92–107.

H. DAVENPORT AND C. ROGERS (1947), Hlawka's theorem in the geometry of numbers, *Duke J. Mathematics* 14, 367–375.

B. DELAUNAY (1934), Sur la sphère vide, *Bull. Académie des Sciences USSR (VII), Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles*, 793–800.

T. DEY (1998), Improved bounds for planar k sets and related problems, *Discrete and Computational Geometry* 19, 373–382.

T. DEY AND H. EDELSBRUNNER (1993), Counting triangle crossings and halving planes, *Proc. 9th Annual Symposium on Computational Geometry,* 270–273. Also: *Discrete and Computational Geometry* 12 (1994), 281–289.

T. DEY AND J. PACH (1998), Extremal problems for geometric hypergraphs, *Discrete and Computational Geometry* 19, 473–484.

M. DEZA, V. GRISHUKHIN, AND M. LAURENT (1993), Hypermetrics in Geometry of Numbers, Tech. Rept. 93-4, Rapport de Recherche du Laboratoire d'Informatique de l'Ecole Normale Supérieure.

R. DILWORTH (1950), A decomposition theorem for partially ordered sets, *Annals of Mathematics* 51, 161–166.

G. DING, P. SEYMOUR, AND P. WINKLER (1994), Bounding the vertex cover number of a hypergraph, *Combinatorica* 14, 23–34.

G. DIRAC (1951), Collinearity properties of sets of points, *Quarterly J. Math.* (2) 2, 221–227.

G. DIRAC (1952), Some theorems on abstract graphs, *Proc. London Mathematical Society* (3) 2, 69–81.

G. DIRAC (1963), Extensions of Turán's theorem on graphs, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 14, 417–422.

H. DJIDJEV (1982), On the problem of partitioning planar graphs, *SIAM J. Discrete Mathematics* 3, 229–240.

K.R. DOHENY (1995), On the lower bound of packing density for convex bodies in the plane, *Beiträge Algebra Geometry* 36, 109–117.

C. H. DOWKER (1944), On minimum circumscribed polygons, *Bull. American Mathematical Society* 50, 120–122.

P. DOYLE, Z.-X. HE, AND B. RODIN (1994), The asymptotic value of the circle-packing rigidity constants s_n, *Discrete and Computational Geometry* 12, 105–116.

P. DOYLE AND J. SNELL (1984), *Random Walks and Electric Networks*, The Carus Mathematical Monographs, vol. 22, Mathematical Association of America, Washington DC.

A. DUMITRESCU (2006), On distinct distances from a vertex of a convex polygon, *Discrete and Computational Geometry* 36, 503–509.

A. DUMITRESCU, M. SHARIR, AND CS. D. TÓTH (2008), Extremal problems on triangle areas in two and three dimensions, to appear.

M. DYER AND A. FRIEZE (1988), On the complexity of computing the volume, *SIAM J. Computing* 17, 967–974.

M. DYER, A. FRIEZE, AND R. KANNAN (1991), A random polynomial time algorithm for estimating volumes of convex bodies, *J. Association for Computing Machinery* 38, 1–17.

J. ECKHOFF (1993), Helly, Radon and Carathéodory type theorems, in: *Handbook of Convex Geometry*, vol. A (P. Gruber and J. Wills, eds.), North-Holland, Amsterdam, 389–448.

H. EDELSBRUNNER (1987), *Algorithms in Combinatorial Geometry*, Springer-Verlag, New York.

H. EDELSBRUNNER AND P. HAJNAL (1991), A lower bound on the number of unit distances between the points of a convex polygon, *J. Combinatorial Theory, Series A* 56, 312–316.

H. EDELSBRUNNER AND S. SKIENA (1989), On the number of furthest neighbor pairs in a point set, *American Mathematical Monthly* 96, 614–618.

H. EDELSBRUNNER AND E. WELZL (1986a), On the maximal number of edges of many faces in arrangements, *J. Combinatorial Theory, Series A* 41, 159–166.

H. EDELSBRUNNER AND E. WELZL (1986b), Half–planar range searching in linear space and $O(n^{0.695})$ query time, *Information Processing Letters* 23, 289–293.

H. EDELSBRUNNER AND E. WELZL (1986c), Constructing belts in two-dimensional arrangements with applications, *SIAM J. Computing* 15, 271–284.

H. EDELSBRUNNER, J. O'ROURKE, AND R. SEIDEL (1986), Constructing arrangements of lines and hyperplanes, *SIAM J. Computing* 15, 317–340.

H. EDELSBRUNNER, D. ROBISON, AND X. SHEN (1990), Covering convex sets with non-overlapping polygons, *Discrete Mathematics* 81, 153–164.

H. EDELSBRUNNER, L. GUIBAS, J. HERSHBERGER, R. SEIDEL, M. SHARIR, J. SNOEYINK, AND E. WELZL (1989), Implicitly representing arrangements of lines and of segments,

Discrete and Computational Geometry 4, 433–466.

C. EDWARDS (1975), Triangles in simple graphs and some related problems, *Proc. 5th British Columbia Combinatorial Conference*, 159–164.

H. EGGLESTON (1957a), Approximation to plane convex curves I. Dowker-type theorems, *Proc. London Mathematical Society* (3) 7, 351–377.

H. EGGLESTON (1957b), *Problems in Euclidean Space: Application of Convexity*, Pergamon Press, London.

G. ELEKES (1986), A geometric inequality and the complexity of computing the volume, *Discrete and Computational Geometry* 1, 289–292.

G. ELEKES (1992), Irregular pairs are necessary in Szemerédi's regularity lemma, manuscript.

G. ELEKES AND P. ERDŐS (1994), Similar configurations and psendo grids, in: *Intuitive Geometry, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai* (K. Böröczky and G. Fejes Tóth, eds.), North-Holland, Amsterdam, 85–104.

N. ELKIES, A. ODLYZKO, AND N. RUSH (1991), On the packing densities of superballs and other bodies, *Inventiones Mathematicae* 105, 613–639.

V. ENNOLA (1961), On the lattice constant of a symmetric convex domain, *J. London Mathematical Society* 36, 135–138.

P. ERDŐS (1938), On sequences of integers none of which divides the product of two others, and related problems, *Mitteilungen des Forschungsinstituts für Mathematik und Mechanik, Tomsk* 2, 74–82.

P. ERDŐS (1943), Problem for solution, no. 4065, *American Mathematical Monthly* 50, 65.

P. ERDŐS (1945), Integral distances, *Bull. American Mathematical Society* 51, 996.

P. ERDŐS (1946), On sets of distances of n points, *American Mathematical Monthly* 53, 248–250.

P. ERDŐS (1947), Some remarks on the theory of graphs, *Bull. American Mathematical Society* 53, 292–294.

P. ERDŐS (1950), Some remarks on set theory, *Proc. American Mathematical Society* 1, 127–141.

P. ERDŐS (1955a), Some theorems on graphs, *Riveon Lematematika* 10, 13–16.

P. ERDŐS (1955b), Aufgabe, *Elemente der Mathematik* 10, 114.

P. ERDŐS (1960), On sets of distances of n points in Euclidean space, *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézet Közleményei* 5, 165–169.

P. ERDŐS (1962a), On a theorem of Rademacher–Turán, *Illinois J. Mathematics* 6, 122–127.

P. ERDŐS (1962b), Remarks on a paper of Pósa, *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézet Közleményei* 7, 227–228.

P. ERDŐS (1962c), On the number of complete subgraphs contained in certain graphs, *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézet Közleményei* 7, 459–464.

P. ERDŐS (1963a), On the structure of linear graphs, *Israel J. Mathematics* 1, 156–160.

P. ERDŐS (1963b), Extremal problems in graph theory, in: *Theory of Graphs and Its Applications: Proc. Symposium on the Theory of Graphs and Its Applications*, Smolenice, Czechoslovakia, 29–36.

P. ERDŐS (1964a), On the number of triangles contained in certain graphs, *Canadian Mathematical Bull.* 7, 53–56.

P. ERDŐS (1964b), On a combinatorial problem II, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 15, 445–447.

P. ERDŐS (1964c), On some problems of graphs and generalized graphs, *Israel J. Mathematics* 2, 183–190.

P. ERDŐS (1965), On some extremal problems in graph theory, *Israel J. Mathematics* 3, 113–116.

P. ERDŐS (1966), On cliques in graphs, *Israel J. Mathematics* 4, 233–234.

P. ERDŐS (1967a), On some applications of graph theory to geometry, *Canadian J. Mathematics* 19, 968–971.

P. ERDŐS (1967b), On bipartite subgraphs of a graph (in Hungarian), *Matematikai Lapok* 18, 283–288.

P. ERDŐS (1970), On the graph theorem of Turán (in Hungarian), *Matematikai Lapok* 21, 249–251.

P. ERDŐS (1974), Some remarks on the theory of graphs, *Bull. American Mathematical Society* 53, 292–294.

P. ERDŐS (1975), On some problems in elementary and combinatorial geometry, *Ann. Mathematics, Series 4*, 130, 99–108.

P. ERDŐS (1978), Some applications of graph theory and combinatorial methods to number theory and geometry, in: *Algebraic Methods in Graph Theory, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai,* vol. 13 (Lovász and V.T. Sós, eds.), North–Holland, Amsterdam, 137-148.

P. ERDŐS (1980), Some combinatorial problems in geometry, in: *Geometry and Differential Geometry,* Lecture Notes in Mathematics, vol. 792 (R. Artzy and I. Vaisman, eds.), Springer-Verlag, New York, 46–53.

P. ERDŐS (1981), On the combinatorial problems which I would most like to see solved, *Combinatorica* 1, 25–42.

P. ERDŐS (1982), Personal reminiscences and remarks of the mathematical work of Tibor Gallai, *Combinatorica* 2, 207–212.

P. ERDŐS (1983), Extremal problems in number theory, combinatorics and geometry, in: *Proc. International Congress of Mathematics*, 1–3.

P. ERDŐS (1984), On some problems in graph theory, combinatorial analysis and combinatorial number theory, in: *Graph Theory and Combinatorics* (B. Bollobás ed.), Academic Press, New York, 1–17.

P. ERDŐS (1986), On some metric and combinatorial geometry problems, *Discrete Mathematics* 60, 147–153.

P. ERDŐS (1987), Some combinatorial and metric problems in geometry, in: *Intuitive Geometry, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai,* vol. 48 (K. Böröczky and G. Fejes Tóth, eds.), North-Holland, Amsterdam, 167–177.

P. ERDŐS AND T. GALLAI (1959), On maximal paths and circuits of graphs, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 10, 337–356.

P. ERDŐS AND R. GUY (1970), Distinct distances between lattice points, *Elemente der Mathematik* 25, 121-123.

P. ERDŐS AND D. KLEITMAN (1968), On coloring graphs to maximize the proportion of multicolored k-edges, *J. Combinatorial Theory* 5, 164–169.

P. ERDŐS AND L. LOVÁSZ (1975), Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related problems, in: *Infinite and Finite Sets, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai,* vol. 10 (A. Hajnal et al., eds), North-Holland, Amsterdam, 609–617.

P. ERDŐS AND L. MOSER (1959), Problem 11, *Canadian Mathematical Bull.* 2, 43.

P. ERDŐS AND L. MOSER (1970), An extremal problem in graph theory, *Australian J. Mathematics* 11, 42–47.

P. ERDŐS AND J. PACH (1990), Variations on the theme of repeated distances, *Combinatorica* 10, 261–269.

P. ERDŐS AND L. PÓSA (1962), On the maximal number of disjoint circuits of a graph, *Publ. Mathematicae Debrecen* 9, 3–12.

P. ERDŐS AND G. PURDY (1971), Some extremal problems in geometry, *J. Combinatorial Theory, Series A* 10, 246–252.

P. ERDŐS AND G. PURDY (1975), Some extremal problems in geometry III, *Proc. 6th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium* 14, 291–308.

P. ERDŐS AND G. PURDY (1976), Some extremal problems in geometry IV, *Proc. 7th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium* 17, 307–322.

P. ERDŐS AND G. PURDY (1995), Extremal problems in combinatorial geometry, in: *Handbook of Combinatorics*, vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 809–874.

P. ERDŐS AND A. RÉNYI (1962), On a problem in the theory of graphs, *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézet Közleményei* 7A, 623–641.

P. ERDŐS AND C. ROGERS (1953), The covering of n-dimensional space by spheres, *J. London Mathematical Society* 28, 287–293.

P. ERDŐS AND C. ROGERS (1962), Covering space with convex bodies, *Acta Arithmetica* 7, 281–285.

P. ERDŐS AND J. SELFRIDGE (1973), On a combinatorial game, *J. Combinatorial Theory,*

Series A 14, 298–301.

P. Erdős and M. Simonovits (1966), A limit theorem in graph theory, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 1, 51–57.

P. Erdős and M. Simonovits (1983), Supersaturated graphs, *Combinatorica* 3, 181–192.

P. Erdős and J. Spencer (1974), *Probabilistic Methods in Combinatorics*, Academic Press, London, and Akadémiai Kiadó, Budapest.

P. Erdős and A. Stone (1946), On the structure of linear graphs, *Bull. American Mathematical Society* 52, 1087–1091.

P. Erdős and G. Szekeres (1935), A combinatorial problem in geometry, *Compositio Mathematica* 2, 463–470.

P. Erdős and G. Szekeres (1961), On some extremum problems in elementary geometry, *Ann. Universitatis Scientiarum Budapestinensis, Eötvös, Sectio Mathematica* 3–4, 53–62.

P. Erdős, P. Gruber, and J. Hammer (1989), *Lattice Points,* Longman Scientific Technological, Harlow, Essex, England.

P. Erdős, D. Hickerson, and J. Pach (1989), A problem of Leo Moser about repeated distances on the sphere, *American Mathematical Monthly* 96, 569–575.

P. Erdős, L. Lovász, and K. Vesztergombi (1989), On the graph of large distances, *Discrete and Computational Geometry* 4, 541–549.

P. Erdős, E. Makai, and J. Pach (1993), Nearly equal distances in the plane, *Combinatorics, Probability and Computing* 2, 401–408.

P. Erdős, A. Rényi, and V. T. Sós (1966), On a problem of graph theory, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 1, 215–235.

P. Erdős, Z. Füredi, J. Pach, and I. Ruzsa (1993), The grid revisited, *Discrete Mathematics* 111, 189–196.

P. Erdős, R. Graham, I. Ruzsa, and H. Taylor (1992), Bounds for arrays of dots with distinct slopes or lengths, *Combinatorica* 12, 39–44.

P. Erdős, A. Hajnal, A. Máté, and R. Rado (1984), *Combinatorial Set Theory: Partition Relations for Cardinals,* North-Holland, Amsterdam.

P. Erdős, L. Lovász, A. Simmons, and E. Strauss (1973), Dissection graphs of planar point sets, in: *A Survey of Combinatorial Theory* (G. Srivastava, ed.), North-Holland, Amsterdam, 139–149.

P. Erdős, E. Makai, J. Pach, and J. Spencer (1991), Gaps in difference sets, and the graph of nearly equal distances, in: *Applied Geometry and Discrete Mathematics: The Victor Klee Festschrift* (P. Gritzmann and B. Sturmfels, eds.), DIMACS Series, vol. 4, American Mathematical Society, Providence, RI, 265–273.

P. Erdős, A. Meir, V. Sós, and P. Turán (1971), On some applications of graph theory II (presented to R. Rado), in: *Studies in Pure Applied Mathematics*, (L. Mirksy,

ed.), Academic Press, London, 89–93.

P. Erdős, A. Meir, V. Sós, and P. Turán (1972a), On some applications of graph theory I, *Discrete Mathematics* 2, 207–228. [Corrigendum, *Discrete Mathematics* 4 (1973), 90.]

P. Erdős, A. Meir, V. Sós, and P. Turán (1972b), On some applications of graph theory III, *Canadian Mathematical Bull.* 15, 27–32.

I. Fáry (1948), On straight line representation of planar graphs, *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 11, 229–233.

I. Fáry (1950), Sur la densité des réseaux de domaines convexes, *Bull. Société Mathématique de France* 78, 152–161.

R. Faudree and M. Simonovits (1983), On a set of degenerate extremal graph problems, *Combinatorica* 3, 83–94.

G. Fejes Tóth (1972), Covering the plane by convex discs, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 23, 263–270.

G. Fejes Tóth (1976), Multiple packing and covering of the plane with circles, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 27, 135–140.

G. Fejes Tóth (1977a), On a Dowker-type theorem of Eggleston, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 29, 131-148.

G. Fejes Tóth (1977b), On the intersection of a convex disc and a polygon, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 29, 149-153.

G. Fejes Tóth (1980), On the section of a packing of equal balls, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 15, 487–489.

G. Fejes Tóth (1983), New results in the theory of packing and covering, in: *Convexity and Its Applications* (P. Gruber and J. Wills, eds.), Birkhäuser Verlag, Basel, 318–359.

G. Fejes Tóth (2005), Covering with fat convex discs, *Discrete and Computational Geometry* 34, 129–141.

G. Fejes Tóth and L. Fejes Tóth (1973a), Remark on a paper of C.H. Dowker, *Periodica Mathematica Hungarica* 3, 271–274.

G. Fejes Tóth and L. Fejes Tóth (1973b), On totally separable domains, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 24, 229–232.

G. Fejes Tóth and W. Kuperberg (1993a), Recent results in the theory of packing and covering, in: *New Trends in Discrete and Computational Geometry* (J. Pach, ed.), Springer-Verlag, New York, 251–279.

G. Fejes Tóth and W. Kuperberg (1993b), Blichfeldt's density bound revisited, *Mathematische Annalen.* 295, 721–727.

G. Fejes Tóth and W. Kuperberg (1995), Thin non-lattice covering with an affine image of a strictly convex body, *Mathematika* 42, 239–250.

G. Fejes Tóth and W. Kuperberg (1993d), Packing and covering with convex sets, in: *Handbook of Convex Geometry*, vol. B (P. Gruber and J. Wills, eds.), North-Holland,

Amsterdam, 799–860.

L. Fejes Tóth (1950), Some packing and covering theorems, *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 12/A, 62–67.

L. Fejes Tóth (1959a), Annäherung von Eibereichen durch Polygone, *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte* 6, 253–261.

L. Fejes Tóth (1959b), Kugelunterdeckungen und Kugelüberdeckungen in Räumen konstanter Krümmung, *Archiv der Mathematik* 10, 307–313.

L. Fejes Tóth (1964), *Regular Figures*, Pergamon Press, New York.

L. Fejes Tóth (1967), On the arrangement of houses in a housing estate, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 2, 37–42.

L. Fejes Tóth (1969), Über die Nachbarschaft eines Kreises in einer Kreispackung, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 4, 93–97.

L. Fejes Tóth (1953,1972), *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, 1st and 2nd eds., Springer-Verlag, New York.

L. Fejes Tóth (1975), On Hadwiger numbers and Newton numbers of a convex body, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 10, 111–115.

L. Fejes Tóth (1976), Close packing and loose covering with balls, *Publ. Mathematicae Debrecen* 23, 323–326.

L. Fejes Tóth (1977), Research problem, *Periodica Mathematica Hungarica* 8, 103–104.

L. Fejes Tóth (1978–1982), Egy kört eltakaró körökről, *Matematikai Lapok*, 30, 317–320.

L. Fejes Tóth (1983), On the densest packing of convex discs, *Mathematika* 30, 1–3.

L. Fejes Tóth (1984a), Density bounds for packing and covering with convex discs, *Expositiones Mathematicae* 2, 131–153.

L. Fejes Tóth (1984b), Compact packing of circles, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 19, 103–107.

L. Fejes Tóth (1985), Densest packing of translates of a domain, *Acta Mathematica Hungarica* 45, 437–440.

L. Fejes Tóth (1986), Densest packing of translates of the union of two circles, *Discrete and Computational Geometry* 1, 307–314.

L. Fejes Tóth and A. Florian (1982), Packing and covering with convex discs, *Mathematika* 29, 181–193.

L. Few (1964), Multiple packings of spheres, *J. London Mathematical Society* 39, 51–54.

P. Fishburn and J. Reeds (1992), Unit distances between vertices of a convex polygon, *Computational Geometry: Theory and Applications* 2, 81–91.

M. Formann, T. Hagerup, J. Haralambides, M. Kaufmann, T. Leighton, A. Simvonis, E. Welzl, and G. Woeginger (1993), Drawing planar graphs in the plane with high resolution, *SIAM J. Computing* 22, 1035–1052.

J. Fox and J. Pach (2008a), Separator theorem and Turán-type results for planar intersec-

tion graphs, *Advances in Mathematics*, to appear.

J. Fox and J. Pach (2008b), Coloring K_k-free intersection graphs, to appear.

P. Frankl and J. Pach (1983), On the number of sets in a null-t-design, *European J. Combinatorics* 4, 21–23.

P. Frankl and J. Pach (1984), On disjointly representable sets, *Combinatorica* 4, 39–45.

P. Frankl and R. Wilson (1981), Intersection theorems with geometric consequences, *Combinatorica* 1, 259–286.

P. Frankl, Z. Füredi, and J. Pach (1987), Bounding one-way differences, *Graphs and Combinatorics* 3, 341–347.

H. de Fraysseix, P. de Mendez, and P. Rosenstiehl (1994), On triangle contact graphs, *Combinatorics, Probability and Computing* 3, 233–246

H. de Fraysseix, J. Pach, and R. Pollack (1990), How to draw a planar graph on a grid, *Combinatorica* 10, 41–51.

G. Frederickson (1987), Fast algorithms for shortest paths in planar graphs, with applications, *SIAM J. Computing* 16, 1004–1022.

G. Freiman (1966), *Foundations of a Structural Theory of Set Addition* (in Russian), Kazanskiĭ Gosudarstvenniĭ Pedagogicheskiĭ Institut, Kazan.

G. Freiman (1973), *Foundations of a Structural Theory of Set Addition*, *Translations of Mathematical Monographs* 37, American Mathematical Society, Providence, RI.

G. Freiman (1987), What is the structure of K if $K + K$ is small, in: *Number Theory, Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1240 (S. Benkoski, ed.), Springer-Verlag, New York, 109–134.

Z. Füredi (1990), The maximum number of unit distances in a convex n–gon, *J. Combinatorial Theory, Series A* 55, 316–320.

Z. Füredi (1991a), Turán type problems, in: *Survey in Combinatorics*, *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, vol. 166 (A. Keedwell, ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 253–300.

Z. Füredi (1991b), On a Turán type problem of Erdős, *Combinatorica* 11, 75–79.

Z. Füredi (1996), New asymptotics for bipartite Turán numbers, *J. Combinatorial Theory, Series A* 75, 141–144.

Z. Füredi and P. Hajnal (1992), Davenport-Schinzel theory of matrices, *Discrete Mathematics* 103, 233–251.

T. Gallai (1944), Solution of Problem 4065, *American Mathematical Monthly* 51, 169–171.

M. Garey and D. Johnson (1979), *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, New York.

C. Gauss (1836), Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seeber, *Göttingische gelehrte Anzeigen* 1831, Juli 9, see *Werke II*, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 188–196.

H. GAZIT AND G. MILLER (1990), Planar separators and the Euclidean norm, in: *Algorithms, Lecture Notes in Computer Science*, vol. 450 (T. Asano et al., eds.), Springer-Verlag, New York, 338–347.

J. GILBERT (1980), *Graph Separator Theorems and Sparse Gaussian Elimination*, Ph.D. Thesis, Stanford University, Stanford, CA.

J. GILBERT AND R. TARJAN (1987), The analysis of a nested dissection algorithm, *Numerische Mathematik* 50, 377–404.

J. GILBERT, J. HUTCHINSON, AND R. TARJAN (1984), A separator theorem for graphs of bounded genus, *J. Algorithms* 5, 391–407.

W. GODDARD, M. KATCHALSKI, AND D. KLEITMAN (1996), Forcing disjoint segments in the plane, *European J. Combinatorics* 17, 391–395.

J. E. GOODMAN AND J. O'ROURKE, EDS. (2004), *Handbook of Discrete and Computational Geometry* (2nd ed.), *Discrete Mathematics and Its Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida.

W.T. GOWERS (2006), Quasirandomness, counting and regularity for 3-uniform hypergraphs, *Combinatorics, Probability and Computing* 15, 143–184.

R. GRAHAM (1981), *Rudiments of Ramsey Theory, CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, No. 45, American Mathematical Society, Providence, RI.

R. GRAHAM, B. ROTHSCHILD, AND J. SPENCER (1990), *Ramsey Theory*, 2nd ed., Wiley, New York.

P. GRITZMANN (1985), Lattice covering of space with symmetric convex bodies, *Mathematika* 32, 311–315.

P. GRITZMANN, B. MOHAR, J. PACH, AND R. POLLACK (1991), Embedding a planar triangulation with vertices at specified points (solution to problem E3341), *American Mathematical Monthly* 98, 165-166.

H. GROEMER (1963), Existenzsätze für Lagerungen im Euklidischen Raum, *Mathematische Zeitschrift* 81, 260–278.

H. GROEMER (1968), Existenzsätze für Lagerungen in metrischen Räumen, *Monatshefte für Mathematik* 72, 325–334.

H. GROEMER (1986), Multiple packings and coverings, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 21, 189–200.

M. GRÖTSCHEL, L. LOVÁSZ, AND A. SCHRIJVER (1987), *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, New York.

P. GRUBER (1979), Geometry of numbers, in: *Contributions to Geometry* (J. Tölke and J. Wills, eds.), Birkhäuser Verlag, Basel, 186–225.

P. GRUBER (2007), *Convex and Discrete Geometry, Grundlehren Math. Wiss.* 336, Springer, Heidelberg.

P. GRUBER AND C. LEKKERKERKER (1987), *Geometry of Numbers*, 2nd ed., North–Holland,

Amsterdam.

B. GRÜNBAUM (1956), A proof of Vázsonyi's conjecture, *Bull. Research Council Israel, Section A* 6, 77–78.

B. GRÜNBAUM (1961), On a conjecture of Hadwiger, *Pacific J. Mathematics* 11, 215–219.

B. GRÜNBAUM (1963), Borsuk's problem and related questions, in: *Convexity, Proc. Symposia in Pure Applied Mathematics,* vol. 7 (V. Klee, ed.), American Mathematical Society, Providence, RI, 271–284.

B. GRÜNBAUM (1967), *Convex Polytopes*, Wiley, New York.

B. GRÜNBAUM (1972), *Arrangements and Spreads, CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, No. 10, American Mathematical Society, Providence, RI.

A. GYÁRFÁS AND J. LEHEL (1969), A Helly-type problem in trees, in: *Combinatorial Theory and Its Applications, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai,* vol. 4 (P. Erdős, ed.), North-Holland, Amsterdam, 571–584.

A. GYÁRFÁS AND J. LEHEL (1983), Hypergraph families with bounded edge cover or transversal numbers, *Combinatorica* 3, 351-358.

A. GYÁRFÁS AND J. LEHEL (1985), Covering and coloring problems for relatives of intervals, *Discrete Mathematics* 55, 167–180.

E. GYŐRI, J. PACH, AND M. SIMONOVITS (1991), On the maximal number of certain subgraphs in K_r–free graphs, *Graphs and Combinatorics* 7, 31–37.

H. HADWIGER (1945), Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers, *Commentarii Mathematica Helvetici* 18 (1945/46), 73–75.

H. HADWIGER (1946), Mitteilung betreffend meine Note: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers, *Commentarii Mathematica Helvetici* 19 (1946/47), 71–73.

H. HADWIGER (1969), Überdeckung des Raumes durch translationsgleiche Punktmengen und Nachbarzahlen, *Monatshefte für Mathematik* 73, 213–217.

H. HADWIGER, H. DEBRUNNER, AND V. KLEE (1964), *Combinatorial Geometry in the Plane*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

T. C. HALES (2005), A proof of the Kepler conjecture, *Annals of Mathematics* 162, 1065–1185.

P. HALL (1935), On representatives of subsets, *J. London Mathematical Society* 10, 26–30.

H. HANSEN (1978), Et isoperimetrisk problem, *Nordisk Mathematisk Tidskrift* 25-26, 181–184.

H. HARBORTH (1974), Solution to problem 664A, *Elemente der Mathematik* 29, 14–15.

G. HARDY AND E. WRIGHT (1960), *The Theory of Numbers*, 4th ed., Oxford University Press, London.

D. HAUSSLER (1991), Sphere packing numbers for subsets of the Boolean n-cube with bounded Vapnik-Chervonenkis dimension, Tech. Rept. UCSC-CRL-91-41, University of

California at Santa Cruz. Also: *J. Combinatorial Theory, Series A* 69 (1995), 217–232.

D. HAUSSLER AND E. WELZL (1987), ε–nets and simplex range queries, *Discrete and Computational Geometry* 2, 127–151.

D. HEATH-BROWN (1987), Integer sets containing no arithmetic progressions, *J. London Mathematical Society* 35, 385–394.

E. HELLY (1923), Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten, *Jahresbericht Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 32, 175–176.

A HEPPES (1956), Beweis einer Vermutung von A. Vázsonyi, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 7, 463–466.

A HEPPES (1964), Filling of a domain by discs, *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézet Közleményei* 8, 363–371.

A HEPPES (1990), On the packing density of translates of a domain, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 25, 117–120.

A HEPPES AND P. RÉVÉSZ (1956), Zum Borsukschen Zerteilungsproblem, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 7, 159–162.

A. HINRICHS AND C. RICHTER (2003), New sets with large Borsuk numbers, *Discrete Mathematics* 27, 137–147.

E. HLAWKA (1944), Zur Geometrie der Zahlen, *Mathematische Z.* 49, 285–312.

H. HOPF AND E. PANNWITZ (1934), Aufgabe Nr. 167, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 43, 114.

R. HOPPE (1874), Bemerkung der Redaktion, *Archiv Mathematical Physik (Grunert)* 56, 307–312.

W.-Y. HSIANG (1993), On the sphere packing problem and the proof of Kepler's conjecture, *International J. Mathematics* 4, 739–831.

W.-Y. HSIANG (2001), *Least Action Principle of Crystal Formation of Dense Packing Type and Kepler's Conjecture. Nankai Tracts in Mathematics* 3, World Scientific, River Edge, NJ.

A. HURWITZ (1891), Über die Approximationen von zwei komplexen inhomogenen Linearformen, *Monatschefte für Mathematik* 56, 61–74.

W. IMRICH (1984), Explicit construction of graphs without small cycles, *Combinatorica* 4, 53–59.

D. ISMAILESCU (1998), Covering the plane with copies of a convex disk, *Discrete and Computational Geometry* 20, 251–263.

B. JACKSON AND G. RINGEL (1984), Colorings of circles, *American Mathematical Monthly* 91, 42–49.

S. JÓZSA AND E. SZEMERÉDI (1975), The number of unit distances in the plane, in: *Infinite and Finite Sets, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai,* vol. 10 (A. Hajnal et al., eds), North–Holland, Amsterdam, 939–950.

G. KABATJANSKIĬ AND V. LEVENŠTEIN (1978), Bounds for packing on a sphere and in space, *Problems in Information Transmission* 14, 1–17.

J. KAHN AND G. KALAI (1993), A counterexample to Borsuk's conjecture, *Bull. American Mathematical Society* 29, 60–62.

J. KARAMATA (1932), Sur une inégalité relative aux fonctions, *Publications Mathématiques Univ. Belgrade* 1, 145–148.

G. KÁROLYI, J. PACH, AND G. TÓTH (1996), Ramsey-type results for geometric graphs, *Proc. 12th Annual Symposium on Computational Geometry*, 359–365. Also: *Discrete and Computational Geometry* 18 (1997), 247–255.

G. KATONA (1969), Graphs, vectors and inequalities in probability theory (in Hungarian), *Matematikai Lapok* 20, 123–127.

G. KATONA (1978), Continuous versions of some extremal hypergraph problems, in: *Combinatorics, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai,* vol. 18 (A. Hajnal and V.T. Sós, eds.), North–Holland, Amsterdam, 653–678.

G. KATONA, T. NEMETZ, AND M. SIMONOVITS (1964), On a problem of Turán in the theory of graphs (in Hungarian), *Matematikai Lapok* 15, 228–238.

G. KATONA, R. MAYER AND, W. WOYCZYŃSKI (2004), Length of sums in a Minkowski space, in: *Towards a Theory of Geometric Graphs* (J. Pach, ed.), *Contemporary Mathematics,* vol. 342, American Mathematical Society, Providence, RI, 77–83.

N. H. KATZ AND G. TARDOS (2004), A new entropy inequality for the Erdős distance problem, in: *Towards a Theory of Geometric Graphs* (J. Pach, ed.), *Contemporary Mathematics,* vol. 342, American Mathematical Society, Providence, RI, 119–126.

L. KELLY AND W. MOSER (1958), On the number of ordinary lines determined by n points, *Canadian J. Mathematics* 10, 210–219.

R. KERSHNER (1939), The number of circles covering a set, *American J. Mathematics* 61, 665–671.

G. KERTÉSZ (1987), Lecture given at the Conference on Discrete Geometry, Oberwolfach.

L. KHACHIYAN (1993), Complexity of polytope volume computation, in: *New Trends in Discrete and Computational Geometry* (J. Pach, ed.), Springer-Verlag, New York, 91–101.

V. KLEE AND S. WAGON (1991), *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory,* Dolciani Mathematical Expositions, vol. 11, Mathematical Association of America, Washington, DC.

P. KOEBE (1936), Kontaktprobleme der konformen Abbildung, *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften, Leipzig, Mathematische-Physische Klasse* 88, 141–164.

J. KOLLÁR, L. RÓNYAI, AND T. SZABÓ (1996), Norm-graphs and bipartite Turán numbers, *Combinatorica* 16, 399–406.

J. KOMLÓS, J. PACH, AND G. WOEGINGER (1992), Almost tight bounds for epsilon-nets, *Discrete and Computational Geometry* 7, 163–173.

D. KÖNIG (1936), *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig. (English translation: *Theory of Finite and Infinite Graphs*, Birkhäuser Verlag, Boston, 1990.)

A. KOSTOCHKA (1982), A class of constructions for Turán's (3, 4)-problem, *Combinatorica* 2, 187–192.

D. KOTTWITZ (1991), The densest packing of equal circles on a sphere, *Acta Crystallographica A* 47, 158–165.

T. KŐVÁRI, V. SÓS, AND P. TURÁN (1954), On a problem of K. Zarankiewicz, *Colloquium Mathematicum* 3, 50–57.

L. KUIPERS AND H. NIEDERREITER (1974), *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley Interscience, New York.

G. KUPERBERG AND W. KUPERBERG (1990), Double lattice packings of convex bodies in the plane, *Discrete and Computational Geometry* 5, 389–397.

W. KUPERBERG (1982), Packing convex bodies in the plane with density greater than 3/4, *Geometriae Dedicata* 13, 149–155.

W. KUPERBERG (1987), An inequality linking packing and covering densities of plane convex bodies, *Geometriae Dedicata* 23, 59–66.

W. KUPERBERG (1989), Covering the plane with congruent copies of a convex body, *Bull. London Mathematical Society* 21, 82–86.

Y. KUPITZ (1979), *Extremal Problems in Combinatorial Geometry*, *Aarhus University Lecture Notes Series*, No. 53, Aarhus University, Denmark.

Y. KUPITZ (1984), On pairs of disjoint segments in convex position in the plane, *Ann. Discrete Mathematics* 20, 203–208.

G. LANG (1955), The dual of a well-known theorem, *Mathematical Gazette* 39, 314.

D. LARMAN, J. MATOUŠEK, J. PACH, AND J. TÖRŐCSIK (1994), A Ramsey-type result for planar convex sets, *Bull. London Mathematical Society* 26, 132–136.

M. LAS VERGNAS AND L. LOVÁSZ (1972), see D. Woodall, Property B and the four colour problem, in: *Combinatorics, Proc. Conference on Combinatorial Mathematics* (D. Welsh and D. Woodall, eds.), Institute of Mathematics and Its Applications, Southend-on-Sea, Essex, England, 322–340.

D. LÁZÁR (1947), Sur l'approximation des courbes convexes par des polygones, *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 11, 129–132.

J. LEECH (1967), Notes on sphere packing, *Canadian J. Mathematics* 19, 251–267.

J. LEECH AND N. SLOANE (1971), Sphere packing and error-correcting codes, *Canadian J. Mathematics* 23, 718–745.

H. LEFMANN AND T. THIELE (1995), Point sets with distinct distances, *Combinatorica* 15, 379–408.

T. LEIGHTON (1983), *Complexity Issues in VLSI, Foundations of Computing Series*, MIT Press, Cambridge, MA.

C. LEISERSON (1983), *Area Efficient VLSI Computation, Foundations of Computing Series*, MIT Press, Cambridge, MA.

H. LENZ (1955), Zur Zerlegung von Punktmengen in solche kleineren Durchmessers, *Archiv der Mathematik* 6, 413–416.

V. LEVENŠTEIN (1975), Maximal packing density of equal spheres in n–dimensional Euclidean space, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR* 18, 765–771.

V. LEVENŠTEIN (1979), On bounds for packings in n–dimensional Euclidean space, *Doklady Akademii Nauk SSSR* 245, 1299–1303. [English trasnlation appears in *Soviet Mathematics, Doklady* 20 (1979), 417–421.]

W. LEVEQUE (1956), *Topics in Number Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA.

J. LINDSEY II (1986), Sphere packing in $\mathbb{R}^3$, *Mathematika* 33, 137–147.

J. VAN LINT (1982), *Introduction to Coding Theory*, Springer-Verlag, New York.

R. LIPTON AND R. TARJAN (1979), A separator theorem for planar graphs, *SIAM J. Applied Mathematics* 36, 177–189.

R. LIPTON AND R. TARJAN (1980), Applications of the planar separator theorem, *SIAM J. Computing* 9, 615–627.

R. LIPTON, D. ROSE, AND R. TARJAN (1979), Generalized nested dissection, *SIAM J. Numerical Analysis* 16, 346–358.

L. LOVÁSZ (1971), On the number of halving lines, *Annales Universitatis Scientarium Budapest, Eötvös, Sectio Mathematica* 14, 107–108.

L. LOVÁSZ (1972), On the sieve-formula (in Hungarian), *Matematikai Lapok* 23, 53–69.

L. LOVÁSZ (1975), On the ratio of optimal integral and fractional cover, *Discrete Mathematics* 13, 383–390.

L. LOVÁSZ (1979), *Combinatorial Problems and Exercises*, North-Holland, Amsterdam, and Akadémiai Kiadó, Budapest.

L. LOVÁSZ AND M. SIMONOVITS (1990), The mixing rate of Markov chains, an isoperimetric inequality, and computing the volume, *Proc. 31st Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 346–354. See also: Random walks in a convex body and an improved volume algorithm, *Random Structures and Algorithms* 4 (1993), 359–412.

L. LOVÁSZ AND B. SZEGEDY (2004), Limits of graph sequences, *Microsoft Research Technical Report*, MSR–TR–2004–79.

L. LOVÁSZ, K. VESZTERGOMBI, U. WAGNER, AND E. WELZL (2004), Convex quadrilaterals and k-sets, in: *Towards a Theory of Geometric Graphs* (J. Pach, ed.), *Contemporary Mathematics*, vol. 342, American Mathematical Society, Providence, RI, 139–148.

L. LOVÁSZ, J. PACH, AND M. SZEGEDY (1995), On Conway's thrackle conjecture, *Proc. 11th Annual Symposium on Computational Geometry*, 147–151.

A. LUBOTZKY, R. PHILIPS, AND P. SARNAK (1988), Ramanujan graphs, *Combinatorica* 8, 261-277.

E. LUTWAK (1979), Inequalities related to a problem of Moser, *American Mathematical Monthly* 86, 476-477.

A. MACBEATH (1951), An extremal property of the hypersphere, *Proc. Cambridge Philosophical Society* 47, 245–247.

K. MAHLER (1946a), The theorem of Minkowski–Hlawka, *Duke Mathematical Journal* 13, 611–621.

K. MAHLER (1946b), On lattice points in n–dimensional star bodies I. Existence theorems, *Proc. Royal Society London A* 187, 151–187.

K. MAHLER (1947), On the minimum determinant and the circumscribed hexagons of a convex domain, *Proc. K. Ned. Akad. Wet. Amsterdam* 50, 692–703.

E. MAKAI, JR. (1987), Five-neighbor packing of convex plates, in: *Intuitive Geometry, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai,* vol. 48 (K. Böröczky and G. Fejes Tóth, eds.), North–Holland, Amsterdam, 373–381.

S. MALITZ AND A. PAPAKOSTAS (1992), On the angular resolution of planar graphs, *Proc. 24th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 527–538. Also: *SIAM J. Discrete Mathematics* 7 (1994), 172–183.

A. MARCUS AND G. TARDOS (2004), Excluded permutation matrices and the Stanley-Wilf conjecture, *J. Combinatorial Theory, Series A* 107, 153–160.

A. MARDEN AND B. RODIN (1990), On Thurston's formulation and proof of Andreev's Theory, in: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1435 (St. Ruscheweyh et al., eds.), Springer-Verlag, New York, 103–115.

G. MARGULIS (1982), Explicit constructions of graphs without short cycles and low density codes, *Combinatorica* 2, 71–78.

J. MATOUŠEK (1990), Construction of ε-nets, *Discrete and Computational Geometry* 5, 427–448.

J. MATOUŠEK (1992), Efficient partition trees, *Discrete and Computational Geometry* 8, 315–384.

J. MATOUŠEK (1995), Tight upper bounds for the discrepancy of half-spaces, *Discrete and Computational Geometry* 13, 593-601.

J. MATOUŠEK (1997), On discrepancy bounds via dual shatter function, *Mathematika* 44, 42–49.

J. MATOUŠEK (2002), *Lectures on Discrete Geometry, Graduate Texts in Mathematics* 212, Springer, New York.

J. MATOUŠEK AND J. SPENCER (1996), Discrepancy in arithmetic progressions, *J. American Mathematical Society* 9, 195–204.

J. MATOUŠEK, E. WELZL, AND L. WERNISCH (1993), Discrepancy and approximations for

bounded VC-dimension, *Combinatorica* 13, 455–466.

K. MEHLHORN (1985), *Multi-dimensional Searching and Computational geometry*, Springer-Verleg, Berlin.

E. MELCHIOR (1940), Über Vielseite der projektiven Ebene, *Deutsche Mathematik* 5, 461–475.

G. MILLER (1986), Finding small simple cycle separators for 2-connected planar graphs, *J. Computer and Systems Sciences* 32, 265–279.

G. MILLER AND W. THURSTON (1990), Separators in two and three dimensions, *Proc. 22nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 300–309.

G. MILLER, S. TENG, AND S. VAVASIS (1991), A unified geometric approach to graph separators, *Proc. 32nd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 538–547.

G. MILLER, S.-H. TENG, W. THURSTON, AND S. A. VAVASIS (1997), Separators for sphere-packings and nearest neighbor graphs, *J. ACM* 44, 1–29.

H. MINKOWSKI (1896), *Geometrie der Zahlen*, Leipzig and Berlin.

H. MINKOWSKI (1904), Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper, *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 311–355.

H. MINKOWSKI (1905), Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz, *J. reine und angewandte Mathematik* 129, 220–274.

J. MOLNÁR (1955), Konvex tartományok beírt és körülírt poligonjairól, *Matematikai Lapok* 6, 210–218.

J. MOON AND L. MOSER (1962), On a problem of Turán, *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézet Közleményei* 7, 283–286.

J. MOON AND L. MOSER (1965), On cliques in graphs, *Israel J. Mathematics* 3, 23–28.

M. MÖRS (1981), A new result on the problem of Zarenkiewicz, *J. Combinatorial Theory, Series A* 31, 126–130.

L. MOSER (1952), On different distances determined by n points, *American Mathematical Monthly* 59, 85–91.

W. MOSER AND J. PACH (1986), *Research Problems in Discrete Geometry*, Preprint, McGill University, to be published by Academic Press. See also *DIMACS Tech. Report* 93–32.

W. MOSER AND J. PACH (1993), Recent developments in combinatorial geometry, in: *New Trends in Discrete and Computational Geometry* (J. Pach, ed.), Springer-Verlag, New York, 281–302.

T. MOTZKIN (1951), The lines and planes connecting the points of a finite set, *Trans. American Mathematical Society* 70, 451–464.

T. MOTZKIN AND E. STRAUSS (1965), Maxima for graphs and a new proof of a theorem of Turán, *Canadian J. Mathematics* 17, 533–540.

D. MOUNT (1991), The densest double-lattice packing of a convex polygon, in: *Discrete and*

Computational Geometry: Papers from DIMACS Special Year, DIMACS Series, vol. 6 (J. Goodman et al., eds.), American Mathematical Society, Providence, RI, 245–262.

D. MOUNT AND R. SILVERMAN (1990), Packing and covering the plane with translates of a convex polygon, *J. Algorithms* 11, 564–580.

D. MUDER (1988); Putting the best face on a Voronoi polyhedron, *Proc. London Mathematical Society* (3) 56, 329–348.

D. MUDER (1993), A new bound on the local density of sphere packings, *Discrete and Computational Geometry* 10, 351-375.

A. MÜLLER (1953), Auf einem Kreis liegende Punktmengen ganzzahliger Entfernungen, *Elemente der Mathematik* 8, 37–38.

K. MULMULEY (1994), *Computational Geometry: An Introduction Through Randomized Algorithms*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

D. NAIMAN AND H. WYNN (1997), On intersecting a point set with Euclidean balls, *Computational Geometry: Theory and Applications* 7, 237–244.

C. Nash-Williams (1959), Random walk and electric current in networks, *Proc. Cambridge Philosophical Society* 55, 181–199.

C. NEADERHOUSER AND G. PURDY (1982), On finite sets in $\mathbb{E}^k$ in which the diameter is frequently achieved, *Periodica Mathematica Hungarica* 13, 253–257.

A. NILLI (1993), On Borsuk's problem, in: *Proc. Combinatorics Conference*, Jerusalem, (H. Barcelo and G. Kalai, eds.), *Contemporary Mathematics*, vol. 178 (1994), American Mathematical Society, Providence, RI, 209–210.

I. NIVEN AND H. ZUCKERMAN (1966) *An Introduction to the Theory of Numbers*, Wiley, New York.

A. ODLYZKO AND N. SLOANE (1979), New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions, *J. Combinatorial Theory, Series A* 26, 210–214.

P. O'DONNEL AND M. PERLES (1990), Every geometric graph with n vertices and $3.6n+3.4$ edges contains 3 pairwise disjoint edges, manuscript, Rutgers University, New Brunswick, NJ.

O. ORE (1961), Arc covering of graphs, *Annali di Mathematica Pura ed Applicata IV* 55, 315–321.

J. OROURKE (1994), *Computational Geometry in C*, Cambridge University Press, Cambridge.

F. ÖSTERREICHER AND J. LINHART (1981), Packungen kongruenter Stäbchen mit konstanter Nachbarnzahl, *Elemente der Mathematik* 37, 5–16.

J. PACH (1980), Decomposition of multiple packing and covering, *Proc. 2nd Kolloquium über Diskrete Geometrie*, Salzburg, 169–178.

J. PACH (1991), Notes on geometric graph theory, in: *Discrete and Computational Geometry: Papers from DIMACS Special Year*, DIMACS Series, vol. 6 (J. Goodman et al., eds.), American Mathematical Society, Providence, RI, 273–285.

J. PACH (1997), A remark on transversal numbers, in: *The Mathematics of Paul Erdős* vol. II, (R. Graham and J. Nešetřil, eds.), *Algorithms and Combinatorics* 14, Springer-Verlag, Heidelberg, 310–317.

J. PACH ED. (2004), *Towards a Theory of Geometric Graphs, Contemporary Mathematics Series*, vol. 342, American Mathematical Society, Providence.

J. PACH AND R. PINCHASI (2003), How many unit equilateral triangles can be generated by N points in convex position? *American Mathematical Monthly* 110, 400–406.

J. PACH AND M. SHARIR (1992), Repeated angles in the plane and related problems, *J. Combinatorial Theory, Series A* 59, 12–22.

J. PACH AND M. SHARIR (1998), On the number of incidences between points and curves, *Combinatorics, Probability and Computing* 7, 121–127.

J. PACH AND M. SHARIR (2004), Geometric incidences, in: *Towards a Theory of Geometric Graphs* (J. Pach, ed.), *Contemporary Mathematics*, vol. 342, American Mathematical Society, Providence, RI, 185–223.

J. PACH AND G. TARDOS (2002), Isosceles triangles determined by a planar point set, *Graphs and Combinatorics* 18, 769–779.

J. PACH AND G. TARDOS (2006), Forbidden paths and cycles in ordered graphs and matrices, *Israel J. Mathematics* 155, 359–380.

J. PACH AND J. TÖRŐCSIK (1993), Some geometric applications of Dilworth's theorem, *Proc. 9th Annual Symposium on Computational Geometry*, 264–269. Also: *Discrete and Computational Geometry* 12 (1994), 1–7.

J. PACH AND G. WOEGINGER (1990), Some new bounds for epsilon–nets, *Proc. 6th Annual Symposium on Computational Geometry*, 10–15.

J. PACH, R. RADOIČIĆ, AND G. TÓTH (2003), Relaxing planarity for topological graphs, in: *JCDCG 2002, Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2866 (J. Akiyama and M. Kano, eds.), Springer-Verlag, Berlin, 221–232.

J. PACH, R. RADOIČIĆ, AND J. VONDRÁK (2006a), On the diameter of separated point sets with many nearly equal distances, *European J. Combinatorics* 27, 1321–1332.

J. PACH, R. RADOIČIĆ, AND J. VONDRÁK (2006b), Nearly equal distances and Szemerédi's regularity lemma, *Computational Geometry: Theory and Applications* 34, 11–19.

J. PACH, R. RADOIČIĆ, G. TARDOS, AND G. TÓTH (2006), Improving the crossing lemma by finding more crossings in sparse graphs, *Discrete and Computational Geometry* 36, 527–552.

J. PACH, F. SHAHROKHI, AND M. SZEGEDY (1994), Applications of the crossing number, *Proc. 10th Annual Symposium on Computational Geometry*, 198–202.

J. PACH, W. STEIGER, AND E. SZEMERÉDI (1992), An upper bound on the number of planar k-sets, *Discrete and Computational Geometry* 7, 109–123.

C. PAPADIMITRIOU AND K. STEIGLITZ (1982), *Combinatorial Optimization: Algorithms and*

Complexity, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

R. POLLACK (1985), Increasing the minimum distance of a set of points, *J. Combinatorial theory, Series A* 40, 450.

L. PÓSA (1962), A theorem concerning Hamiltonian lines, *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézet Közleményei* 7A, 225–226.

F. PREPARATA AND M. SHAMOS (1985), *Computational Geometry: An Introduction*, Springer-Verlag, New York.

G. PURDY (1974), Some extremal problems in geometry II, *Discrete Mathematics* 7, 305–315.

G. PURDY (1988), Repeated angles in $\mathbb{E}^4$, *Discrete and Computational Geometry* 3, 73–75.

F. RAMSEY (1930), On a problem of formal logic, *Proc. London Mathematical Society*, Series 2, 30, 264–286.

V. REDDY AND S. SKIENA (1995), Frequencies of large distances in integer lattices, *Proc. Seventh International Conference on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms, and Applications, Kalamazoo, MI*, vol. 1, 2 (Y. Alavi and A. Schwenk, eds.), wiley, New york, 981–989.

I. REIMAN (1958), Über ein Problem von K. Zarankiewicz, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 9, 269–278.

K. REINHARDT (1934), Über die dichteste gitterförmige Lagerung kongruente Bereiche in der Ebene und eine besondere Art konvexer Kurven, *Abh. Mathematischen Seminar, Hamburg, Hansischer Universität, Hamburg*, 10, 216–230.

D. REUTTER (1972), Problem 664A, *Elemente der Mathematik* 27, 19.

A. RIESLING (1971), Borsuk's problem in three-dimensional spaces of constant curvature, *Ukrainskiĭ Geometričeskiĭ Sbornik* 11, 78–83.

B. RODIN (1987), Schwarz's lemma for circle packings, *Inventiones Mathematicae* 89, 271–289.

B. RODIN (1989), Schwarz's lemma for circle packings II, *J. Differential Geometry* 30, 539–554.

B. RODIN AND D. SULLIVAN (1987), The convergence of circle packings to Riemann mapping, *J. Differential Geometry* 26, 349–360.

V. RÖDL (1985), Personal communication.

V. RÖDL, B. NAGLE, J. SKOKAN, M. SCHACHT, AND Y. KOHAYAKAWA (2005), The hypergraph regularity method and its applications, *Proc. Nati. Acad. Sci. USA*, vol. 102, 8109–8113.

C. ROGERS (1947), Existence theorems in the geometry of numbers, *Ann. Mathematics* 48, 994–1002.

C. ROGERS (1951), The closest packing of convex two–dimensional domains, *Acta Mathematica* 86, 309–321.

C. ROGERS (1957), A note on coverings, *Mathematika* 4, 1–6.

C. ROGERS (1958), The packing of equal spheres, *Proc. London Mathematical Society*, Series 3, 8, 609–620.

C. ROGERS (1959), Lattice coverings of space, *Mathematika* 6, 33–39.

C. ROGERS (1964), *Packing and Covering*, Cambridge University Press, New York.

C. ROGERS (1971), Symmetrical sets of constant width and their partitions, *Mathematika* 18, 105–111.

C. ROGERS AND G. SHEPHARD (1957), The difference body of a convex body, *Archiv der Mathematik* 8, 220–233.

C. ROGERS AND G. SHEPHARD (1958), Convex bodies associated to a given convex body, *J. London Mathematical Society* 33, 270-281.

J. RUSH (1989), A lower bound on packing density, *Inventiones Mathematicae* 98, 499–509.

J. RUSH (1992), Thin lattice coverings, *J. London Mathematical Society* (2) 45, 193–200.

J. RUSH AND N. SLOANE (1987), An improvement to the Minkowski-Hlwaka bound for packing superballs, *Mathematika* 34, 8–18.

I. RUZSA (1978), On the cardinality of $A+A$ and $A-A$, in: *Combinatorics, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai,* vol. 18 (A. Hajnal and V.T. Sós, eds.), North-Holland, Amsterdam, 933-938.

I. RUZSA (1992), Arithmetical progressions and the number of sums, *Periodica Mathematica Hungarica* 25, 105–111.

H. SACHS (1994), Coin graphs, polyhedra, and conformal mapping, *Discrete Mathematics* 134, 133–138.

L. SANTALÓ (1952), *Introduction to Integral Geometry*, Actualités Scientifiques et Industrielles 1198, Hermann, Paris.

L. SANTALÓ (1976), *Integral Geometry and Geometric Probability, Encylopaedia of Mathematics and Its Applications*, vol. 1, Addison-Wesley, Reading, MA.

E. SAS (1939), Über eine Extremumeigenschaft der Ellipsen, *Compositio Mathematica* 6, 468–470.

N. SAUER (1971), A generalization of a theorem of Turán, *J. Combinatorial Theory, Series B* 10, 109–112.

N. SAUER (1972), On the density of families of sets, *J. Combinatorial Theory, Series A* 13, 145–147.

L. SCHLÄFLI (1901), Theorie der vielfachen Kontinuität, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen I*, Birkhäuser Verlag, Basel (1950), 209.

W. SCHMIDT (1963), On the Minkowski–Hlawka theorem, *Illinois J. Math.* 7, 18–23.

P. SCHMITT (1991), Disks with special properties of densest packings, *Discrete and Computational Geometry* 6, 181–190.

R. SCHNEIDER (1967), Eine allgemeine Extremaleigenschaft der Kugel, *Monatshefte für Mathematik* 71, 231–237.

R. SCHNEIDER (1971), Zwei Extremalaufgaben für konvexe Bereiche, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 22, 379–383.

R. SCHNEIDER (1993), *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory,* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge.

O. SCHRAMM (1988), Illuminating sets of constant width, *Mathematika* 35, 180–199.

O. SCHRAMM (1991), Rigidity of (infinite) circle packings, *J. American Mathematical Society* 4, 127–149.

M. SHARIR AND P. K. AGARWAL (1995), *Davenport-Schinzel Sequences and Their geometric Applications*, Cambridge University Press, New York.

S. SHELAH (1972), A combinatorial problem; stability and order for models and theories in infinitary languages, *Pacific J. Mathematics* 41, 247–261.

V. SIDEL'NIKOV (1973), On the densest packing of balls on the surface of the n-dimensional Euclidean sphere, and the number of vectors of a binary code with prescribed code distances, *Doklady Akademii Nauk SSSR* 213, 1029–1032. [English translation appears in *Soviet Mathematics Doklady* 14 (1973), 1851–1855.]

V. SIDEL'NIKOV (1974), New estimates for the packing of spheres in n–dimensional Euclidean space, *Matematicheskiĭ Sbornik* 95 (137), 148–158. [Also in *USSR Matematicheskiĭ Sbornik* 24 (1974), 147–157.]

M. SIMONOVITS (1966), A method for solving extremal problems in graph theory, stability problems, *Proc. Colloquium on Graph Theory*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 279–319.

M. SIMONOVITS (1983), Extremal graph theory, in: *Selected Topics in Graph Theory* (L. Beineke and R. Wilson, eds.), vol. 2, Academic Press, London, 161–200.

M. SIMONOVITS AND V. SÓS (1991), Szemerédi's partition and quasirandomness, *Random Structures and Algorithms* 2, 1–10.

R. SINGLETON (1966), On minimal graphs of maximum even girth, *J. Combinatorial Theory* 1, 306–332.

J. SOLYMOSI AND CS. T. TÓTH (2001), Distinct distances in the plane, *Discrete and Computational Geometry* 25, 629–634.

J. SOLYMOSI AND V. VU (2004), Distinct distances in high dimensional homogeneous sets, in: *Towards a Theory of Geometric Graphs* (J. Pach, ed.), *Contemporary Mathematics,* vol. 342, American Mathematical Society, Providence, RI, 259–268.

J. SOLYMOSI AND V. VU (2007), Near optimal bound for the distinct distance problem in high dimensions, *Combinatorica,* in press.

V. SÓS (1970), On extremal problems in graph theory, in: *Combinatorial Structure and Their Applications* (R. Guy et al., eds.), Gordon and Breach Science Publishers, New York, 407–410.

V. SÓS (1989), (Ed.) *Irregularities of Partitions*, Springer-Verlag, Berlin.

J. SPENCER (1972), Turán's theorem for k-graphs, *Discrete Mathematics* 2, 183–186.

J. SPENCER (1985), Six standard deviations suffice, *Trans. American Mathematical Society* 289, 679–706.

J. SPENCER (1987), *Ten Lectures on the Probabilistic Method*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

J. SPENCER (1990), Uncrowded graphs, in: *Mathematics of Ramsey Theory* (J. Nešetřil and V. Rödl, eds.), Springer-Verlag, New York, 253–262.

J. SPENCER, E. SZEMERÉDI, AND W. TROTTER JR. (1984), Unit distances in the Euclidean plane, in: *Graph Theory and Combinatorics* (B. Bollobás, ed.), Academic Press, New York, 293–303.

E. SPERNER (1928), Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Mathematische Zeitschrift* 27, 544–548.

K. STEPHENSON (1990), Circle packings in the approximation of conformal mappings, *Bull. American Mathematical Society* 23, 407–415.

S. STRASZEWICZ (1957), Sur un problème géométrique de Erdős, *Bull. Académie Polonaise des Sciences,* Cl. III 5, 33–40.

J. SUTHERLAND (1935), Solution to problem 167, *Jahresbericht det Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 45, 33–34.

K. SWANEPOEL (2007), A new proof of Vázsonyi's conjecture, to appear.

K. SWANEPOEL (2008), Unit distances and diameters in Euclidean spaces, *Discrete and Computational Geometry*, to appear.

K. SWANEPOEL AND P. VALTR (2004), The unit distance problem on spheres, in: *Towards a Theory of Geometric Graphs* (J. Pach, ed.), *Contemporary Mathematics*, vol. 342, American Mathematical Society, Providence, RI, 273–279.

J. SYLVESTER (1893), Mathematical question 11851, *Educational Times* 59, 98–98.

L. SZÉKELY (1997), Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry, *Combinatorics, Probability and Computing* 6, 353–358.

G. SZEKERES (1941), On an extremum problem in the plane, *American J. Mathematics* 63, 208–210.

E. SZEMERÉDI (1978), Regular partitions of graphs, in: *Problèmes Combinatoires et Théorie de Graphes* (J. Bermond et al., eds.), Coll. Internationaux C.N.R.S., 260, C.N.R.S., Paris, 399–401.

E. SZEMERÉDI (1990), Integer sets containing no arithmetic progressions, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 56, 155–158.

E. SZEMERÉDI AND W. TROTTER JR. (1983a), A combinatorial distinction between the Euclidean and projective planes, *European J. Combinatorics* 4, 385–394.

E. SZEMERÉDI AND W. TROTTER JR. (1983b), Extremal problems in discrete geometry, *Combinatorica* 3, 381–392.

P. TAMMELA (1970), Ocenka kritičeskogo opredelitelja dvumernoĭvypukloĭ simmetričnoĭ

oblasti (An estimate of the critical determinant of a two-dimensional convex symmetric domain), *Izvestija Vysših Učebnyh Zavedenii Matematika* 103, 103–107.

R. TAMMES (1930), On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen grains, *Recueil des travaux Botaniques Neerlandais* 27, 1–84.

T. TAO (2006), Szemerédi's regularity lemma revisited, *Contrib. Discrete Math.* 1, 8–28.

T. TAO AND V. VU (2006), *Additive combinatorics. Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 105, Cambridge University Press, Cambridge.

G. TARDOS (2005), On 0-1 matrices and small excluded submatrices, *J. Combinatorial Theory, Series A* 111, 266–288.

S. TENG (1991), *Points, Spheres, and Separators: A Unified Geometric Approach to Graph Partitioning*, Ph.D. Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA.

T. THIELE (1993), Point sets with distinct slopes or lengths, manuscript, preprint, FU-Berlin.

A. THUE (1892), Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer, *Forandlingerneved de Skandinaviske Naturforskeres* 14, 352–353.

A. THUE (1910), Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in der Ebene, *Christinia Vid. Selsk. Skr.* 1, 1–9.

W. THURSTON (1985a), *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, Princeton Lecture Notes, Princeton University Press, princeton, NJ, Chapter 13.

W. THURSTON (1985b), The finite Riemann mapping theorem, Lecture delivered at the *International Symposium in Celebration of the Proof of the Bieberbach Conjecture*, Purdue University, West lafayette, IN.

D. TODOROV (1983), On Turán numbers, in: *Mathematics and Mathematical Education* (W. Mills, ed.), Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 123–128.

G. TÓTH (1997), The shortest distance among points in general position, *Computational Geometry: Theory and Applications* 8, 33–38.

G. TÓTH (2000), Note on geometric graphs, *J. Combinatorial Theory, Series A* 89, 126–132.

G. TÓTH (2001), Point sets with many k-sets, *Discrete and Computational Geometry* 26, 187–194.

G. TÓTH AND P. VALTR (2005), The Erdős-Szekeres theorem: upper bounds and related results, in: *Combinatorial and Computational Geometry*, (J.E. Goodman et al., eds.), MSRI Publications 52, Cambridge University Press, Cambridge, 557–568.

W. TROTTER JR. (1992), *Combinatorics and Partially Ordered Sets*, Johns Hopkins University Press, Baltimore.

P. TURÁN (1941), Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról, *Matematikai és Fizikai Lapok* 48, 436–452.

P. TURÁN (1954), On the theory of graphs, *Colloquium Mathematicum* 3, 19–30.

P. TURÁN (1970a), Applications of graph theory to geometry and potential theory, in: *Combinatorial Structures and Their Applications* (R. Guy et al., eds.), Gordon and Breach

Science Publishers, New York, 423–434.

P. TURÁN (1970b), Remarks on the packing constants of the unit sphere (in Hungarian), *Matematikai Lapok* 21, 39–44.

W. TUTTE (1963), How to draw a planar graph, *Proc. London Mathematical Society* 13, 743–768.

W. TUTTE (1970), Toward a theory of crossing number, *J. Combinatorial Theory* 8, 45–53.

J. ULLMAN (1984), *Computational Aspects of VLSI*, Computer Science Press, Rockville, MD.

P. VALTR (1997), Graph drawings with no k pairwise crossing edges, in: *Graph Drawing, Lecture Notes in Computer Science*, vol. 1353 (G.D. Battista, ed.), Springer-Verlag, New York, 205–218.

V. VAPNIK AND A. CHERVONENKIS (1971), On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities, *Theory of Probability and Its Applications* 16, 264–280.

K. VESZTERGOMBI (1985), On the distribution of distances in finite sets in the plane, *Discrete Mathematics* 57, 129–146.

K. VESZTERGOMBI (1987), On large distances in planar sets, *Discrete Mathematics* 67, 191–198.

E. WELZL (1988), Partition trees for triangle counting and other range searching problems, *Proc. 4th Annual Symposium on Computational Geometry*, 23–33.

E. WELZL (1992), On spanning trees with low crossing numbers, *Lecture notes in Computer Science*, vol. 594, Springer-Verlag, New York, 233-249.

R. WENGER (1991), Extremal graphs with no C_4's, C_6's, or C'_{10}'s, *J. Combinatorial Theory, Series B* 52, 113–116.

L. WERNISCH (1994), Note on stabbing numbers and sphere packing numbers, manuscript, Computer Science Institute, Free University Berlin.

D. WILLARD (1982), Polygon retrieval, *SIAM J. Computing* 11, 149–165.

D. WOODALL (1971), Thrackles and deadlock, in: *Combinatorial Mathematics and Its Applications* (D. Welsh, ed.), Academic Press, London, 335-347.

D. WOODALL (1972), Two results on infinite transversals, in: *Combinatorics, Proc. Conference on Combinatorial Mathematics* (D. Welsh and D. Woodall, eds.), Institute of Mathematics and Its Applications, Southend-on-Sea, Essex, England, 341–350.

C. XU AND R. DING (2004), The number of isosceles right triangles determined by n points in convex position in the plane, *Discrete and Computational Geometry* 31, 491–499.

I. YAGLOM AND V. BOLTYANSKY (1951), *Convex Figures*, Moscow (in Russian).

K. ZARANKIEWICZ (1951), Problem 101, *Colloquium Mathematicum* 2, 301.

Z. ZHANG (1993), A note on arrays of dots with distinct slopes, *Combinatorica* 13, 127-128.

A. ZYKOV (1943), On some properties of linear complexes, *Matematicheskii Sbornik N.S.* 24 (66), 163–188. [Also in *American Mathematical Society Translations* 79 (1952).]

符 号 索 引

作者索引

G

H

M

N

O

X

Y

Z

主 题 索 引

10 画

11 画

12 画

13 画

15 画

18 画